

# **Chapitre 6: Méthode spectrale**

Dans le calcul sismique d'une structure modélisée comme un système dynamique à plusieurs ddl , on peut utiliser une méthode approximative appelée ***méthode spectrale***.

Cette méthode beaucoup plus rapide que l'analyse modale, utilise le concept des spectres de réponse sismiques élastiques pour estimer les réponses (déplacements, vitesses, forces internes, etc) maximales de la structure pour un accélérogramme donné à sa base.

On résume ci-dessous les étapes à suivre dans une analyse sismique spectrale.

## Étapes à suivre dans une analyse sismique spectrale

Etape 1 : *Choix des ddl et calcul des matrices de masse et de rigidité.*

- On choisit les **ddl** ; (**déplacements ou rotations**) ;
- On construit les matrices de masse et de rigidité **[M]**, **[K]** ;
- On assigne une fraction d'amortissement critique pour chaque mode **x**.

Etape 2 : *Choix du spectre de réponse sismique.*

Le choix du **spectre de réponse** dépend généralement de **la sismicité** de la région. On peut choisir un spectre d'un séisme **historique** ou un spectre **simplifié de calcul**.

Etape 3 : *Calcul des fréquences naturelles et des modes propres  $\omega_i$ ,  $\{\Phi\}_i$ .*

## Étapes à suivre dans une analyse sismique spectrale

Etape 4 : Calcul des masses généralisées

$$M_i = \{\Phi_i\}^t \cdot [M] \cdot \{\Phi_i\}$$

Etape 5 : Calcul des facteurs de participations modales

$$\alpha_i = \frac{1}{M_i} \{\Phi_i\}^t [M] \{I\}$$

Etape 6 : Calcul des réponses spectrales

On calcule le spectre des déplacements relatifs  $S_D^{(i)}$  pour chaque mode correspondant à  $\omega_i$  et  $\xi_i$ .

Etape 7 : Calcul des réponses modales maximales.

On calcule la réponse maximale de chaque ddl  $i$  dans chaque mode  $j$ .

$$X_{imax} = \{\Phi_j^i\} \alpha_j S_D^{(j)}$$

## Étapes à suivre dans une analyse sismique spectrale

**Etape 8** : *Estimation des réponses maximales par combinaison statistique des réponses modales maximales.*

On combine les **réponses modales maximales** à l'une des **méthodes statistiques** (**CQC**, **DSC**, Combinaison **Humar**, combinaison de **Gupta**, **SRSS**)

Souvent, en **pratique** on choisit la méthode **SRSS** pour sa **simplicité**.

$$X_{i \max} = |X_i(t)|_{\max} \approx \sqrt{|X_i^1|_{\max}^2 + |X_i^2|_{\max}^2 + \dots + |X_i^{Nm}|_{\max}^2}$$

