

# Chapitre 5: Commande par régulateur PID numérique

## 1. Rappels sur les contrôleurs PID analogiques

Les contrôleurs (régulateurs) **Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID)** sont des organes de contrôle permettant d'effectuer une régulation en boucle fermée d'un système industriel. Ce sont les contrôleurs les plus utilisés dans l'industrie et permettent de contrôler la grande majorité des procédés.

### 1.1. Contrôleur proportionnel P analogique

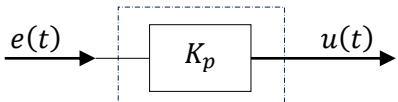
<i>Loi de commande</i>	<i>Fonction de transfert</i>	<i>Schéma fonctionnel</i>
$u(t) = K_p \cdot e(t)$	$C_p(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p$	

Tableau (1) : Contrôleur proportionnel P analogique

### 1.2. Contrôleur proportionnel-intégral PI analogique

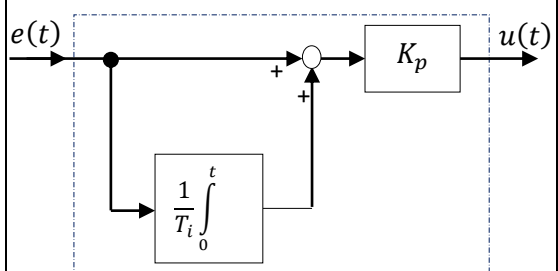
<i>Loi de commande</i>	<i>Fonction de transfert</i>	<i>Schéma fonctionnel</i>
$u(t) = K_p \cdot \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) \cdot d\tau \right)$	$C_{PI}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \cdot \frac{1+T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$	

Tableau (2) : Contrôleur proportionnel-intégral PI analogique

### 1.3. Contrôleur proportionnel-dérivé PD analogique

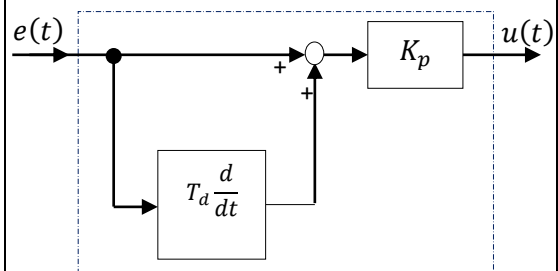
<i>Loi de commande</i>	<i>Fonction de transfert</i>	<i>Schéma fonctionnel</i>
$u(t) = K_p \cdot \left( e(t) + T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right)$	$C_{PD}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \cdot (1+T_d \cdot p)$	

Tableau (3) : Contrôleur proportionnel-dérivé PD analogique

### 1.4. Contrôleur proportionnel-intégral-dérivé PID analogique

Plusieurs implémentations des contrôleurs de type PID sont possibles, à savoir : structure série, structure parallèle et structure mixte.

#### a. Structure PID série

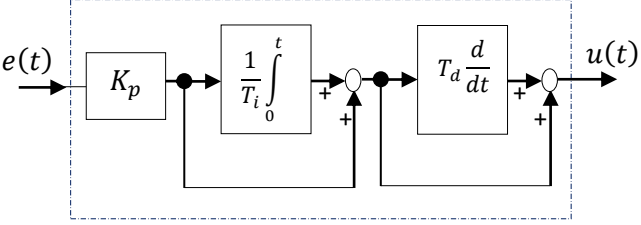
<i>Loi de commande</i>	<i>Schéma fonctionnel</i>
$u(t) = K_p \cdot \left( \frac{T_i + T_d}{T_i} \cdot e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_0^t e(\tau) \cdot d\tau + T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right)$	
<i>Fonction de transfert</i>	
$C_{PID}(p) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) (1 + T_d \cdot p)$	

Tableau (4) : Contrôleur proportionne-intégral-dérivé série

#### b. Structure PID parallèle

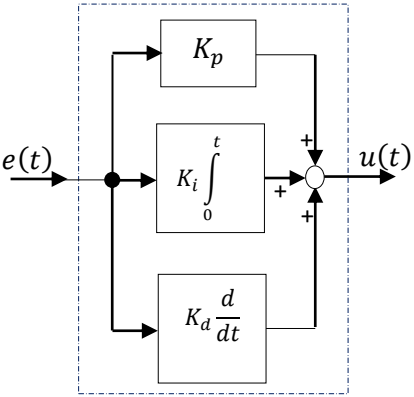
<i>Loi de commande</i>	<i>Schéma fonctionnel</i>
$u(t) = K_p \cdot e(t) + K_i \cdot \int_0^t e(\tau) \cdot d\tau + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$	
<i>Fonction de transfert</i>	
$C_{PID}(p) = K_p + K_i \cdot \frac{1}{p} + K_d \cdot p$	

Tableau (5) : Contrôleur proportionne-intégral-dérivé parallèle

où  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$ , sont respectivement, les gains proportionnel, intégral et dérivé.  $T_i$  et  $T_d$ , sont respectivement, les constantes du temps de l'intégrale et de la dérivée.

### c. Structure PID mixte

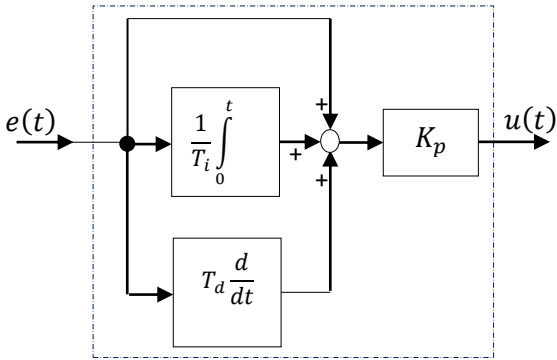
<i>Loi de commande</i>	<i>Schéma fonctionnel</i>
$u(t) = K_p \cdot \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) \cdot d\tau + T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right)$	
<p><i>Fonction de transfert</i></p>	
$C_{PID}(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p \right)$	

Tableau (6) : Contrôleur proportionne-intégral-dérivé mixte

#### Remarque

Le terme dérivé incorporé dans le contrôleur PID est  $T_d \cdot p$ . En fait, cette fonction de transfert est irréalisable physiquement car non causale. Dans la pratique, la dérivée est réalisée sous forme filtrée :  $\frac{T_d \cdot p}{1 + \frac{T_d \cdot p}{N}}$ , avec  $1 \leq N \leq 100$ . Par conséquent, la fonction de transfert du contrôleur PID mixte devient sous la forme filtrée suivante (la structure la plus utilisée dans l'industrie) :

$$C_{PID}(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + \frac{T_d \cdot p}{1 + \frac{T_d \cdot p}{N}} \right) \quad (1)$$

## 2. Avantages et inconvénients des actions d'un contrôleur PID analogique

### 2.1. Action proportionnelle P

- permet de corriger les effets d'une perturbation ;
- permet de diminuer l'erreur en régime permanent ;
- permet d'augmenter la rapidité en régime transitoire ;
- déstabilise le système quand on augmente le gain  $K_p$ .

### 2.2. Action intégrale I

- annule l'erreur statique (erreur en régime permanent);
- diminuer la rapidité et l'amortissement en régime transitoire ;
- déstabilise le système quand on augmente le gain d'intégration  $K_i$  ( $T_i$  trop faible).

### 2.3. Action dérivée D

- augmente la rapidité et l'amortissement en régime transitoire ;

- stabilise plus rapidement le système (temps de réponse amélioré) ;
- anticipe les erreurs futures ;
- n'annule pas l'erreur statique (aucun effet en régime permanent);
- sensible aux parasites.

