

Chapitre 6: Méthode d'analyse modale

L'analyse modale (ou la méthode des modes normaux), représente un outil puissant dans l'analyse de toute structure linéaire avec masse concentrée soumise à un chargement dynamique quelconque représenté par un ensemble de charges dynamiques ou par un accélérogramme à sa base.

On résume ci-dessous les étapes à suivre dans une analyse sismique spectrale.

Étapes à suivre dans une analyse sismique spectrale

Etape 1 : *Choix des ddl et calcul des matrices de masse et de rigidité.*

- On choisit les **ddl** ; (**déplacements ou rotations**) ;
- On construit les matrices de masse et de rigidité **[M]**, **[K]** ;
- On assigne une fraction d'amortissement critique pour chaque mode **x**.

Etape 2 : *Calcul des valeurs et des vecteurs propres*

$$\left[[K] - \omega_i^2 [M] \right] \{ \varphi_i \} = \{ 0 \}$$

Etape 3 : *Calcul des fréquences naturelles et des modes propres ω_i , $\{ \Phi \}_i$.*

Etape 3 : Calcul des masses et des charges dynamiques généralisées

On calcul la masse généralisée M_i et la charge dynamique généralisée P_i

Pour chaque mode i .

$$M_i = \{\Phi_i\}^t \cdot [M] \cdot \{\Phi_i\}$$

$$P_i = \{\Phi_i\}^t \cdot \{F(t)\}$$

Dans le cas d'un calcul sismique :

$$P_i(t) = \{\Phi_i\}^t \cdot [M] \{r\} \cdot \ddot{x}_s(t)$$

Etape 4: Calcul des conditions initiales (si nécessaire)

Si la structure n'est pas préalablement en repos, on effectue le calcul des conditions initiales:

$$U_{i0} = \frac{\{\varphi_i\}^t [M] \{x_0\}}{\{\varphi_i\}^t [M] \{\varphi_i\}} = \frac{\{\varphi_i\}^t [M] \{x_0\}}{M_i}$$
$$\dot{U}_{i0} = \frac{\{\varphi_i\}^t [M] \{\dot{x}_0\}}{\{\varphi_i\}^t [M] \{\varphi_i\}} = \frac{\{\varphi_i\}^t [M] \{\dot{x}_0\}}{M_i}$$

Etape 5: Calcul des réponses modales

La réponse dans chaque mode est la suivante:

$$U_i(t) = e^{-\xi_i \cdot \omega_i \cdot t} \left[\frac{\dot{U}_{i0} + \xi_i \cdot \omega_i \cdot U_{i0}}{\omega_{di}} \sin \omega_{di} t + U_{i0} \cos \omega_{di} t \right] + \frac{1}{M_i \cdot \omega_{di}} \int_0^t P_i(\tau) \cdot e^{-\xi_i \cdot \omega_i \cdot (t-\tau)} \cdot \sin \omega_{di} (t - \tau) d\tau$$

Dans le cas d'un calcul sismique:

$$U_i(t) = \frac{-\alpha_i}{\omega_{di}} S^i(t)$$

Dans le cas d'un calcul sismique:

$$\alpha_i = \frac{\{\varphi_i\}^t [M] \{I\}}{M_i}$$

$$s^i(t) = \int_0^t \ddot{x}_i(\tau) \cdot e^{-\xi_i \cdot \omega_i \cdot (t-\tau)} \cdot \sin \omega_{di}(t - \tau) d\tau$$

Etape 6: calcul des réponses dans les conditions réelles.

On superpose les réponses modales pour obtenir la réponse de chaque ddl.