**SRSS** : Square of sum of squares. « Combinaison de la racine carrée de la somme des carrés ».

**CQC** : Complete quadratic combination. « Combinaison quadratique complète ».

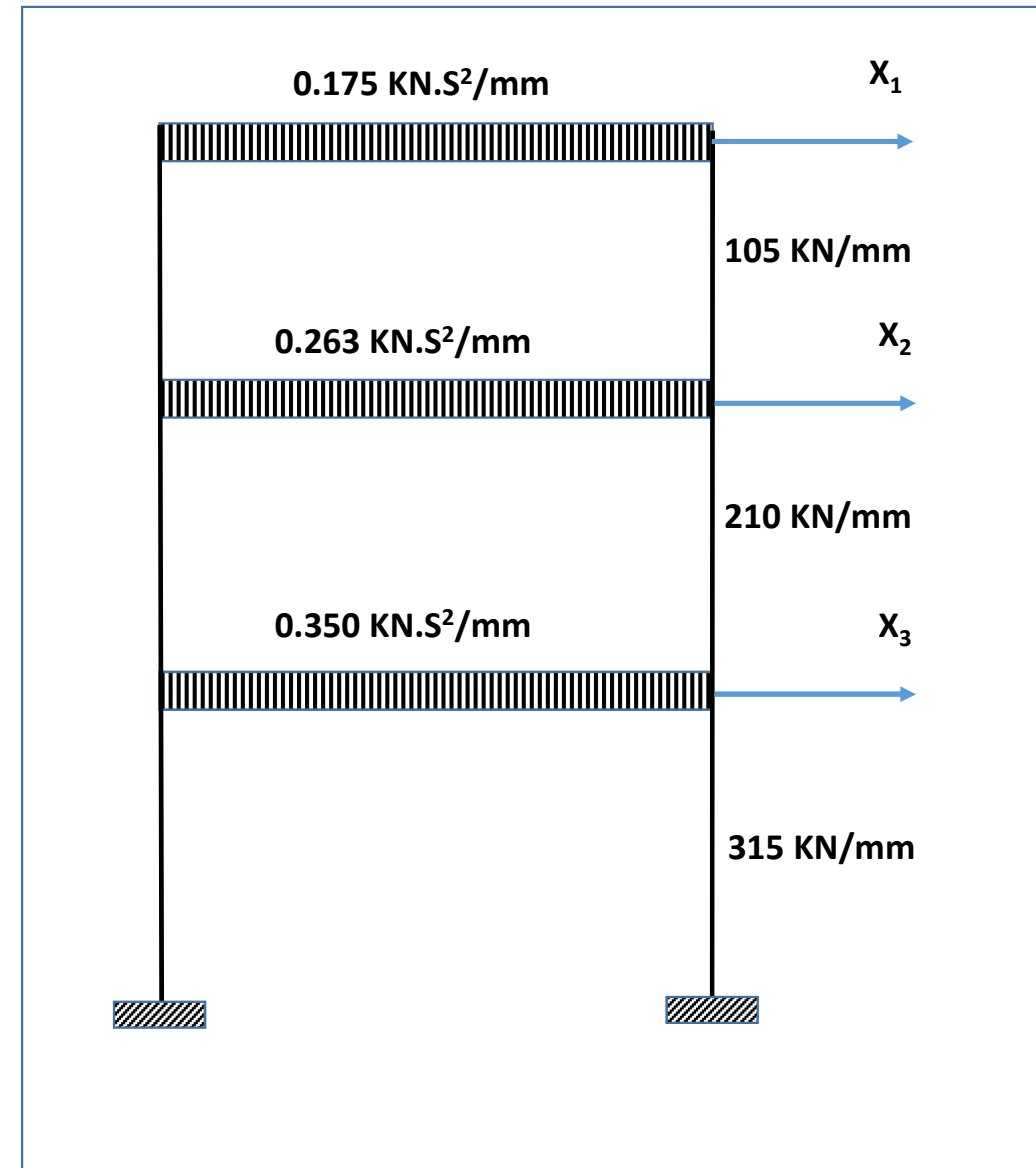
**DSC** : Double sum combination. « Combinaison de la double somme ».

## Exercice d'application:

On considère la structure citée ci-dessous est soumise au séisme d'El Centro (1940).

Donner le cisaillement maximum probable à la base en utilisant la combinaison SRSS.