### 3. Transposition des contrôleurs PID analogiques

Afin de pouvoir importer un régulateur PID analogique dans un ordinateur numérique, il faut le transposer (numérisé) en utilisant les différentes techniques de discrétisation.

Les régulateurs discrets élaborent une grandeur de commande discrète  $u(k)$  en fonction de l'écart de réglage discret  $e(k)$  du système à commander. Selon la complexité du régulateur, la grandeur de commande à l'instant  $k$  est formée en fonction de la valeur de l'écart à cet instant, mais aussi instants précédents  $k-1$ ,  $k-2$ , etc.

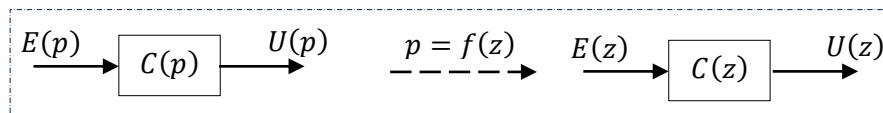


Figure (1) : Approximation de la variable complexe 'p'

#### 3.1. Les différentes approximations de la dérivée et de l'intégrale continues

Les approximations les plus utilisées pour approcher la dérivée et l'intégrale continues sont résumées dans le tableau suivant :

	<i>Dérivation</i>	<i>Intégration</i>
<i>Méthode d'Euler arrière (Discrétisation arrière)</i>	$p \rightarrow \frac{z-1}{Tz}$	$\frac{1}{p} \rightarrow \frac{Tz}{z-1}$
<i>Méthode d'Euler avant (Discrétisation avant)</i>	$p \rightarrow \frac{z-1}{T}$	$\frac{1}{p} \rightarrow \frac{T}{z-1}$
<i>Méthode de Tustin (Transformation bilinéaire)</i>	$p \rightarrow \frac{2z-1}{Tz+1}$	$\frac{1}{p} \rightarrow \frac{Tz+1}{2z-1}$

Tableau (7): Différentes approximations de la dérivée et de l'intégrale continues

#### 3.2. Réalisation des contrôleurs PID numériques

Nous allons utiliser l'approximation d'Euler arrière pour discrétiser les différents contrôleurs analogiques cités dans la section précédente.

### 3.2.1. Contrôleur P numérique

Le régulateur P analogique a pour fonction de transfert  $C_p(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p$ . En utilisant la transformée en 'z', nous obtenons la fonction de transfert du contrôleur P numérique équivalent:

$$C_p(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \quad (2)$$

Ce régulateur est décrit par l'équation récurrente suivante :

$$u(k) = K_p e(k) \quad (3)$$

Son schéma fonctionnel est donné comme suit :

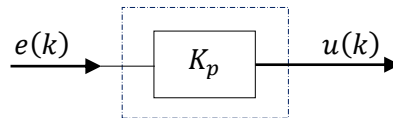


Figure (2) : Schéma fonctionnel du contrôleur P numérique

### 3.2.2. Contrôleur PI numérique

Soit un contrôleur PI analogique dont la fonction de transfert est de la forme :

$$C_{PI}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right). \text{ En utilisant l'approximation d'Euler arrière, nous trouvons :}$$

$$\begin{aligned} C_{PI}(z) &= \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \cdot \left( 1 + \frac{T}{T_i} \cdot \frac{z}{z-1} \right) \\ &= \frac{r_0 + r_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \end{aligned} \quad (4)$$

L'équation récurrente suivante permet de décrire ce régulateur :

$$u(k) = u(k-1) + r_0 e(k) + r_1 e(k-1) \quad (5)$$

avec :  $r_0 = K_p \cdot \left( 1 + \frac{T}{T_i} \right)$  et  $r_1 = -K_p$ .

Son schéma fonctionnel peut être donné comme suit :

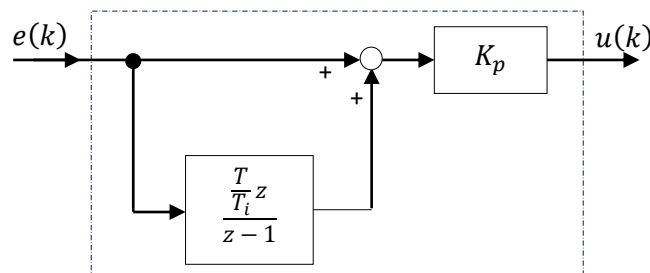


Figure (3) : Schéma fonctionnel du contrôleur PI numérique

### 3.2.3. Contrôleur PD numérique

Un contrôleur PD analogique est décrit par la fonction de transfert :  
 $C_{PD}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K_p \cdot (1 + T_d p)$ . Sa version numérique est obtenue en utilisant l'approximation

d'Euler arrière :  $p = \frac{z-1}{Tz}$  :

$$C_{PD}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \cdot \left( 1 + \frac{T_d}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \right) \quad (6)$$

ou bien :

$$C_{PD}(z) = r_0 + r_1 z^{-1} \quad (7)$$

Ce contrôleur est représenté par l'équation récurrente suivante :

$$u(k) = r_0 e(k) + r_1 e(k-1) \quad (8)$$

avec :  $r_0 = K_p \cdot \left( 1 + \frac{T_d}{T} \right)$  et  $r_1 = -K_p \frac{T_d}{T}$ .

Son schéma fonctionnel est montré par la figure suivante :

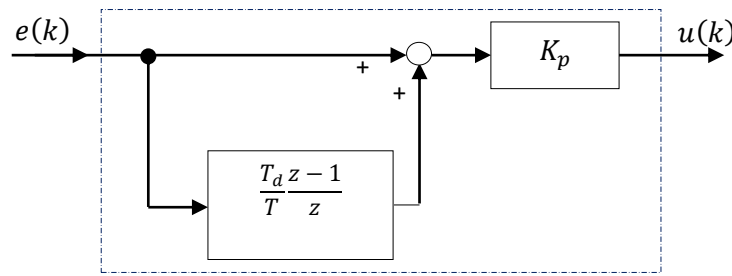


Figure (4) : Schéma fonctionnel du contrôleur PD numérique

### 3.2.4. Contrôleurs PID numériques

Les trois structures des contrôleurs PID analogiques étudiées dans la première section sont discrétisées par la méthode d'Euler arrière. Par conséquent, leurs fonctions de transfert numériques, leurs équations récurrentes sont calculées.

#### a. Structure PID numérique série

La structure série du contrôleur PID numérique est définie par la fonction de transfert :

$$C_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \cdot \left( 1 + \frac{T}{T_i} \cdot \frac{z}{z-1} \right) \left( 1 + \frac{T_d}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \right) \quad (9)$$

Cette fonction de transfert peut être écrite :

$$C_{PID}(z) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (10)$$

L'équation récurrente correspondante est donnée par :

$$u(k) = u(k-1) + r_0 e(k) + r_1 e(k-1) + r_2 e(k-2) \quad (11)$$

Par définition :  $r_0 = K'_p (T^2 + TT'_i + T'_d T'_i) / TT'_i$ ,  $r_1 = -K'_p (T + 2T'_d) / T$  et  $r_2 = K'_p T'_d / T_i$ .

avec:  $K'_p = K_p \frac{T_i + T_d}{T_i}$ ,  $T'_i = T_i + T_d$  et  $T'_d = \frac{T_i T_d}{T_i + T_d}$

Cette structure, apparaissant sous forme de schéma fonctionnel dans la figure suivante :