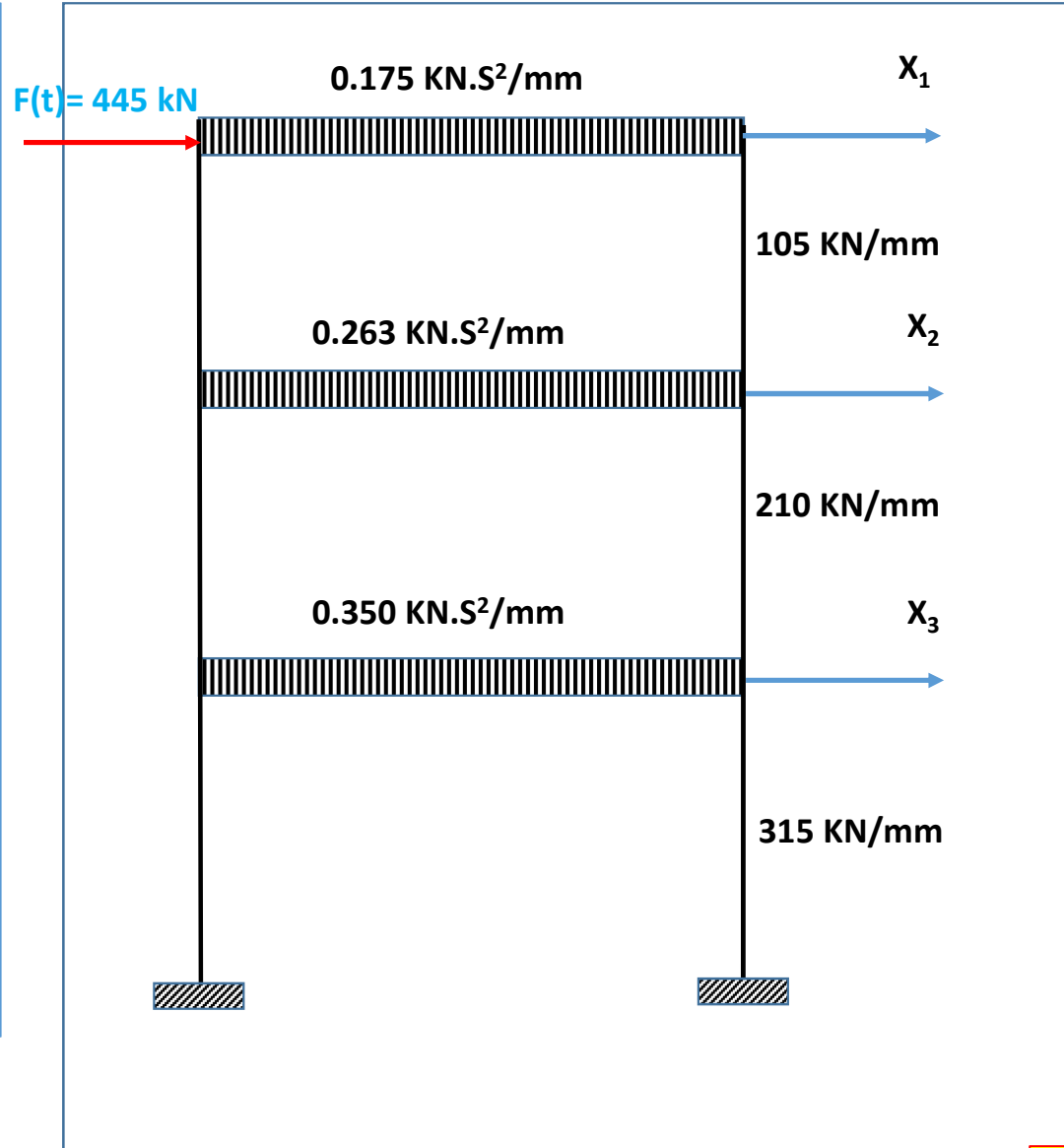
$$X_i(t) = [A] \left\{ U(t) = \sum_{j=1}^{Nm} \varphi_i^{(j)} \cdot U_j(t) \right\}$$

Dans le cas du calcul sismique on estime un ensemble de charges statiques équivalentes $\{Q(t)\}$.

On peut ainsi calculer les forces internes (Cisaillement, moment, etc.) à partir de ces forces sismiques équivalentes comme dans une analyse statique.

Exercice d'application:

Pour comprendre la procédure de l'analyse modale, on considère une structure à trois niveaux modélisée en un système à trois ddl. On demande de calculer les déplacements de chaque étage causés par un chargement constant appliqué au dernier niveau (voir figure suivante) sans prendre en compte de l'amortissement.



