

### 8.1. Introduction

- ✓ En général, Les plaques peuvent être divisées en *trois groupes* :

Plaques minces à petites déformations,

Plaques minces à grandes déformations

Plaques épaisses

- ✓ En principe le critère utilisé pour déterminer une plaque mince est *le rapport* entre l'*épaisseur* et la *plus petite dimension transversale*. Une plaque est considérée comme *mince*, si ce *rapport ne doit pas dépasser 1/20*.
- ✓ Dans ce cours on s'intéresse que par *les plaques minces à petites déformations*.

### 8.2. Hypothèse des plaques minces

*La théorie des plaques minces* permet de calculer les *déformations et les contraintes* dans une plaque soumise à *des charges*, elle s'inspire de *la théorie des poutres*.

Pour mieux comprendre les hypothèses de **Kirchhof**, on considère une plaque *non chargée* dont le *plan*  $(x, y)$  coïncide avec le plan moyen et donc l'ordonnée  $z$  est égale à zéro, (figure 8.2a). Suivant les directions  $x, y$  et  $z$ , les composantes du vecteur déplacement en un point donné, sont  $u, v$  et  $w$ , respectivement. Si on applique une charge latérale sur la plaque, la surface médiane à un point  $A(x_a, y_a)$  se déplace de  $w$  (figure 8.2b).