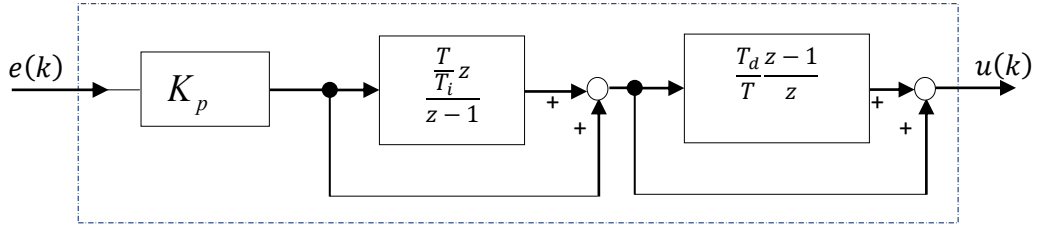


Figure (5) : Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique série

### b. Structure PID numérique parallèle

Une structure parallèle du contrôleur PID numérique s'obtient en posant  $K_i = K_p / T_i$  et  $K_d = K_p T_d$ . ce contrôleur peut être décrit par :

- une fonction de transfert en 'z' :

$$C_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p + \frac{K_i T z}{z-1} + \frac{K_d}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \quad (12)$$

- une fonction de transfert en 'z<sup>-1</sup>' :

$$C_{PID}(z) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (13)$$

- une équation récurrente:

$$u(k) = u(k-1) + r_0 e(k) + r_1 e(k-1) + r_2 e(k-2) \quad (14)$$

- un schéma fonctionnel:

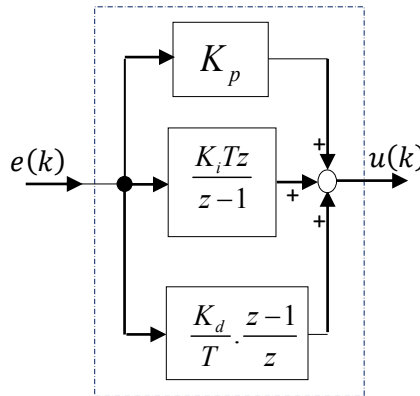


Figure (6) : Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique parallèle

On définit :  $r_0 = \frac{TK_p + K_d}{T}$ ,  $r_1 = \frac{T^2 K_i - TK_p - 2K_d}{T}$  et  $r_2 = \frac{K_d}{T}$ .

### c. Structure PID numérique mixte

Le régulateur PID analogique mixte, quand la dérivation n'est pas filtrée, possède la fonction de transfert :

$$C_{PID}(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p \right) \quad (15)$$

Elle est non causale. Par contre, sa version numérique est causale :

$$C_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left( 1 + \frac{T}{T_i} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{T_d}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \right) \quad (16)$$

Cette dernière peut être écrite sous la forme suivante :

$$C_{PID}(z) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (17)$$

L'équation récurrente de cette structure est donnée par :

$$u(k) = u(k-1) + r_0 e(k) + r_1 e(k-1) + r_2 e(k-2) \quad (18)$$

On définit :  $r_0 = K_p \left( 1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T} \right)$ ,  $r_1 = -K_p \left( 1 + 2 \frac{T_d}{T} \right)$  et  $r_2 = K_p \frac{T_d}{T}$ .

Cette variante est représentée par le schéma fonctionnel suivant :

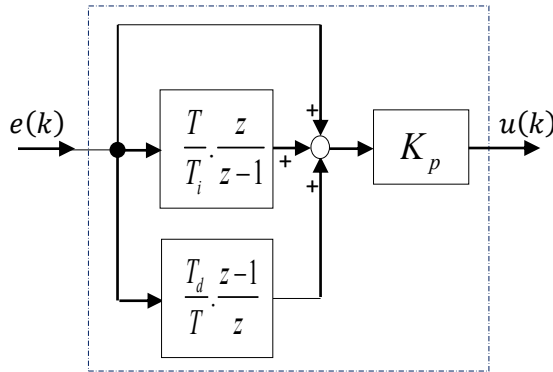


Figure (7) : Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique mixte

Cette variante est dite forme non filtrée. En fait, il est préférable, pour réaliser un contrôleur PID numérique, de prendre la forme filtrée suivante :

$$C_{PID}(z) = K_p \left( 1 + \frac{T}{T_i} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{N(z-1)}{\left( 1 + N \frac{T}{T_d} \right) z-1} \right) \quad (19)$$

On peut écrire la fonction de transfert de l'équation (19) sous la forme réduite suivante :

$$C_{PID}(z) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})} \quad (20)$$

Dans ce cas l'équation récurrente est donnée comme suit :

$$u(k) = (1 - s_1)u(k-1) + s_1 u(k-2) + r_0 e(k) + r_1 e(k-1) + r_2 e(k-2) \quad (21)$$

avec:  $s_1 = -\frac{T_d}{T_d + NT}$ ,  $r_0 = K_p \left(1 + \frac{T}{T_i} - N s_1\right)$ ,  $r_1 = K_p \left(s_1 \left(1 + \frac{T}{T_i} + 2N\right) - 1\right)$  et  $r_2 = -K_p s_1 (1 + N)$ .

$N$  : est un entier positif non nul.

Le schéma fonctionnel de la figure (7) devient :

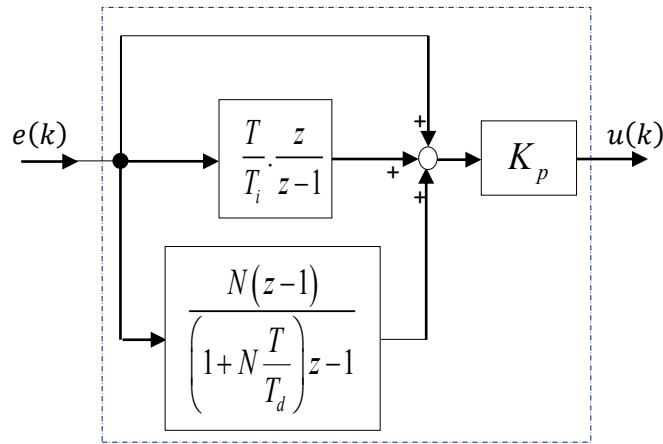


Figure (8) : Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique filtré mixte

### Exemple

Soit le régulateur PID analogique mixte filtré :

$$C_{PID}(p) = 0,202 \left( 1 + \frac{1}{60,74p} + \frac{7,20p}{1 + 9,255p} \right) \quad ($$

En utilisant l'approximation d'Euler arrière, la version discrète de  $C_{PID}(p)$  est obtenue comme suit :

$$C_{PID}(z) = C_{PID}(p) \Big|_{p=\frac{z-1}{Tz}} = 0,202 \left( 1 + \frac{1}{60,74p} + \frac{7,20p}{1 + 9,255p} \right) \Big|_{p=\frac{z-1}{Tz}}$$

Prenons  $T = 10$  (s) :

$$C_{PID}(z) = 0,202 \left( 1 + \frac{1}{60,74 \left( \frac{z-1}{10z} \right)} + \frac{7,20 \left( \frac{z-1}{10z} \right)}{1 + 9,255 \left( \frac{z-1}{10z} \right)} \right)$$

d'où :

$$C_{PID}(z) = 0,202 \left( 1 + \frac{z}{6,074z - 6,074} + \frac{0,778z - 0,778}{2,0806z - 1} \right)$$

L'expression en fonction de ' $z^{-1}$ ' est obtenue comme suit:

$$C_{PID}(z) = 0,202 \left( 1 + \frac{z}{6,074z - 6,074} + \frac{0,778z - 0,778}{2,0806z - 1} \right) \frac{z^{-1}}{z^{-1}}$$