1. Matrices de masse et de rigidité

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.350 \end{bmatrix} \text{KN} \cdot \text{S}^2 / \text{mm}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot 105 \text{ KN/mm}$$

2. Fréquences naturelles et mode de vibration

Selon les deux équations :

$$|K - \omega_i^2 \cdot M| = 0$$

$$|K - \omega_i^2 \cdot M| \{\varphi_i\} = \{0\}$$

Après la résolution des deux équations précédentes on trouve ce qui suit :

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.5 \\ 31.1 \\ 46.1 \end{pmatrix} \text{rad/sec} ; \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 0.644 \\ 0.300 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,000 \\ -0.601 \\ -0.676 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \varphi_{31} \\ \varphi_{32} \\ \varphi_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,000 \\ -2.570 \\ 2.470 \end{pmatrix}$$

3. Calcul des masses et charges généralisées

$$\mathbf{M}_1 = \{1.00; 0.644; 0.300\} \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.350 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0.644 \\ 0.300 \end{Bmatrix} = \mathbf{0.315 \text{ KN.S}^2/\text{mm}}$$

$$\mathbf{M}_2 = \{1.00; -0.601; -0.676\} \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.350 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -0.601 \\ -0.676 \end{Bmatrix} = \mathbf{0.430 \text{ KN.S}^2/\text{mm}}$$

$$\mathbf{M}_3 = \{1.00; -2.570; 2.470\} \begin{bmatrix} 0.175 & 0 & 0 \\ 0 & 0.263 & 0 \\ 0 & 0 & 0.350 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,000 \\ -2.570 \\ 2.470 \end{Bmatrix} = \mathbf{4.407 \text{ KN.S}^2/\text{mm}}$$

3. Calcul des masses et charges généralisées

$$\mathbf{P}_1 = \{1.00; 0.644; 0.300\} \begin{Bmatrix} 445 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 445 \text{ kN}$$

$$\mathbf{P}_2 = \{1.00; -0.601; -0.676\} \begin{Bmatrix} 445 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 445 \text{ kN}$$

$$\mathbf{P}_3 = \{1.00; -2.570; 2.470\} \begin{Bmatrix} 445 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 445 \text{ kN}$$

4. Les conditions initiales sont nulles puisque le système est initialement au repos

5. La réponse d'un système à un ddl soumis à une charge constante pour chaque mode est donné comme suit:

$$U_i(t) = \frac{P_i}{M_i \cdot \omega_i^2} (1 - \cos \omega_i(t))$$

Donc:

$$U_1(t) = \frac{445}{0.315 \cdot 14.5^2} (1 - \cos 14.5t) = 6.719 (1 - \cos \omega_i(t)) \text{ mm}$$

$$U_2(t) = \frac{445}{0.430 \cdot 31.1^2} (1 - \cos 31.1t) = 1.07 (1 - \cos \omega_i(t)) \text{ mm}$$

$$U_3(t) = \frac{445}{4.047 \cdot 46.1^2} (1 - \cos 46.1t) = 0.052 (1 - \cos \omega_i(t)) \text{ mm}$$

6. Calcul la réponse de chaque ddl par la superposition des réponses modales

$$U_i(t) = \frac{P_i}{M_i \cdot \omega_i^2} (1 - \cos \omega_i(t))$$

Donc:

$$\begin{cases} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.644 & -0.601 & -2.57 \\ 0.300 & -0.676 & 2.470 \end{bmatrix} \begin{cases} 6.719(1 - \cos \omega_i(t)) \text{ mm} \\ 1.07(1 - \cos \omega_i(t)) \text{ mm} \\ 0.052(1 - \cos \omega_i(t)) \text{ mm} \end{cases}$$

6. Selon le spectre de réponse et pour un amortissement critique de 2% on tire pour chaque mode les fréquences et on calcul les déplacements correspondants :