## CHAPITRE 8 : ÉTUDE DES PLAQUES MINCES

### 8.2. Hypothèse des plaques minces

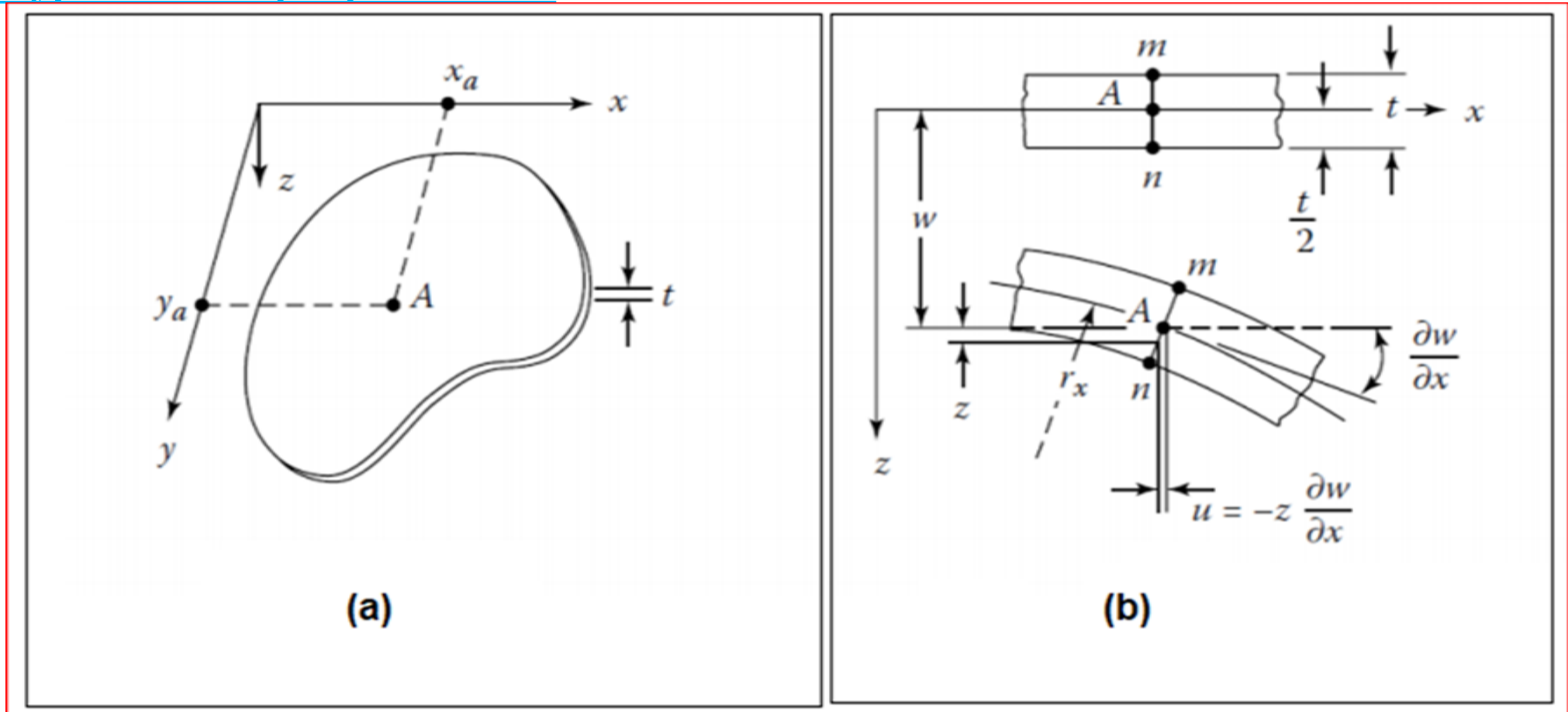


Figure 8.2 : Plaque avant et après déformation

### 8.2. Hypothèse des plaques minces

Les différentes hypothèses de la théorie de flexion avec *petites déformations* des plaques *minces* utilisées sont les suivantes :

- *Aucune déformation* ne se produit dans le plan moyen de la plaque;

$$(u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0)$$

- La contrainte normale  $\sigma_z$  est *négligeable* devant les autres *composantes*;
- Une *normale au plan moyen* avant déformation *reste normale au plan* après déformation,

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

- L'effet de l'inertie de rotation est *négligeable*.

### 8.2. État de déformation des plaques

✓ Selon les hypothèses citées précédemment, et pour mieux comprendre le phénomène des flexions des plaques minces ; les relations déformation-déplacement peuvent s'écrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (8.1)$$

✓ Ainsi que, les déformations  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$  sont nulles, ce qui nous va permettre d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x, y) = 0 \\ u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right. \quad (8.2)$$

### 8.3. État de déformation des plaques

✓ Après remplacement de l'équation (8.2) dans l'équation (8.1), nous allons obtenir ce qui suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = -2 \cdot z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (8.3)$$

### 8.4. État de contraintes

Selon la loi de Hooke généralisée, et pour un état de contraintes tridimensionnelles, les déformations sont données en fonction des contraintes comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{xx})] \\ \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \end{cases} \quad (8.4)$$

## CHAPITRE 8 : ÉTUDE DES PLAQUES MINCES

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}] \\ \sigma_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{G} \end{cases} \quad (8.6)$$

✓ En utilisant, les relations cinématiques, les contraintes peuvent alors s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\frac{EZ}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial w^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial w^2}{\partial y^2} \right] \\ \sigma_{yy} = -\frac{EZ}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial w^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial w^2}{\partial x^2} \right] \\ \sigma_{xy} = -\frac{EZ}{(1+\nu)} \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (8.7)$$

## CHAPITRE 8 : ÉTUDE DES PLAQUES MINCES

✓ Sur la base de ces formules, la répartition des contraintes autour de l'épaisseur de la plaque produisent des moments de flexion et de torsion, ainsi que des forces de cisaillement verticales. Les moments et forces par unité de longueur peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{cases} = \int_{-t/2}^{+t/2} \begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{cases} z dz \quad (8.8)$$

✓ De même :

$$\begin{cases} Q_{xx} \\ Q_{yy} \end{cases} = \int_{-t/2}^{+t/2} \begin{cases} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{cases} dz \quad (8.9)$$

La substitution de l'équation (8.7) dans l'équation (8.8), nous donne les moments de flexion et de torsion en fonction de la flèche :

$$\begin{cases} M_{xx} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_{yy} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (8.10)$$

**D** : Paramètre de la **Rf** de la plaque:

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (8.11)$$

## CHAPITRE 8 : ÉTUDE DES PLAQUES MINCES

- ✓ Les contraintes peuvent s'écrire en fonction des moments comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{12M_{xx}}{t^3} z \\ \sigma_{yy} = \frac{12M_{yy}}{t^3} z \\ \sigma_{xy} = \frac{12M_{xy}}{t^3} z \end{cases} \quad (8.12)$$