Le régulateur PID numérique aura alors pour expression :

$$C_{PID}(z) = \frac{0,3108 - 0,4661z^{-1} + 0,1726z^{-2}}{1 - 1,4806z^{-1} + 0,4806z^{-2}}$$

Tirons l'équation récurrente correspondante :

$$C_{PID}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{0,3108 - 0,4661z^{-1} + 0,1726z^{-2}}{1 - 1,4806z^{-1} + 0,4806z^{-2}}$$

$\Leftrightarrow$

$$U(z)(1 - 1,4806z^{-1} + 0,4806z^{-2}) = E(z)(0,3108 - 0,4661z^{-1} + 0,1726z^{-2})$$

$\Leftrightarrow$

$$U(z) - 1,4806z^{-1}U(z) + 0,4806z^{-2}U(z) = 0,3108E(z) - 0,4661z^{-1}E(z) + 0,1726z^{-2}E(z)$$

Appliquant la transformée en ' $z$ ' inverse, le contrôleur aura pour équation récurrente:

$$u(k) = 0,3108e(k) - 0,4661e(k-1) + 0,1726e(k-2) + 1,4806u(k-1) - 0,4806u(k-2)$$

Ce régulateur PID numérique peut être représenté schématiquement par :

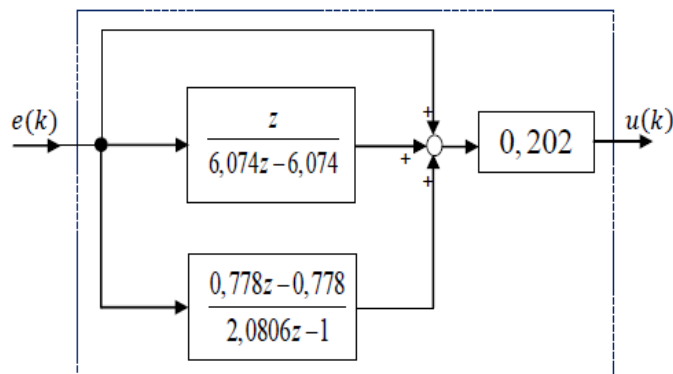


Figure (9) : Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique filtré mixte

#### 4. Réglage des contrôleurs PID numériques

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes pour calculer les paramètres de régulateurs PID numériques. Ces méthodes peuvent être empiriques, algébriques, ou fréquentielles. Cette section présente quelques techniques de réglage des régulateurs PID numériques, comme la méthode empirique proposée par **Takahashi** et la méthode de placement de pôles et notamment la technique de compensation pôle-zéro.

#### 4.1. Réglage de Takahashi pour des contrôleurs PID numériques

La méthode de **Takahashi** est la généralisation au cas discret de la méthode de **Ziegler-Nichols** utilisée pour le domaine continu. Par conséquent, comme le cas continu il faut soumettre le système discret à l'un des deux essais : en boucle ouverte (**BO**) et en boucle fermée (**BF**).

##### 4.1.1. Essai en boucle ouverte (BO) : Méthode de la réponse indicielle

Cette méthode est basée sur les deux paramètres ' $a$ ' (pente) et ' $T_c$ ' (seuil) de la réponse indicielle issue d'un essai en boucle ouverte (BO), comme le montre les figures (10) et (11) :

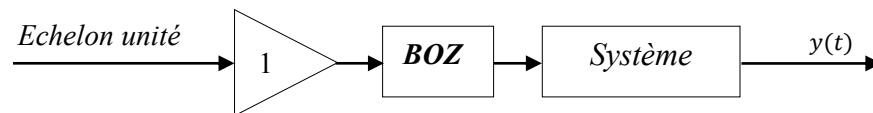


Figure (10) : Essai de **Takahashi** en boucle ouverte

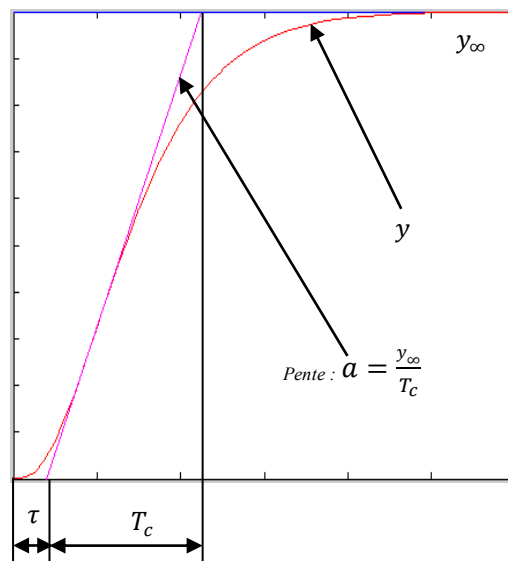


Figure (11) : Réponse indicielle du système en boucle ouverte

Le tableau suivant montre les expressions empiriques des paramètres des contrôleurs P/PI/PID numériques proposées par **Takahashi** en boucle ouverte :

Type du correcteur	Paramètres du correcteur
Correcteur P	$K_p = \frac{1}{a(\tau + T)}$
Correcteur PI	$K_p = \frac{0.9}{a(\tau + 0.5T)} - 0.5K_iT$ $K_i = \frac{0.27}{a(\tau + 0.5T)^2}$
Correcteur PID	$K_p = \frac{1.2}{a(\tau + 0.5T)} - 0.5K_iT$ $K_i = \frac{0.6}{a(\tau + 0.5T)^2}$ $K_d = \frac{0.5}{a}$

Tableau (8) : Paramètres des correcteurs P/PI/PID numériques proposés par l'essai de **Takahashi** en boucle ouverte

#### 4.1.2. Essai en boucle fermée (BF) : Phénomène de pompage

Cette méthode est caractérisée par les deux paramètres ' $K_{osc}$ ' : qui est le gain mettant le système bouclé (figure (12)) en oscillation entretenue et ' $T_{osc}$ ' : qui est la période de l'oscillation entretenue. Le principe de cette méthode consiste à augmenter progressivement le gain ' $K_{osc}$ ' d'un correcteur proportionnel pur jusqu'à l'obtention d'une oscillation entretenue, comme le montre la figure (13).

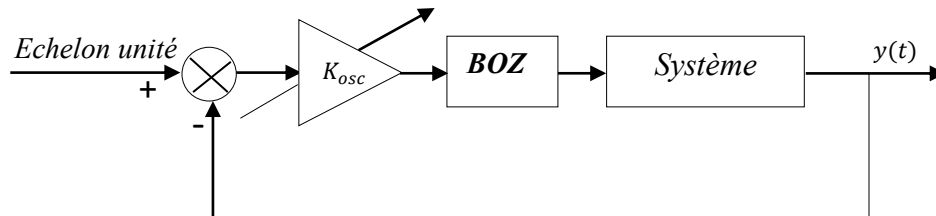


Figure (12) : Essai de **Takahashi** en boucle fermée

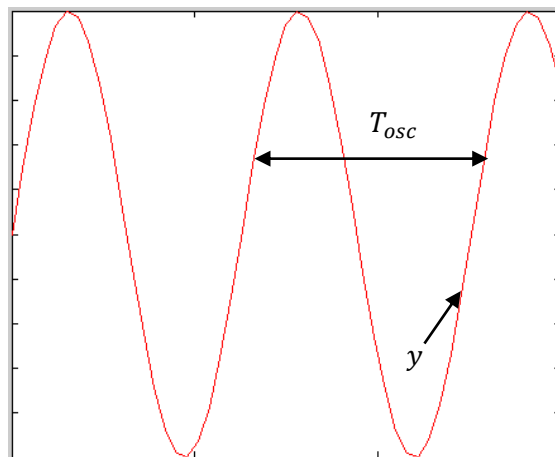


Figure (13) : Régime oscillant du système en boucle fermée

Les paramètres de réglage des contrôleurs P/PI/PID numériques en fonction des paramètres relevés sur le système en boucle fermée (BF), sont montrés dans le tableau suivant :