**NB:** on suppose un amortissement critique de 2% dans chaque mode de vibration.

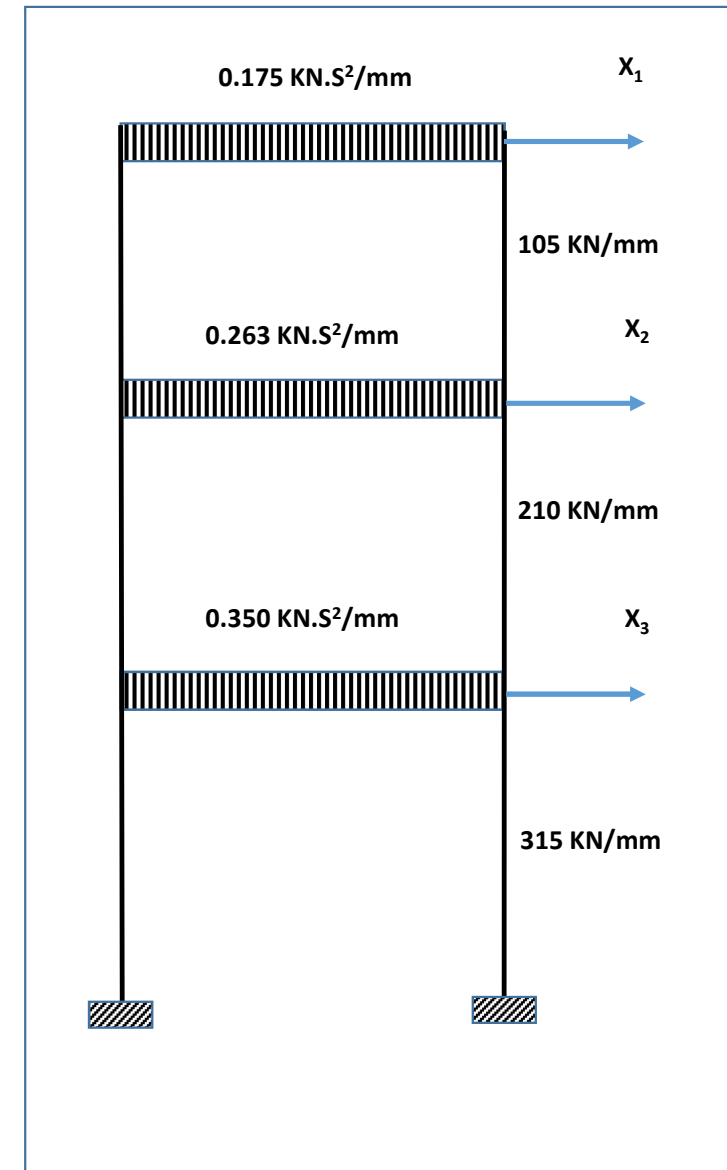
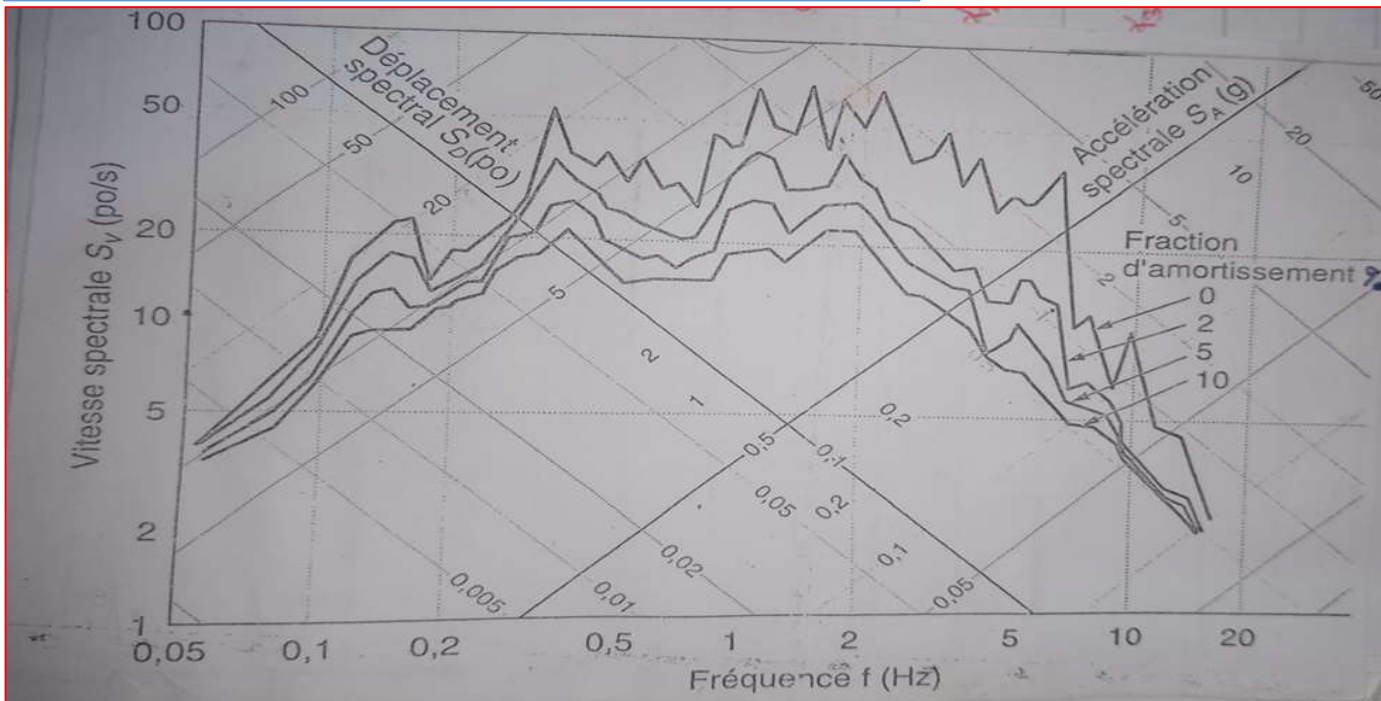