### 7.5. Équations d'équilibre

- ✓ Supposons un élément  $dxdy$  d'une plaque uniformément chargée présentée de la figure 8.3. Les valeurs des différentes contraintes varient d'un point à l'autre dont ces variations sont représentées par les équations d'équilibre de la statique.
- ✓ La projection des forces sur l'axe  $\underline{z}$  nous donne :

$$\frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} dxdy + \frac{\partial Q_{yy}}{\partial y} dxdy + p dxdy = 0 \quad (8.13)$$

## CHAPITRE 8 : ÉTUDE DES PLAQUES MINCES

D'où :

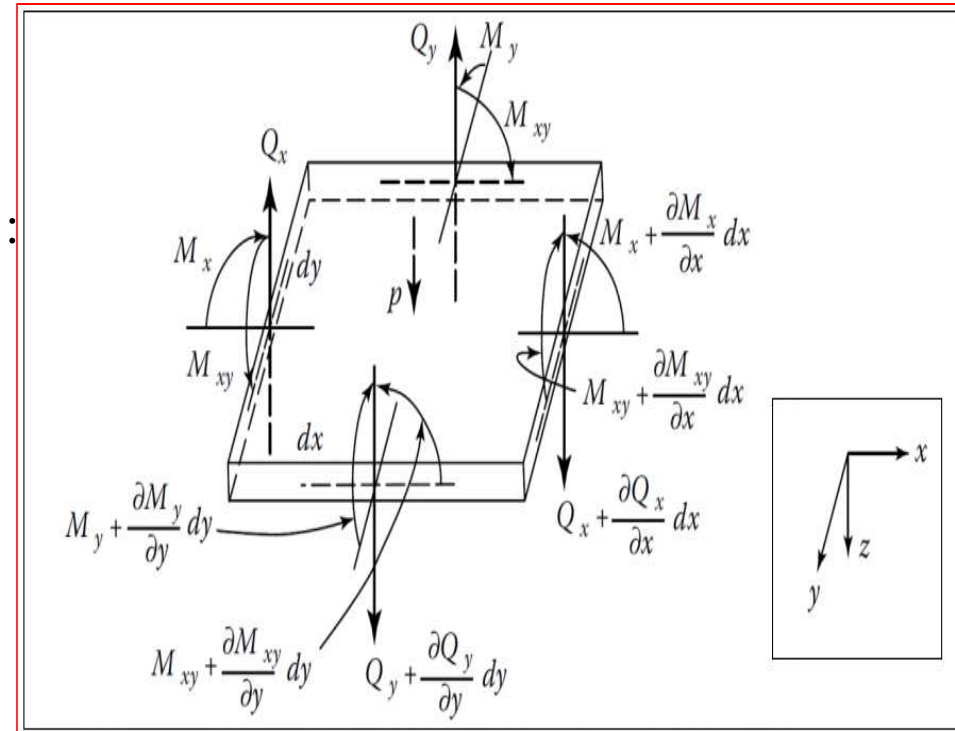
$$\frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yy}}{\partial y} + p = 0 \quad (8.14)$$

✓ L'équilibre des moments autour de l'axe  $\underline{x}$  nous donne :

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} dx dy - Q_y dx dy = 0 \quad (8.15)$$

D'où :

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (8.15)$$



✓ A partir de ces équations, le produit des quantités infinitésimales, comme le moment dû à  $P$  et le moment dû à la variation de  $Q_y$  sont omis.

## CHAPITRE 8 : ÉTUDE DES PLAQUES MINCES

✓ Équilibre des moments autour de l'axe  $y$  :

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (8.16)$$

✓ En introduisant les expressions de  $Q_x$  et  $Q_x$  on obtient :

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -P \quad (8.17)$$

✓ Cette relation représente l'équation différentielle de l'équilibre statique des plaques minces.

✓ En fonction de la flèche  $w$ , les équations des forces de cisaillement peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} Q_{xx} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ Q_{yy} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{cases} \quad (8.18)$$

**NB** : On remarque qu'on a trois équations d'équilibre pour cinq inconnues  $\{M_{xx}; M_{yy}; M_{xy}; Q_{xx}; Q_{yy}\}$ . Donc pour lever ce problème d'indétermination il faut introduire des déformations.