Type du correcteur	Paramètres du correcteur
Correcteur P	$K_p = 0.5K_{osc}$
Correcteur PI	$K_p = 0.45K_{osc} - 0.5K_i T$ $K_i = 0.54K_{osc}/T_{osc}$
Correcteur PID	$K_p = 0.6K_{osc} - 0.5K_i T$ $K_i = 1.2K_{osc}/T_{osc}$ $K_d = (3/40)K_{osc}T_{osc}$

Tableau (9): Paramètres de correcteurs P/PI/PID numériques proposés par l'essai de **Takahashi** en boucle fermée

Les formes des contrôleurs PI/PID utilisés par **Takahashi** sont résumées dans le tableau suivant :

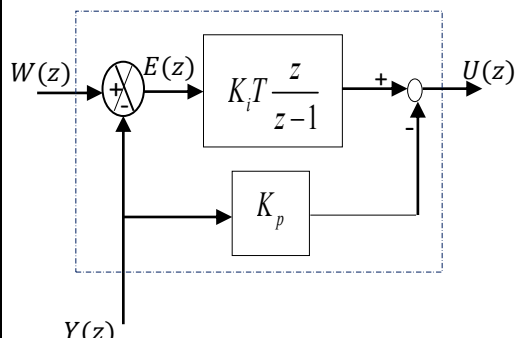
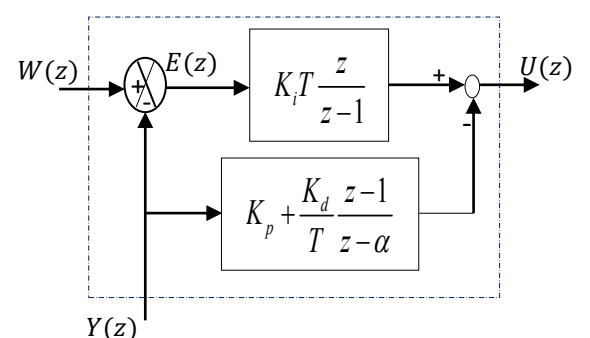
	<i>Contrôleur PI numérique</i>	<i>Contrôleur PID numérique</i>
<i>Loi de commande</i>	$U(z) = K_i T \frac{z}{z-1} E(z) - K_p Y(z)$	$U(z) = K_i T \frac{z}{z-1} E(z) - \left( K_p + \frac{K_d}{T} \frac{z-1}{z-\alpha} \right) Y(z)$
<i>Schéma fonctionnel</i>		

Tableau (10): Contrôleurs PI/PID numériques utilisés par **Takahashi**

Ici  $W(z)$ ,  $E(z)$ ,  $U(z)$  et  $Y(z)$  sont respectivement la consigne, l'erreur, la commande et la sortie d'un système de contrôle bouclé.  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  représentent respectivement les gains proportionnel, intégral et dérivé. Le choix de la valeur de  $\alpha$  est pratiquement de l'ordre de 0.1.

### Exemple

Dans cet exemple, en utilisant le lien entre **MATLAB** et **Simulink**, nous allons présenter une procédure de synthèse à suivre pour régler les paramètres de contrôleurs P/PI/PID numériques. La procédure de base de cette synthèse est le calcul des coefficients de différents contrôleurs numériques en discret en utilisant l'essai de **Takahashi** en boucle fermée. Le principe de cette synthèse comporte quatre phases. Pour ce faire, nous considérons un système LTI continu du troisième ordre de fonction de transfert suivante:

$$G(p) = \frac{10}{p^3 + 7p^2 + 6p}$$

#### Phase 1 : Choix de la période d'échantillonnage

Le réglage des contrôleurs P/PI/PID numériques passe immédiatement par le choix de la période d'échantillonnage 'T' dans une fourchette  $[T_{\min}, T_{\max}]$ . Pour ce faire, en premier lieu, on définit le système continu  $G(p)$ , puis nous traçons le diagramme de Bode du système continu en boucle ouverte (figure (14)). Le code **MATLAB** suivant permet de tracer le diagramme de Bode du système continu  $G(p)$  :

```
NumG = [10];
DenG = [1 7 6 0];
G=tf(NumG,DenG,'variable','p');
bode(G);
grid;
```

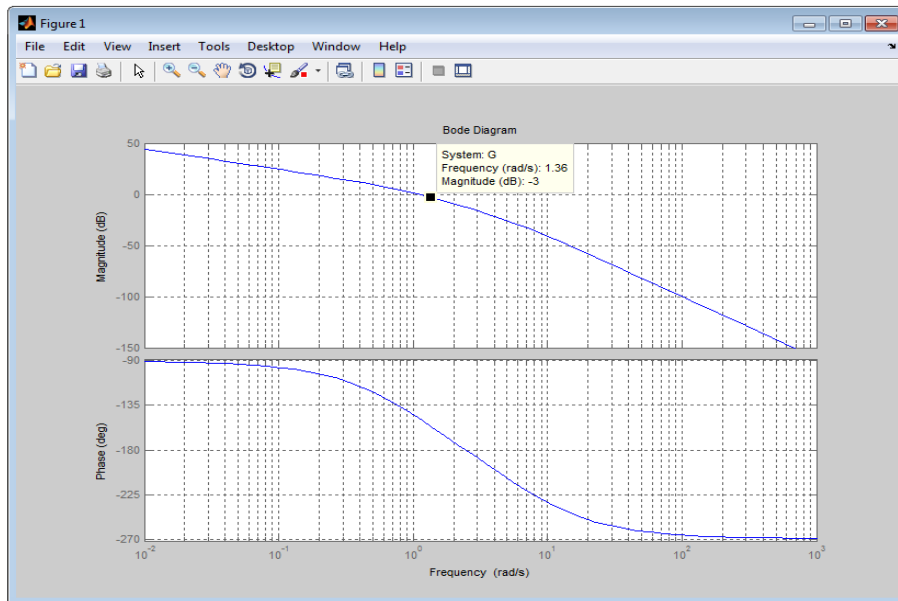


Figure (14): Diagramme de Bode du système continu  $G(p)$  en boucle ouverte montrant graphiquement la valeur de la pulsation de coupure du système

Depuis le diagramme on lit la pulsation de coupure  $\omega_c = 1.36$  rad/s. Les bornes  $T_{\min}$  et  $T_{\max}$  sont calculées par les instructions suivantes :

```

wc=1.36;
Tmin=(2*pi)/(25*wc)
Tmax=(2*pi)/(5*wc)

```

*Phase 2 : Détermination des paramètres caractérisant l'essai de Takahashi en boucle fermée*

Le but de cette section est de réaliser une simulation à l'aide de **Simulink** permettant d'obtenir un réglage par un essai en boucle fermée. En fait, l'essai de **Takahashi** en boucle fermée consiste à mettre le système continu  $G(p)$  en boucle fermée, comme le montre le modèle '**ReglageParametresPompageTakahashi**' de la figure (15) :

