

Chapitre 5

Propagation du champ électromagnétique

5-1- Description mathématique de la propagation

Les équations de propagation obtenues sont vectorielles et tridimensionnelles, les variations s'effectuent uniquement dans une direction de l'espace, représentée par un axe, noté (O,u). On a alors

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(u, t) \quad (5.1)$$

L'axe (O,u) définit l'axe de propagation et les plans perpendiculaires à cet axe sont appelés plans d'onde. Pour ce faire, on définit d'abord un vecteur unitaire de l'axe de propagation :

$$\vec{e}_u = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z \quad (5.2)$$

$$\text{Avec} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (5.3)$$

Un point de l'espace repéré par le vecteur :

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (5.4)$$

A pour coordonnée selon l'axe de propagation :

$$u = \vec{e}_u \cdot \vec{r} = \alpha x + \beta y + \gamma z \quad (5.5)$$

Par la suite :

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(u, t) = \frac{\partial}{\partial u} \vec{E}(u, t) \frac{\partial}{\partial x} u = \alpha \frac{\partial}{\partial u} \vec{E}(u, t) \quad (5.6)$$

D'où :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) \quad (5.7)$$

En appliquant la même démarche pour les dérivées partielles par rapport à y et z, on montre que:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) \quad (5.8)$$

Au final, l'équation d'onde se ramène à l'équation d'onde unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(u, t) = \vec{0} \quad (5.8)$$

Une telle équation admet des solutions de la forme :

$$\vec{E}(u, t) = \vec{E}^+(ct - u) + \vec{E}^-(ct + u) \quad (5.9)$$

Correspondant à la superposition d'une onde directe et d'une onde rétrograde.

5-2- Equation de propagation d'une onde quelconque

Les équations de propagation vérifiées par le champ se déduisent directement des équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \text{div} \vec{B} = 0, \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \text{rot} \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (5.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.14)$$

En prenant le rotationnel de la troisième et en appliquant la formule du double produit vectoriel, on obtient ainsi :

$$\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}] - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (5.15)$$

En utilisant les première et quatrième équations, on déduit :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} + \frac{\vec{\nabla} \rho}{\epsilon_0} \quad (5.16)$$

$$\text{Avec } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

De même, nous avons :

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J} \quad (5.17)$$

En dehors des sources, et à partir des équations (5.16) et (5.17) on obtient :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \vec{0} \quad (5.18)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = \vec{0} \quad (5.19)$$

Ce résultat est une conséquence logique des équations de Maxwell : celles-ci montrent en effet que des champs sont créés au niveau des sources (équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère) et qu'ils s'entretiennent ensuite mutuellement au delà de ces sources (équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère). Les variations temporelles du champ électrique engendrent des variations spatiales du champ magnétique et réciproquement si bien que le champ se répand dans tout l'espace, de proche en proche.

5-3- Equation de propagation du champ électromagnétique dans le vide

Par un vrai vide on entend : En l'absence de charge ($\rho=0$) et de courants ($\vec{J} = \vec{0}$). Donc, dans ce cas-là, Les équations de Maxwell prennent la forme suivante :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = 0, \quad (5.20)$$

Théorie de Champ
Troisième License Electrotechnique Industrielle

$$\nabla \cdot \vec{B} = \text{div} \vec{B} = 0, \quad (5.21)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.22)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.23)$$

Ou :

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0 \quad (5.23)$$

Notre objectif est d'exprimer une forme de l'équation dans laquelle les champs \vec{E} et \vec{B} apparait séparément et non pas ensemble dans la même équation. A partir de l'équation (15), on obtient :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} \quad (5.24)$$

Remplaçant cette équation dans l'équation (14), on obtient :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.25)$$

Remarque : Selon la loi

$$\nabla \times \nabla \times \vec{a} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a} \quad (5.26)$$

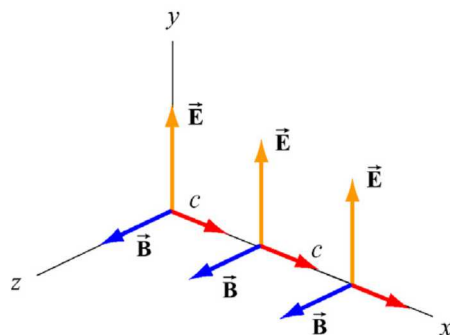
En utilisant l'équation (5.26) et la remplaçant dans l'équation (5.20) nous aurons :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.27)$$

L'équation (5.27) est l'équation d'onde dans trois dimensions spatiales. Notant que chaque composant du champ électrique satisfait indépendamment l'équation d'onde.