## 1. Matrices de masse et de rigidité

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.350 \end{bmatrix} \text{KN.S}^2/\text{mm}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot 105 \text{ KN/mm}$$

## 2. Spectre de réponse du séisme d'El Centro



### 3. $\omega_i, \{\Phi\}_i$ .

Selon les deux équations :

$$|K - \omega_i^2 \cdot M| = 0$$

$$|K - \omega_i^2 \cdot M| \{\varphi_i\} = \{0\}$$

Après la résolution des deux équations précédentes on trouve ce qui suit :

$$\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.5 \\ 31.1 \\ 46.1 \end{Bmatrix} rad/sec ; \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0.644 \\ 0.300 \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -0.601 \\ -0.676 \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} \varphi_{31} \\ \varphi_{32} \\ \varphi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -2.570 \\ 2.470 \end{Bmatrix}$$

#### 4. Calcul des masses généralisées

$$\mathbf{M}_1 = \{1.00; 0.644; 0.300\} \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.350 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0.644 \\ 0.300 \end{Bmatrix} = \mathbf{0.315 \text{ KN.S}^2/\text{mm}}$$

$$\mathbf{M}_2 = \{1.00; -0.601; -0.676\} \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.350 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -0.601 \\ -0.676 \end{Bmatrix} = \mathbf{0.430 \text{ KN.S}^2/\text{mm}}$$

$$\mathbf{M}_3 = \{1.00; -2.570; 2.470\} \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.350 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -2.570 \\ 2.470 \end{Bmatrix} = \mathbf{4.407 \text{ KN.S}^2/\text{mm}}$$

## 5. Les facteurs de participation modale

$$\alpha_1 = \frac{1}{0.315} \{1.00; 0.644; 0.300\} \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.350 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{1.425}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{0.430} \{1.00; -0.601; -0.676\} \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.350 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{-0.511}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{4.407} \{1.00; -2.570; 2.470\} \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.350 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{0.090}$$

6. Selon le spectre de réponse et pour un amortissement critique de 2% on tire pour chaque mode les fréquences et on calcul les déplacements correspondants :