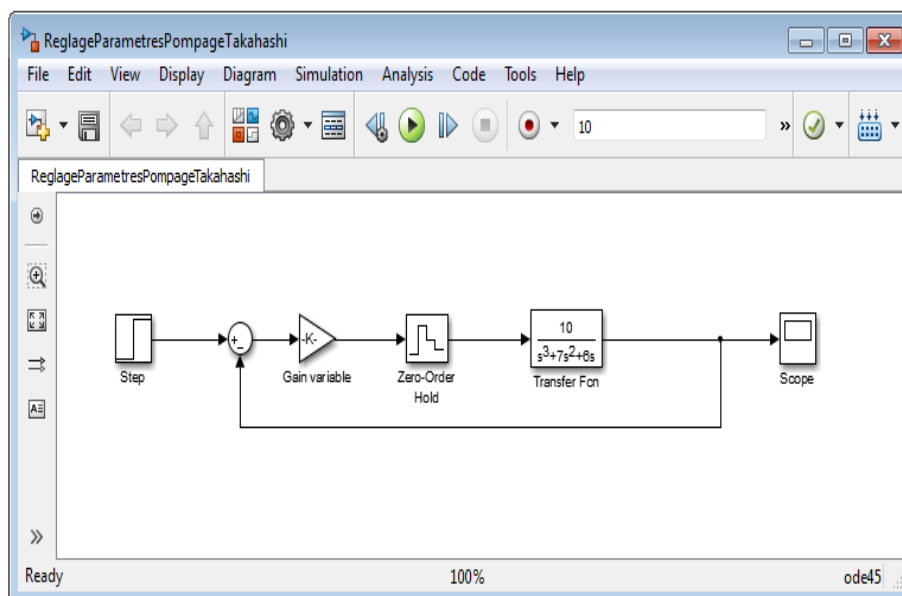


Figure (15): Modèle **Simulink** montrant l'essai de **Takahashi** en boucle fermée

Le principe de cet essai consiste à augmenter progressivement le gain 'k' d'un correcteur proportionnel pur jusqu'à l'obtention d'une oscillation entretenue.

En choisissant une période d'échantillonnage convenable dans la fourchette  $[T_{\min}, T_{\max}]$ ,  $T = 0.1849$  (s), nous avons relevé les deux paramètres  $K_{osc} = 2.605$  et  $T_{osc} = 3.3333$  (s) caractérisant l'essai de **Takahashi** en boucle fermée.

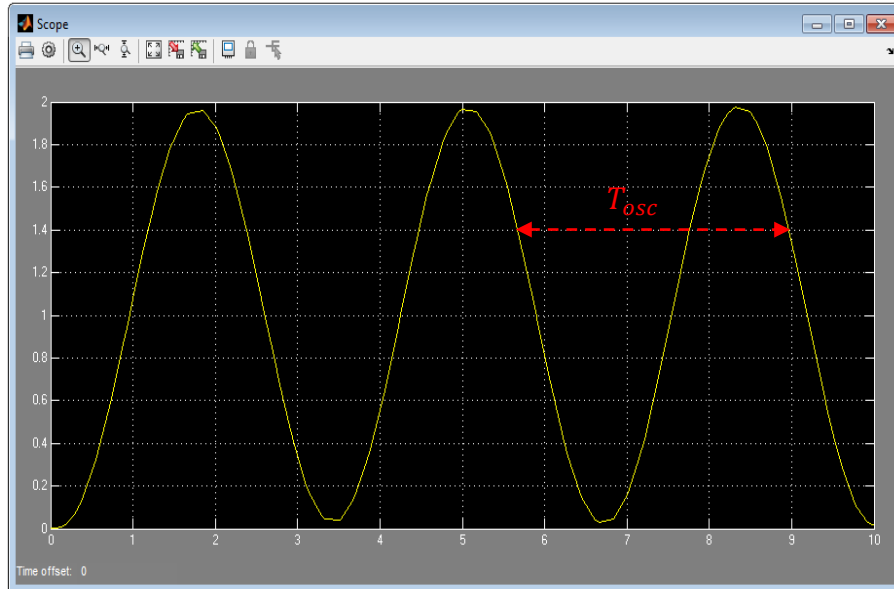


Figure (16): Oscillation entretenue de période  $T_{osc} = 3.3333$  (s) obtenue avec  $K_{osc} = 2.605$  et  $T = 0.1849$  (s)

### Phase 3: Calcul des paramètres des contrôleurs P/PI/PID numériques

Afin de faire le lien entre **MATLAB** et **Simulink**, on propose de créer le script ci-dessous '*parametres.m*'. Ce script permet de calculer les différents paramètres des contrôleurs P/PI/PID numériques en utilisant les expressions du tableau (9).

#### Script '*parametres.m*'

```
T= 0.1849;
Kosc=2.605;
Tosc=3.3333;
% Paramètre du contrôleur P numérique
Kp1=0.5*Kosc;
% Paramètres du contrôleur PI numérique
Ki2=0.54*Kosc/Tosc;
Kp2=0.45*Kosc - 0.5*Ki2*T;
% Paramètres du contrôleur PID numérique
Ki3=1.2*Kosc/Tosc;
Kp3=0.6*Kosc - 0.5*Ki3*T;
Kd3=(3/40)*Kosc*Tosc;
```

Les différentes variables de ce script seront définies dans l'espace de travail de **MATLAB** après son exécution, et qui seront utilisées par leurs noms au niveau de **Simulink**.

### Phase 4 : Commande P/PI/PID numérique du système du troisième ordre

Dans cette section, nous allons étudier l'asservissement numérique du système  $G(p)$  échantillonné par un bloqueur d'ordre zéro. Il s'agit de comparer la réponse indicielle du système

échantillonné obtenue par les trois contrôleurs P/PI/PID numériques calculés par l'essai de **Takahashi** en boucle fermée. Tout d'abord, on construit le modèle **Simulink** de la figure (17). En exécutant le script '*parametres.m*' et lançant la simulation depuis le modèle '*CommandePPIPIDNumeriquesG*', nous obtenons les réponses indicielles obtenues par les trois contrôleurs P/PI/PID numériques calculés par l'essai de **Takahashi** en boucle fermée, comme le montre la figure (18). Dans laquelle on remarque bien que le contrôleur PID numérique (en rouge) donne de bonnes performances par rapport aux autres contrôleurs numériques P (en violet) et PI (en bleu ciel). Notons que nous avons utilisé les contrôleurs P/PI/PID numériques de **Simulink**.