5-4- Onde plane

Une onde plane est une onde dont les fronts d'ondes sont plans. Pour examiner les propriétés des ondes électromagnétiques, considérons pour simplifier une onde électromagnétique se propageant dans la direction +x, avec le champ électrique \vec{E} pointant dans la direction +y et le champ magnétique \vec{B} dans la direction +z, comme illustré à la Figure ci-dessous.



Ce que nous avons ici est un exemple d'onde plane puisqu'à tout instant \vec{E} et \vec{B} sont uniformes sur tout plan perpendiculaire à la direction de propagation. De plus, l'onde est transversale car les deux

Théorie de Champ
Troisième License Electrotechnique Industrielle

champs sont perpendiculaires à la direction de propagation, qui pointe dans la direction du produit croisé $\vec{E} \times \vec{B}$.

Une solution possible de l'équation d'onde est la suivante :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_y(x, t)\hat{j} = E_0 \cos k(x - vt)\hat{j} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{j} \\ \vec{B} &= B_z(x, t)\hat{k} = B_0 \cos k(x - vt)\hat{k} = B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k}\end{aligned}\quad (5.28)$$

Où les champs sont sinusoïdales, avec des amplitudes E_0 et B_0 . Le nombre d'onde angulaire k est lié à la longueur d'onde λ par $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Et la fréquence angulaire ω est

$$\omega = kv = 2\pi \frac{v}{\lambda} = 2\pi f$$

Où f est la fréquence linéaire. Dans le vide, l'onde se propage à la vitesse de la lumière, $v=c$.

Le comportement caractéristique de l'onde électromagnétique sinusoïdale est illustré par la figure ci-après.

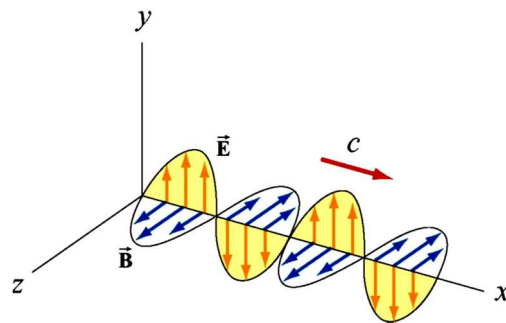


Figure : Champs électrique et magnétique d'une onde électromagnétique dans un espace vide.

Nous remarquons que les champs \vec{E} et \vec{B} sont toujours en phase. Afin d'obtenir une relation entre les amplitudes des champs E_0 et B_0 nous tenons à prendre en considération les dérivations partielles des deux champs menant à :

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -kE_0 \sin(kx - \omega t) \quad (5.29)$$

Et

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \omega B_0 \sin(kx - \omega t) \quad (5.30)$$

Ce qui implique $E_0 k = \omega B_0$, ou

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c \quad (5.31)$$

Donc d'une façon générale l'équation sera :

$$\frac{E}{B} = c \quad (5.32)$$

5-5- Caractéristiques des ondes planes

Théorie de Champ

Troisième License Electrotechnique Industrielle

Résumons les caractéristiques importantes des ondes électromagnétiques décrites dans l'Eq. (5.31):

- L'onde est transversale depuis les deux champs \vec{E} et \vec{B} qui sont perpendiculaire à la direction de propagation et pointe dans la direction du produit croise.
- Les champs \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires l'un à l'autre. Par conséquent, leur produit scalaire s'annule, $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$.
- Le rapport des grandeurs et des amplitudes des champs est :
- $\frac{E}{B} = \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c$
- La vitesse de propagation dans le vide est égale à la vitesse de la lumière, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$
- Les ondes électromagnétiques obéissent au principe de superposition.