1<sup>er</sup> mode :  $f_1 = 2.308 \text{ HZ}$

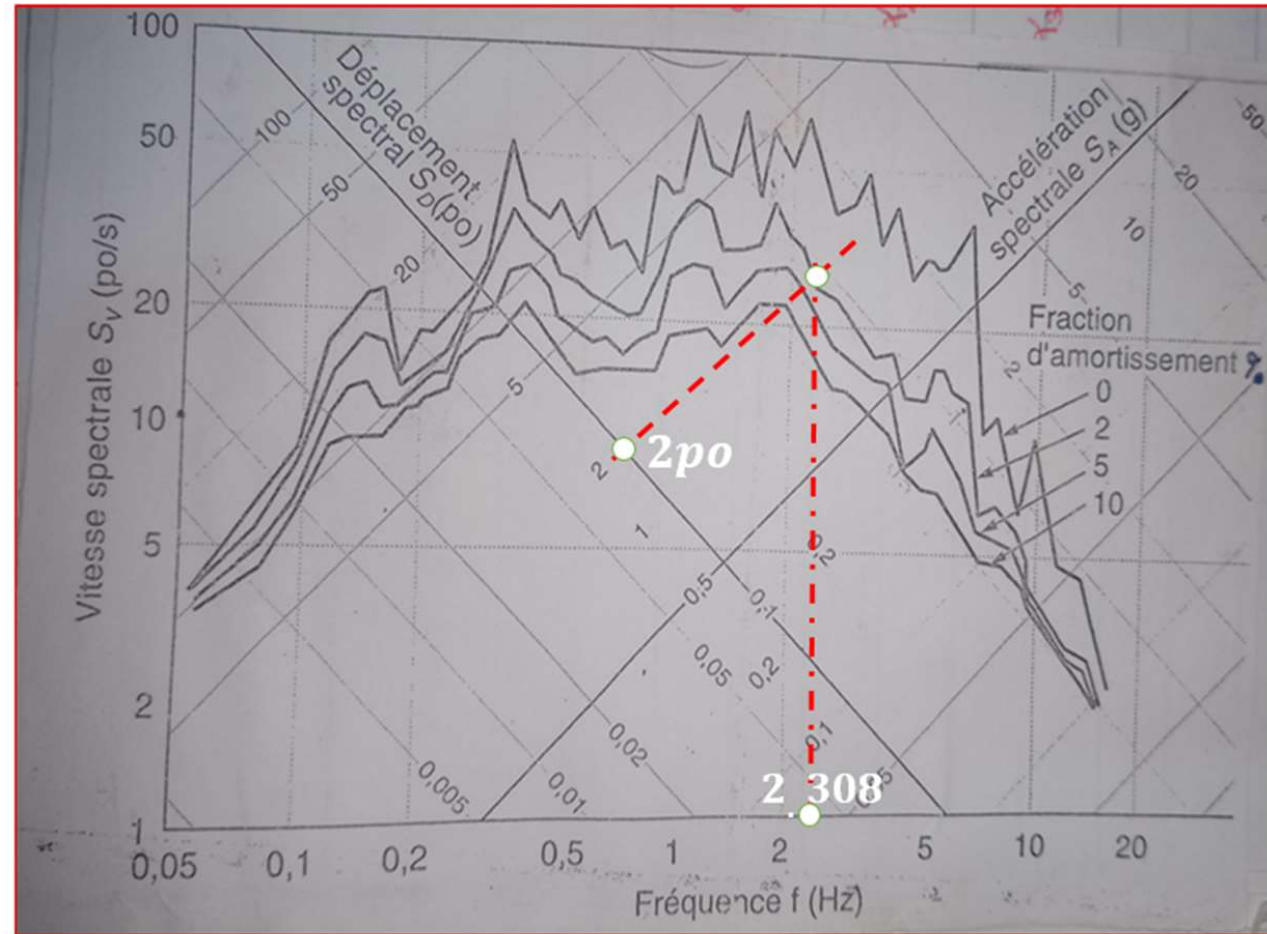
$$\Rightarrow s_D^{(1)} = 2po = 25.5 \times 2 = 50.8 \text{ mm}$$

2<sup>eme</sup> mode :  $f_2 = 4.950 \text{ HZ}$

$$\Rightarrow s_D^{(2)} = 0.46po = 25.5 \times 0.46 = 11.7 \text{ mm}$$

3<sup>eme</sup> mode :  $f_3 = 0.200 \text{ HZ}$

$$\Rightarrow s_D^{(3)} = 0.2po = 25.5 \times 2 = 5.1 \text{ mm}$$



## 7. Les réponses modales maximales dans chaque mode pour chaque ddl

1er mode

$$\begin{Bmatrix} X_{1\max}^1 \\ X_{2\max}^1 \\ X_{3\max}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0.644 \\ 0.300 \end{Bmatrix} \cdot (\mathbf{1.425}) \cdot (50.8) = \begin{Bmatrix} 72.4 \\ 46.6 \\ 21.7 \end{Bmatrix} mm$$