1^{er} mode : $f_1 = 2.308 \text{ HZ}$

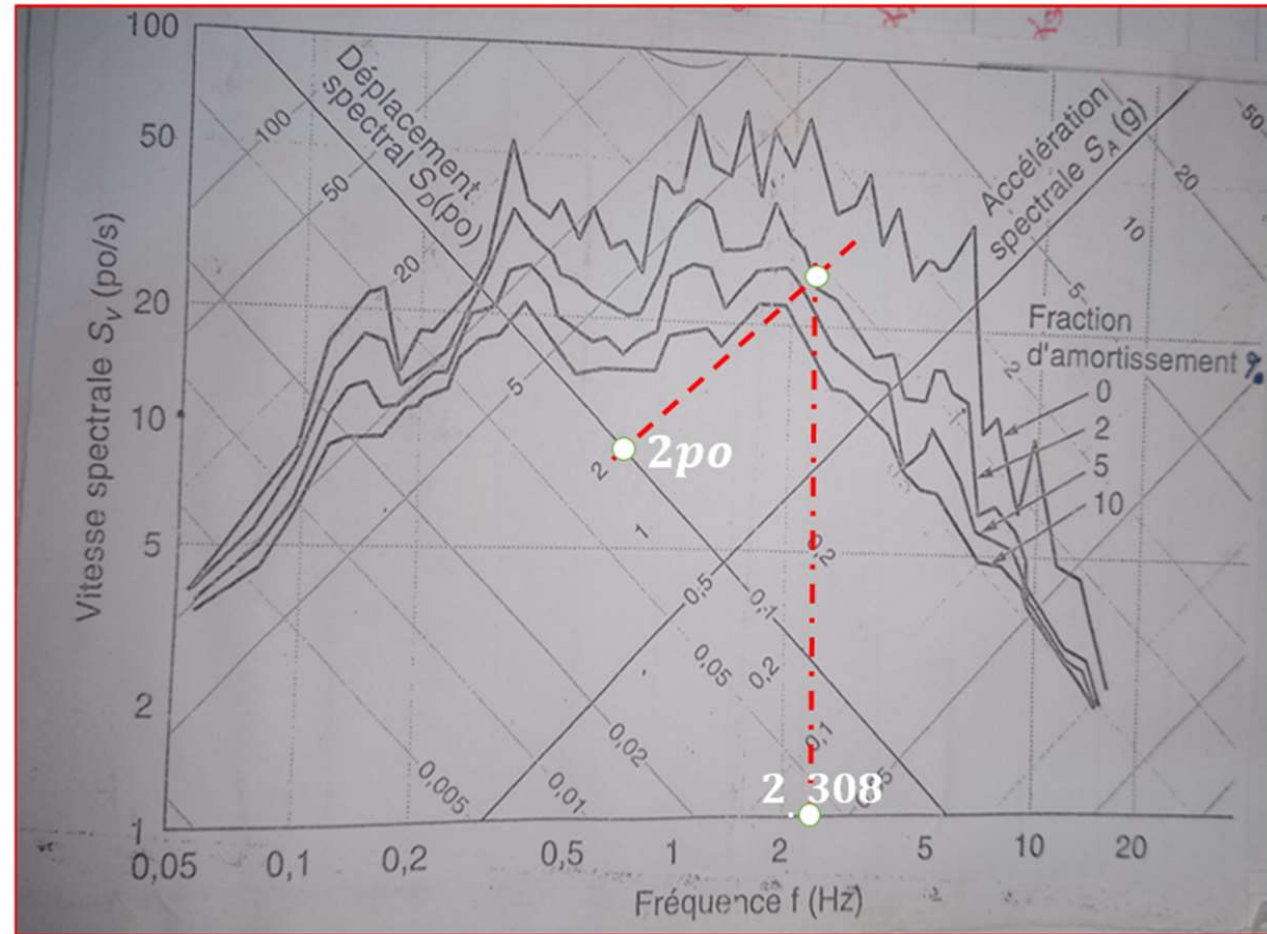
$$\Rightarrow S_D^{(1)} = 2po = 25.5 \times 2 = 50.8 \text{ mm}$$