5-6- Propagation dans une direction quelconque

Dans c'est cas nous prenons le cas d'un diélectrique parfait (isolant)($\delta=0$) milieu neutre qui veut dire pas d'accumulation ou la densité de charge existe e espace libre ($\rho = 0$).

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.33)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\mu \cdot \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.34)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0 \quad (5.35)$$

$$-\Delta \vec{E} = -\mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.36)$$

Donc on aura

$$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (5.37)$$

Avec la même démonstration pour le champ magnétique on trouve.

Dans le vrai vide, le champ magnétique vérifie l'équation d'ALEMBERT, soit :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (5.38)$$

5-7- Vitesse et longueur d'onde

D'après l'équation différentielle régissant \vec{E} et \vec{H} nous déduisons que $\mu\epsilon = 1/c^2$

C étant la vitesse de propagation.

Dans le vide,

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Préparé par: Mme KARA MOSTEFA KHELIL. C

Théorie de Champ
Troisième License Electrotechnique Industrielle

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} = 8,8 \cdot 10^{-12} F/m$$
$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$$

Si on écrit $\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot c^2 = 1$, alors $c \approx 3 \cdot 10^8 m/s$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ équation de propagation dans le vide.}$$

Pour un problème monodimensionnel :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Si on cherche une solution de la forme $f(t + \alpha \cdot x/c)$. On aura alors une onde qui se propage à la vitesse c/α . Il vient : $\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 - \frac{1}{c^2} = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 1$

$$\text{Donc } \vec{E}(x, t) = f_1\left(t + \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (5.39)$$

Ou

C : vitesse de propagation des ondes électromagnétiques.

Dans le cas particulier des ondes électromagnétiques sinusoïdales a pulsation ω , on peut simplifier :

$$X(x, t) = X \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \cdot x\right) \quad (5.40)$$

LHI : Linéaire Homogène Isotrope.

$$\Delta \vec{E} - \mu\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Posons : $\mu \cdot \varepsilon \cdot u^2 = 1$ ou u est la vitesse de propagation. On définit $n = \frac{c}{u}$ (indice de réfraction), alors : $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon}$ car très souvent $\mu_r = 1$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$X(x, t) = X \cdot \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \quad (5.41)$$

5-8- Propagation de l'énergie électromagnétique

En régime indépendant du temps l'énergie renfermer dans un élément de volume dV , soumis a \vec{E} et \vec{B} se composent :

- Energie diélectrique

$$dW_e = \frac{\varepsilon}{2} E^2 dV \quad (5.42)$$

- Energie magnétique

Préparé par: Mme KARA MOSTEFA KHELIL. C

Théorie de Champ
Troisième License Electrotechnique Industrielle

$$dW_m = \frac{\mu}{2} B^2 dV \quad (5.43)$$

- Energie totale

$$dW = dW_e + dW_m = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2} dV \quad (5.44)$$

En régime dépendant du temps la formule reste valable mais instantanément. En remplaçant, \vec{E} et \vec{B} par leurs expressions en fonction du temps.

$$dW = \left[\frac{\varepsilon E_0^2}{2} \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right) + \frac{\mu E_0^2}{2\mu^2 v^2} \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right) \right] dV = \frac{E_0^2}{2} \cos^2 \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \left[\varepsilon + \left(\frac{1}{\mu v^2} \right) \right] dV \quad (5.45)$$

Pour $\varepsilon \mu v^2 = 1 \Rightarrow \mu v^2 = \frac{1}{\varepsilon}$

L'équation devient :

$$dW = \varepsilon E_0^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) dV \quad (5.46)$$

5-9- Ondes guidées

Nous rechercherons s'il est effectivement possible de faire propager, à l'intérieur du guide et le long de l'axe $z'z$, une onde monochromatique de pulsation ω . Pour déterminer quelles seraient alors les configurations possibles du champ électromagnétique, il faut passer par la résolution des équations de Maxwell, en tenant compte des conditions aux limites imposées au champ sur les faces internes du guide. Pour ce faire, chacune des composantes du champ sera écrite sous la forme générique :

$$\psi(x, y, z, t) = F(x, y) e^{j(\omega t - k_z z)} \quad (5.47)$$

Ou k_z est a priori un nombre réel, positif puisque l'onde doit être progressive. Ainsi, dans les équations, la dérivation temporelle devient une multiplication par $j\omega$, tandis que celle par rapport à z équivaut à une multiplication par $-jk_z$.