2eme mode

$$\begin{Bmatrix} X_{1\max}^2 \\ X_{2\max}^2 \\ X_{3\max}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1,000} \\ -\mathbf{0.601} \\ -\mathbf{0.676} \end{Bmatrix} \cdot (-\mathbf{0.511}) \cdot (11.7) = \begin{Bmatrix} -6.00 \\ 3.60 \\ 4.00 \end{Bmatrix} mm$$

3eme mode

$$\begin{Bmatrix} X_{1\max}^3 \\ X_{2\max}^3 \\ X_{3\max}^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1,000} \\ -\mathbf{2.570} \\ \mathbf{2.470} \end{Bmatrix} \cdot (\mathbf{0.090}) \cdot (5.1) = \begin{Bmatrix} 0.50 \\ -1.20 \\ 1.10 \end{Bmatrix} mm$$

## 8. Les forces sismiques équivalentes maximales pour chaque mode

$$\{Q^{(i)}\}_{\max} = [K]\{X^{(i)}\}_{\max}$$

### 1<sup>er</sup> mode

$$\begin{Bmatrix} Q_{1 \max}^{(1)} \\ Q_{2 \max}^{(1)} \\ Q_{3 \max}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{105} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{72.4} \\ \mathbf{46.6} \\ \mathbf{21.7} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{2709} \\ \mathbf{2520} \\ \mathbf{1607} \end{Bmatrix} KN$$