2^{eme} mode : $f_2 = 4.950 \text{ HZ}$

$$\Rightarrow S_D^{(2)} = 0.46po = 25.5 \times 0.46 = 11.7 \text{ mm}$$

3^{eme} mode : $f_3 = 0.200 \text{ HZ}$

$$\Rightarrow S_D^{(3)} = 0.2po = 25.5 \times 2 = 5.1 \text{ mm}$$



7. Les réponses modales maximales dans chaque mode pour chaque ddl

1er mode

$$\begin{Bmatrix} X_{1\max}^1 \\ X_{2\max}^1 \\ X_{3\max}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0.644 \\ 0.300 \end{Bmatrix} \cdot (\mathbf{1.425}) \cdot (50.8) = \begin{Bmatrix} 72.4 \\ 46.6 \\ 21.7 \end{Bmatrix} mm$$

2eme mode

$$\begin{Bmatrix} X_{1\max}^2 \\ X_{2\max}^2 \\ X_{3\max}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1,000} \\ -\mathbf{0.601} \\ -\mathbf{0.676} \end{Bmatrix} \cdot (-\mathbf{0.511}) \cdot (11.7) = \begin{Bmatrix} -6.00 \\ 3.60 \\ 4.00 \end{Bmatrix} mm$$

3eme mode

$$\begin{Bmatrix} X_{1\max}^3 \\ X_{2\max}^3 \\ X_{3\max}^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{1,000} \\ -\mathbf{2.570} \\ \mathbf{2.470} \end{Bmatrix} \cdot (\mathbf{0.090}) \cdot (5.1) = \begin{Bmatrix} 0.50 \\ -1.20 \\ 1.10 \end{Bmatrix} mm$$

8. Les forces sismiques équivalentes maximales pour chaque mode

$$\{Q^{(i)}\}_{\max} = [K]\{X^{(i)}\}_{\max}$$

1^{er} mode

$$\begin{Bmatrix} Q_{1 \max}^{(1)} \\ Q_{2 \max}^{(1)} \\ Q_{3 \max}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{105} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{72.4} \\ \mathbf{46.6} \\ \mathbf{21.7} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{2709} \\ \mathbf{2520} \\ \mathbf{1607} \end{Bmatrix} KN$$