Tout d'abord, les composantes des champs électrique et magnétique E_z et B_z respectivement doivent être déterminé à partir de l'équation suivante :

$$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (5.48) \quad \text{on tire}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -j\omega B_x - jk_z E_y, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = j\omega B_y - jk_z E_x \quad (5.49)$$

Tandis que l'équation $\overrightarrow{rot} \vec{B} = j \frac{\omega}{c^2} \vec{E}$ conduit a

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = j \frac{\omega}{c^2} E_x - jk_z B_y, \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -j \frac{\omega}{c^2} E_y - jk_z B_x \quad (5.50)$$

Dans le cas ou $k_z^2 \neq \omega^2 / c^2$, ces relations permettent d'exprimer les composantes "transversales" des champs en fonction des dérivées partielles de leurs composantes

“longitudinales”.

Explicite-

ment, on obtient, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} E_y \\ B_x \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega^2 - k_z^2} \begin{pmatrix} -jk_z & j\omega \\ -j\frac{\omega}{c^2} & -jk_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ B_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega^2 - k_z^2} \begin{pmatrix} -jk_z & -j\omega \\ -j\frac{\omega}{c^2} & -jk_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

les composantes E_z et B_z satisfaisant par ailleurs une équation de propagation

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_z, \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) B_z \quad (5.52)$$

Sous la condition précitée, le champ électromagnétique est nul si les composantes E_z et B_z sont

simultanément nulles. On est alors conduit à classer les configurations de champ en deux groupes :

- le premier, noté (TM) est celui des ondes dites transverses magnétiques pour lesquelles $B_z = 0$, $E_z \neq 0$;
- le second, noté (TE) est celui des ondes dites transverses électriques pour lesquelles $E_z = 0$, $B_z \neq 0$.
- Un troisième groupe correspond au cas particulier pour lequel $E_z = 0$ et $B_z = 0$. Il s'agit d'ondes TEM, c'est-à-dire, à la fois transverses électriques et transverses magnétiques. Un tel champ non nul ne pourrait exister que si $kz = \omega/c$. En fait, comme nous le montrons dans le complément, ce type d'ondes ne peut pas se propager à l'intérieur de guides d'ondes creux.

5-10- Spectre du rayonnement électromagnétique

Le spectre électromagnétique est la décomposition du rayonnement électromagnétique selon ses différentes composantes en termes de fréquence (ou période), d'énergie des photons ou encore de longueur d'onde associée, les quatre grandeurs ν (fréquence), p (période), E (énergie) et λ (longueur d'onde) étant liées deux à deux par :

- la constante de Planck h (approximative a. $6,626069 \times 10^{-34}$ J·s $\approx 4,13567$ meV/Hz)
- et la vitesse de la lumière c (exactement 299 792 458 m/s),

Selon les formules :

- $E = h\nu = h/p$ pour l'énergie transportée par le photon,

Théorie de Champ

Troisième License Electrotechnique Industrielle

- $c = \lambda v = \lambda/p$ pour le déplacement dans le vide (relativiste dans tous les référentiels) du photon,

D'où aussi :

- $E = hc/\lambda$.

Les ondes EM couvrent un spectre très large en longueur d'onde et en fréquence. Le tableau suivant donne une portion importante du spectre:

Spectre électromagnétique

Spectre électromagnétique : Radioélectricité · Spectre radiofréquence · Bandes VHF-UHF · Spectre micro-ondes

Fréquence	9 kHz	1 GHz	300 GHz	3 THz	405 THz	480 THz	508 THz	530 THz	577 THz	612 THz	690 THz	750 THz	30 PHz	30 EHz
Longueur d'onde	33 km	30 cm	1 mm	100 μm	745 nm	625 nm	590 nm	565 nm	520 nm	490 nm	435 nm	400 nm	10 nm	10 pm
Bande	ondes radio	micro-ondes	térahertz	infrarouge	rouge	orange	jaune	vert	cyan	bleu	violet	ultraviolet	rayons X	rayons γ
		rayonnements pénétrants			lumière visible							rayonnements ionisants		