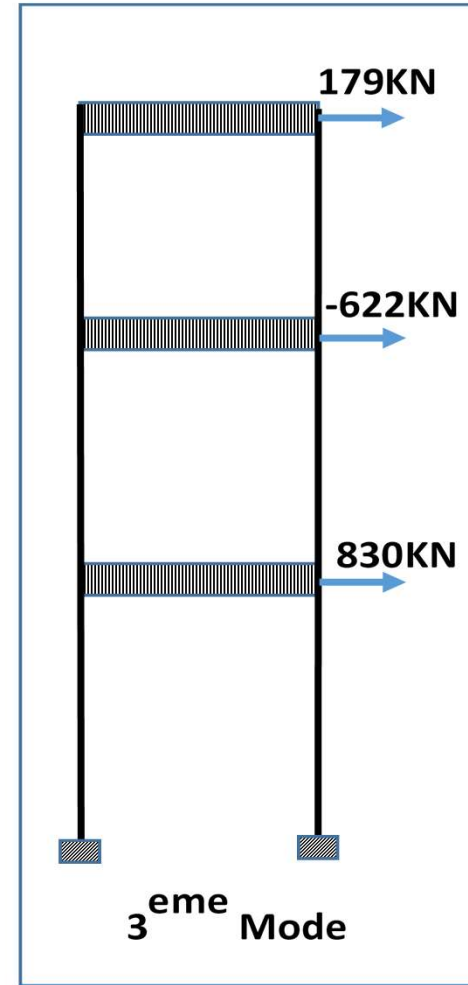
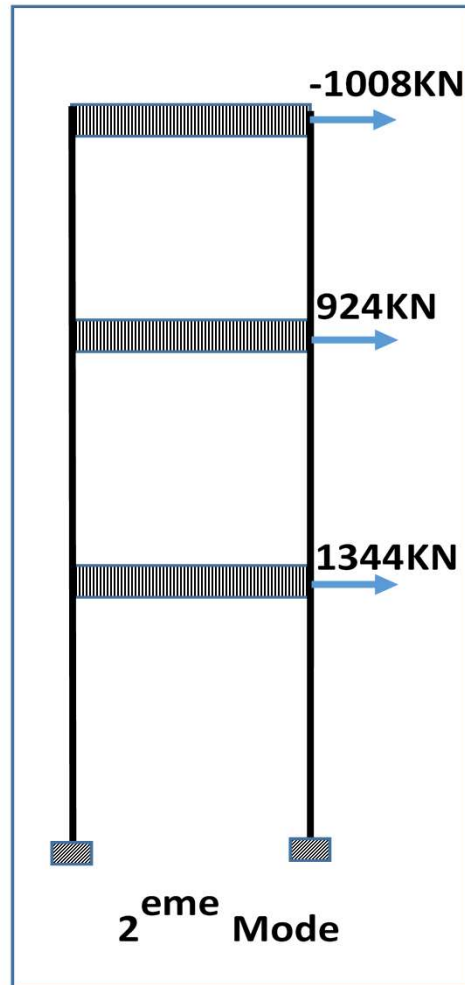
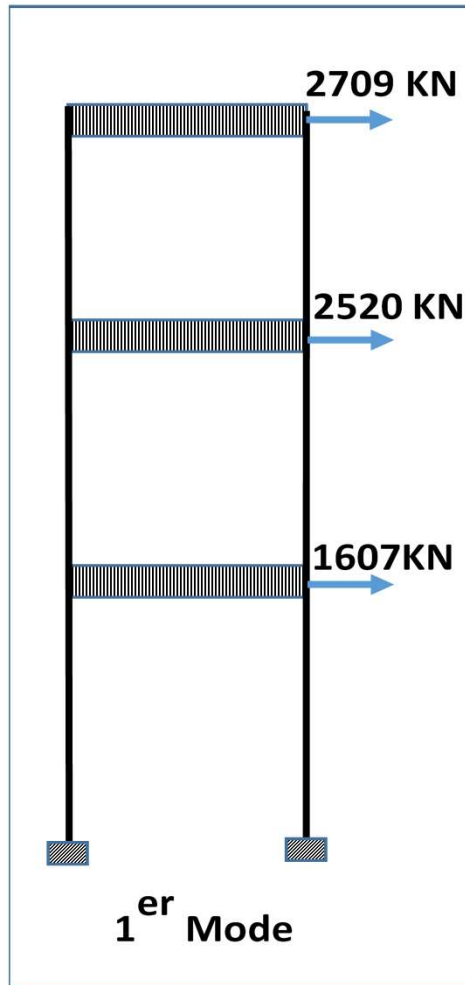
### 2<sup>eme</sup> mode

$$\begin{Bmatrix} Q_{1 \max}^{(2)} \\ Q_{2 \max}^{(2)} \\ Q_{3 \max}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{105} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{-6.00} \\ \mathbf{3.60} \\ \mathbf{4.00} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{-1008} \\ \mathbf{924} \\ \mathbf{1344} \end{Bmatrix} KN$$

### 3<sup>eme</sup> mode

$$\begin{Bmatrix} X_{1 \max}^{(1)} \\ X_{2 \max}^{(1)} \\ X_{3 \max}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{105} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{0.50} \\ \mathbf{-1.20} \\ \mathbf{1.10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{179} \\ \mathbf{-662} \\ \mathbf{830} \end{Bmatrix} KN$$

## 5. Les forces sismiques équivalentes maximales pour chaque mode



9. Le cisaillement maximum est obtenu pour chaque mode en additionnant algébriquement les forces sismiques maximales.

1<sup>er</sup> mode

$$V_{max}^{(1)} = 2709 + 2520 + 1607 = 6836 \text{ KN}$$

2<sup>eme</sup> mode

$$V_{max}^{(2)} = -1008 + 924 + 1344 = 1260 \text{ KN}$$

3<sup>eme</sup> mode

$$V_{max}^{(3)} = 179 - 622 + 830 = 347 \text{ KN}$$

10. Estimation du cisaillement maximum à la base

La combinaison des cisaillements modaux par la méthode SRSS nous donne :

$$|V_{base}|_{max} = \sqrt{|6836|^2 + |1260|^2 + |347|^2}$$

$$|V_{base}|_{max} = 6960 \text{ KN}$$