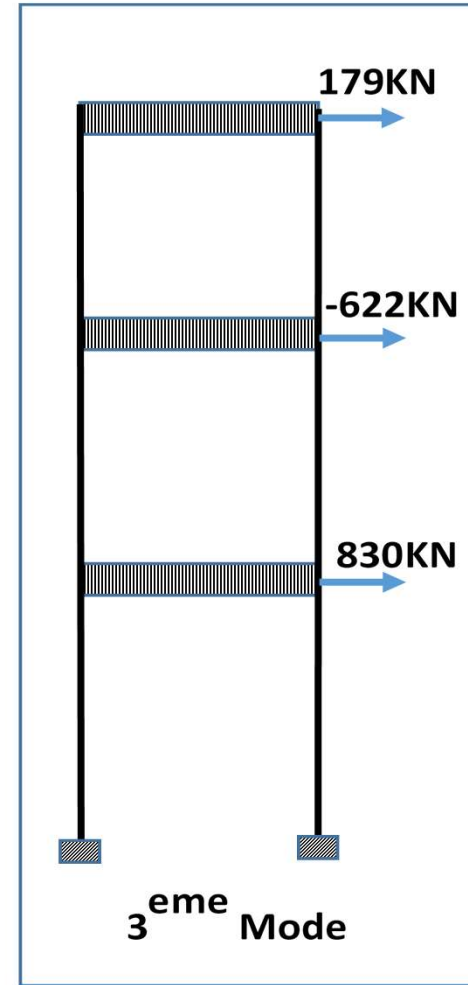
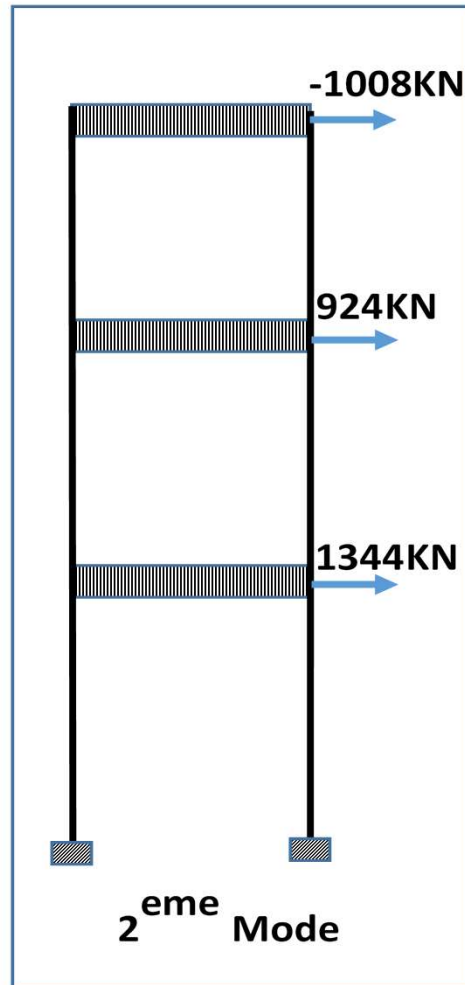
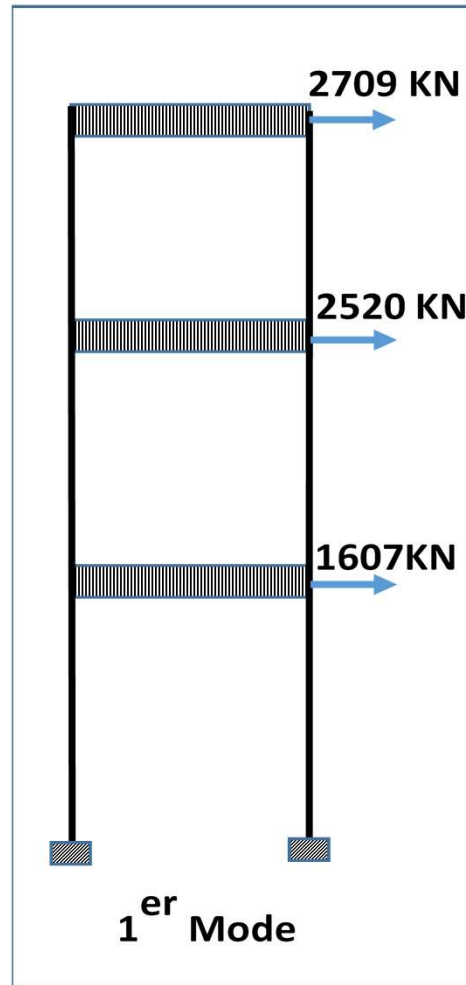
2^{eme} mode

$$\begin{Bmatrix} Q_{1 \max}^{(2)} \\ Q_{2 \max}^{(2)} \\ Q_{3 \max}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{105} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{-6.00} \\ \mathbf{3.60} \\ \mathbf{4.00} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{-1008} \\ \mathbf{924} \\ \mathbf{1344} \end{Bmatrix} KN$$

3^{eme} mode

$$\begin{Bmatrix} X_{1 \max}^{(1)} \\ X_{2 \max}^{(1)} \\ X_{3 \max}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{105} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{0.50} \\ \mathbf{-1.20} \\ \mathbf{1.10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{179} \\ \mathbf{-662} \\ \mathbf{830} \end{Bmatrix} KN$$

5. Les forces sismiques équivalentes maximales pour chaque mode



9. Le cisaillement maximum est obtenu pour chaque mode en additionnant algébriquement les forces sismiques maximales.

1^{er} mode

$$V_{max}^{(1)} = 2709 + 2520 + 1607 = 6836 \text{ KN}$$

2^{eme} mode

$$V_{max}^{(2)} = -1008 + 924 + 1344 = 1260 \text{ KN}$$

3^{eme} mode

$$V_{max}^{(3)} = 179 - 622 + 830 = 347 \text{ KN}$$

10. Estimation du cisaillement maximum à la base

La combinaison des cisaillements modaux par la méthode SRSS nous donne :

$$|V_{base}|_{max} = \sqrt{|6836|^2 + |1260|^2 + |347|^2}$$

$$|V_{base}|_{max} = 6960 \text{ KN}$$