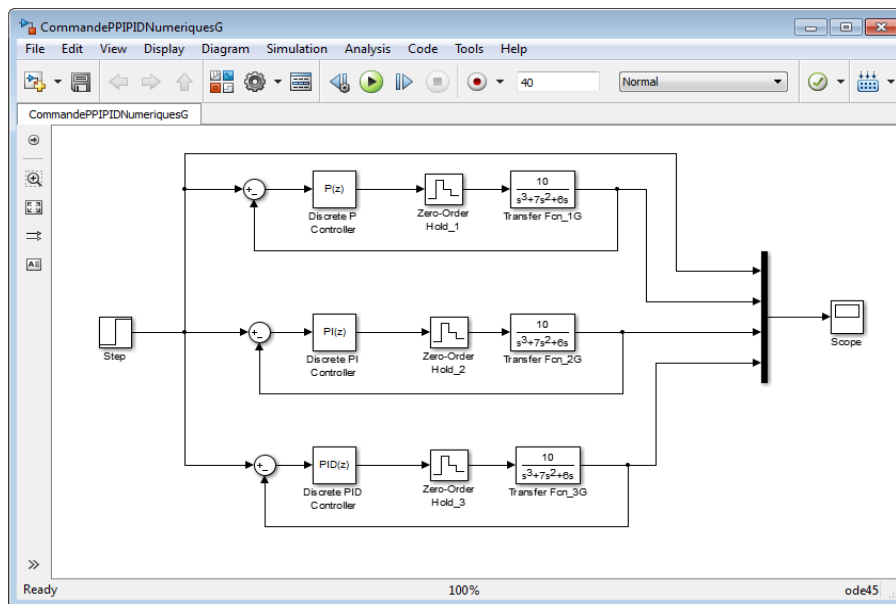


Figure (17): Commande P/PI/PID numérique d'un système continu du troisième ordre échantillonné par un bloqueur d'ordre zéro

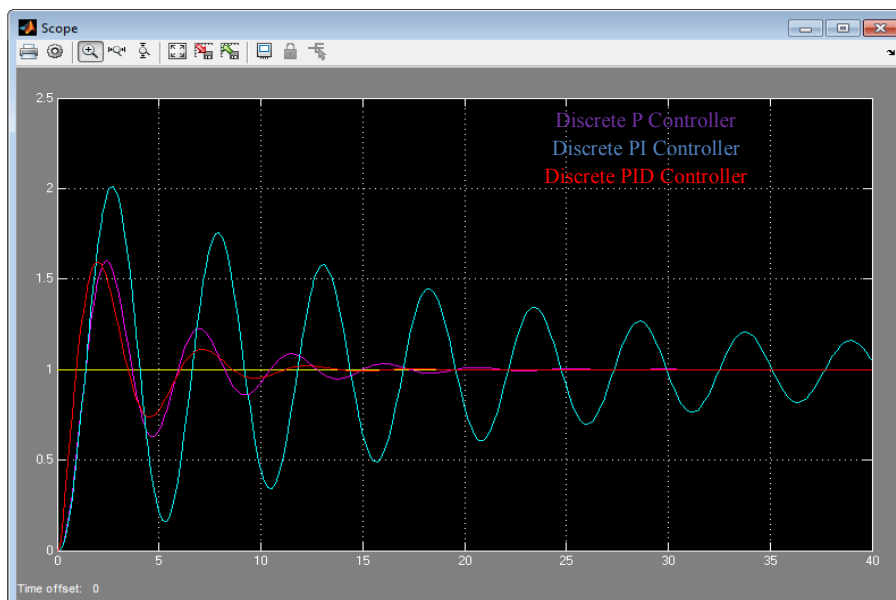


Figure (18): Comparaison des réponses indicielles obtenues avec les trois contrôleurs P/PI/PID numériques calculés par l'essai de **Takahashi** en boucle fermée

## 4.2. Synthèse des contrôleurs PID numériques par placement de pôles

Lors de la synthèse des contrôleurs PID numériques par placement de pôles (y compris la compensation pôle-zéro) on impose le comportement du système bouclé. En fait, la méthode de placement de pôles calcule les paramètres d'un régulateur PID à partir de la spécification des pôles désirés en boucle fermée et en connaissant un modèle du système à régler. Tandis que la méthode de compensation pôle-zéro permet de simplifier des pôles d'un système à régler avec des zéros d'un régulateur.

### 4.2.1. Commande d'un premier ordre discret par un contrôleur PI numérique

Considérons un système discret du premier ordre commandé par un contrôleur PI numérique, comme le montre le schéma-blocs suivant :

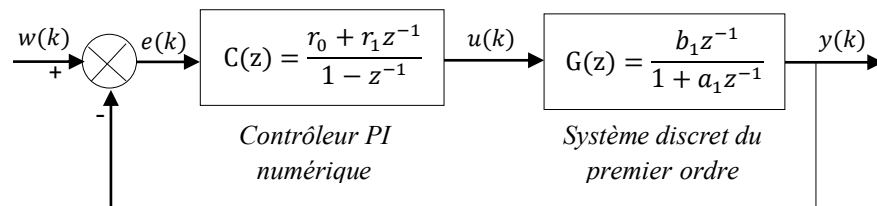


Figure (19) : Schéma-blocs d'une commande d'un premier ordre discret par un contrôleur PI numérique

#### a. Comportement en premier ordre

L'idée de cette méthode consiste à compenser le pôle du système du premier ordre par le zéro du contrôleur PI numérique. Ce qui amène un comportement en boucle fermée du premier ordre.

Considérons un système du premier ordre continu (système continu imposé) :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \quad (23)$$

En discrétisant cette fonction de transfert avec un **BOZ**, nous obtenons :

$$H(z) = \frac{(1 - \lambda_0) z^{-1}}{1 - \lambda_0 z^{-1}} \quad (24)$$

avec  $\lambda_0 = e^{-\frac{T}{\tau}}$ .  $T$  et  $\tau$  représentent respectivement la période d'échantillonnage et la constante du temps du système continu du premier ordre imposé.

D'autre part, le système asservi de la figure (19) possède une fonction de transfert en boucle ouverte :

$$H_{BO}(z) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (25)$$

Pour simplifier le pôle du processus, factorisant le coefficient  $r_0$  puis en posant  $a_1 = r_1/r_0$ , l'équation (25) devient alors sous la forme suivante :

$$H_{BO}(z) = \frac{r_0 b_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (26)$$

Ce qui amène un comportement en boucle fermée du premier ordre régi par la fonction de transfert suivante :

$$H_{BF}(z) = \frac{r_0 b_1 z^{-1}}{1 + (r_0 b_1 - 1) z^{-1}} \quad (27)$$

En comparant cette dernière fonction de transfert avec la fonction de transfert discrète du système continu du premier ordre imposé (équation (24)), nous obtenons alors, le réglage du contrôleur PI numérique suivant :

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1 - \lambda_0}{b_1} \\ r_1 &= a_1 r_0 \end{aligned} \quad (28)$$

### *b. Comportement en second ordre*

Ici, le principe consiste à obtenir en boucle fermée un système assimilable à un second ordre discret. Pour ce faire, nous imposons un second ordre continu de fonction de transfert:

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2} \quad (29)$$

avec  $\omega_0$  sa pulsation propre non amortie et  $\xi$  son coefficient d'amortissement.

On a donc comme fonction de transfert discrète correspondante (obtenue par un **BOZ**):

$$H(z) = \frac{b_1' z^{-1} + b_2' z^{-2}}{1 + \rho_1 z^{-1} + \rho_2 z^{-2}} \quad (30)$$

Calculons la fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi de la figure (19) :

$$H_{BO}(z) = \frac{b_1 r_0 z^{-1} + b_1 r_1 z^{-2}}{1 + (a_1 - 1) z^{-1} - a_1 z^{-2}} \quad (31)$$

Dans ce cas, le comportement en boucle fermée est alors régi par un second ordre :

$$H_{BF}(z) = \frac{b_1 r_0 z^{-1} + b_1 r_1 z^{-2}}{1 + \rho_1 z^{-1} + \rho_2 z^{-2}} \quad (32)$$

avec  $\rho_1 = a_1 - 1 + b_1 r_0$  et  $\rho_2 = b_1 r_1 - a_1$ .

Les coefficients du contrôleur PI numérique sont alors calculés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1 - a_1 + \rho_1}{b_1} \\ r_1 &= \frac{a_1 + \rho_2}{b_1} \end{aligned} \quad (33)$$

Les valeurs de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont calculées en comparant les deux fonctions de transfert (30) et (32). Selon la dynamique désirée en boucle fermée, on aura :

- Si la dynamique désirée en boucle fermée est aperiodique, il faut choisir deux constantes de temps :  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , telles que :

$$\rho_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \rho_2 = \lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 = e^{-\frac{T}{\tau_1}} \text{ et } \lambda_2 = e^{-\frac{T}{\tau_2}} \quad (34)$$

- Si la dynamique désirée est oscillatoire, il faut choisir une pulsation propre  $\omega_0$  et un coefficient d'amortissement  $\xi$ :

$$\rho_1 = -2e^{-rT} \cos(cT), \rho_2 = e^{-2rT}, r = \xi \omega_0 \text{ et } c = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (35)$$

#### 4.2.2. Commande d'un second ordre discret par un contrôleur PID numérique filtré

La figure (20) montre une commande d'un système discret du second ordre par un contrôleur PID numérique filtré.

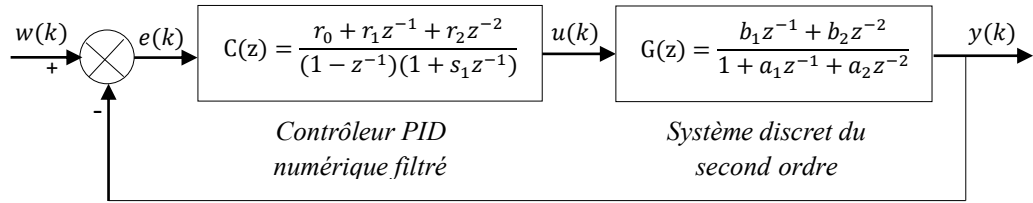


Figure (20) : Schéma-blocs d'une commande d'un second ordre discret par un contrôleur PID numérique filtré

Dans ce système asservi le contrôleur PID filtré a la forme suivante :

$$C(z) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})} \quad (36)$$

Pour simplifier les pôles du système, cette dernière fonction sera mise sous la forme suivante :

$$C(z) = \frac{r_0 \left( 1 + \frac{r_1}{r_0} z^{-1} + \frac{r_2}{r_0} z^{-2} \right)}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})} \quad (37)$$

Calculons maintenant la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$H_{BO}(z) = \frac{r_0 \left( 1 + \frac{r_1}{r_0} z^{-1} + \frac{r_2}{r_0} z^{-2} \right)}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})} \cdot \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (38)$$

Posons  $a_1 = r_1/r_0$  et  $a_2 = r_2/r_0$ , l'équation (38) devient sous la forme simplifiée suivante:

$$\begin{aligned} H_{BO}(z) &= \frac{r_0 b_1 z^{-1} + r_0 b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})} \\ &= \frac{r_0 b_1 z^{-1} + r_0 b_2 z^{-2}}{1 + (s_1 - 1)z^{-1} - s_1 z^{-2}} \end{aligned} \quad (39)$$

Le comportement du système asservi en boucle fermée sera mis sous la forme suivante :

$$H_{BF}(z) = \frac{r_0 b_1 z^{-1} + r_0 b_2 z^{-2}}{1 + \rho_1 z^{-1} + \rho_2 z^{-2}} \quad (40)$$

avec  $\rho_1 = s_1 + b_1 r_0 - 1$  et  $\rho_2 = r_0 b_2 - s_1$ .

Pour déterminer les paramètres du contrôleur, il faut tout d'abord fixer les deux pôles en boucle fermée. Pour ce faire, nous choisissons un comportement du second ordre en boucle fermée, et en fixant la pulsation propre  $\omega_0$  et le coefficient d'amortissement  $\xi$ . Une fois que ces pôles fixés par l'utilisateur, les paramètres du contrôleur PID numérique filtré sont calculés alors par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1 + \rho_1 + \rho_2}{b_1 + b_2} \\ r_1 &= r_0 a_1 \\ r_2 &= r_0 a_2 \\ s_1 &= r_0 b_2 - \rho_2 \end{aligned} \quad (41)$$

Selon la dynamique désirée en boucle fermée, les valeurs de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont calculées en utilisant les relations (34) et (35).

**Exemple :** commande d'un premier ordre par un PI numérique

Nous allons considérer ici la commande du courant d'induit d'un moteur à courant continu (MCC) modélisé par un premier ordre :

$$G(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{0.1667}{1 + 0.04p}$$

avec  $I$  et  $U$  sont respectivement le courant et la tension de l'induit du moteur MCC.

Nous désirons commander le courant de l'induit  $I$  par un PI numérique défini par la fonction suivante :

$$C(z) = \frac{r_0 + r_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

- Comportement du système en temps discret

Nous commençons par la discrétisation de la fonction de transfert continue du moteur (MCC) en utilisant un bloqueur d'ordre zéro (**BOZ**) :

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{I(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{G(p)}{p} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{0.1667}{p(1+0.04p)} \right] \\ G(z) &= \frac{0.1667(1-\lambda)z^{-1}}{1-\lambda z^{-1}}, \text{ avec } \lambda = e^{-\frac{T}{0.04}} \end{aligned}$$

La fonction de transfert échantillonnée vaudra alors :

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}, \text{ avec } a_1 = -\lambda = -e^{-\frac{T}{0.04}} \text{ et } b_1 = 0.1667(1 - \lambda)$$

Prenons  $T = 0.04$  (s), il vient :

$$\lambda = 0.3679, \quad a_1 = -0.3679 \text{ et } b_1 = 0.1054$$

d'où :

$$G(z) = \frac{0.1054 z^{-1}}{1 - 0.3679 z^{-1}}$$

- *Choix du comportement en boucle fermée*

Nous allons prendre un comportement en premier ordre trois fois plus rapide que le système considéré :

$$H(p) = \frac{1}{1 + 0.01333 p}$$

Calculons sa version échantillonnée par un **BOZ** :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{I(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{H(p)}{p} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{p(1 + 0.01333 p)} \right] \end{aligned}$$

$$H(z) = \frac{(1 - \lambda_0) z^{-1}}{1 - \lambda_0 z^{-1}}, \text{ avec } \lambda_0 = e^{-\frac{T}{0.01333}}$$

et comme  $T = 0.04$  (s), on aura:

$$H(z) = \frac{0.9503 z^{-1}}{1 - 0.0497 z^{-1}}$$

- *Calcul du contrôleur PI numérique*

Calculons la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$\begin{aligned} H_{BO}(z) &= \frac{r_0 + r_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{0.1054 z^{-1}}{1 - 0.3679 z^{-1}} \\ &= \frac{r_0 \left( 1 + \frac{r_1}{r_0} z^{-1} \right)}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{0.1054 z^{-1}}{1 - 0.3679 z^{-1}} \end{aligned}$$

Simplifiant le pôle du système en posant  $r_1/r_0 = -0.3679$ , il vient :

$$H_{BO}(z) = \frac{0.1054 r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Calculons maintenant la fonction de transfert en boucle fermée:

$$H_{BF}(z) = \frac{0.1054 r_0 z^{-1}}{1 + (0.1054 r_0 - 1) z^{-1}}$$

Comparant les deux expressions de  $H_{BF}(z)$  et  $H(z)$ , nous obtenons :

$$0.1054r_0 = 0.9503 \quad \Leftrightarrow r_0 = \frac{0.9503}{0.1054}$$

$$r_0 = 9.0161$$

et comme  $r_1/r_0 = -0.3679$ , on trouve:  $r_1 = -0.3679r_0 = -3.3170$ .

Par conséquent, le contrôleur PI numérique prend la forme suivante :

$$C(z) = \frac{9.0161 - 3.3170z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$