### 8.6. Équations fondamentale de la flexion des plaques

L'équation différentielle de la flexion des plaques peut s'écrire sous forme :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \quad (8.19)$$

L'équation (8.19) est appelée l'équation de *Lagrange (1811)* pour la flexion des plaques minces. Afin de déterminer la flèche  $w$  on doit intégrer cette équation en utilisant les conditions aux limites appropriées.

### 8.7. Conditions aux limites

On considère une plaque rectangulaire soumise à plusieurs conditions d'appuis au niveau de son bord (appuis simple et encastrement).

## CHAPITRE 8 : ÉTUDE DES PLAQUES MINCES

### 8.7. Conditions aux limites

Les conditions imposées sur un bord d'une plaque peuvent toujours se réduire à des conditions imposées à la flèche  $w(x, y)$  puisque les composantes des efforts et des moments de flexion ( $Q_{xx}$ ;  $Q_{yy}$ ;  $M_{xx}$ ;  $M_{yy}$  et  $M_{xy}$ ) sont des fonctions des dérivées partielles de  $w(x, y)$ .

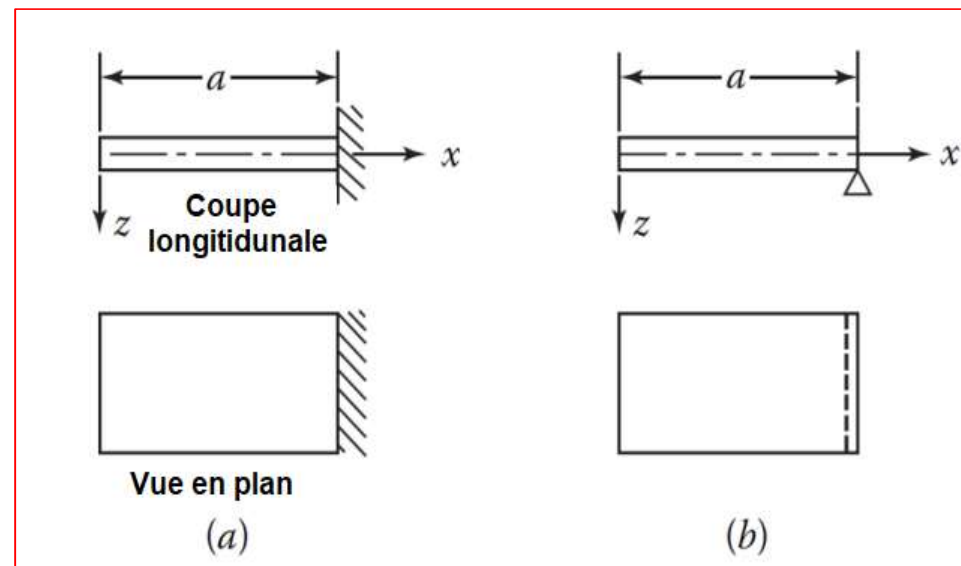


Figure 8.4 : (a) bord encasté ; (b) bord simplement appuyé

8.7. Conditions aux limites

**a) bord libre**

Les conditions aux limites pour ce cas sont données comme suit :

$$\begin{cases} M_{xx} = 0 \\ Q_{xx} = 0 \\ M_{xy} = 0 \end{cases} \mapsto \text{(La forme proposée par Poisson).}$$

Kirchhoff a démontré que les deux conditions de Poisson relatives au moment de torsion  $M_{xy}$  et à l'effort tranchant  $Q_{xx}$  pouvaient être remplacées par une seule condition aux limites (exprimant l'annulation de la réaction totale).

### 8.7. Conditions aux limites

#### a) bord libre

✓ Les conditions aux limites pour ce cas sont données comme suit :

$$\begin{cases} M_{xx} = 0 \\ Q_{xx} = 0 \\ M_{xy} = 0 \end{cases} \mapsto \text{(La forme proposée par Poisson).}$$

✓ Kirchhoff a démontré que les deux conditions de Poisson relatives au moment de torsion  $M_{xy}$  et à l'effort tranchant  $Q_{xx}$  pouvaient être remplacées par une seule condition aux limites (exprimant l'annulation de la réaction totale).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \mapsto (x = a) \end{cases}$$

## CHAPITRE 8 : ÉTUDE DES PLAQUES MINCES

### 8.7. Conditions aux limites

#### b) bord simplement appuyé

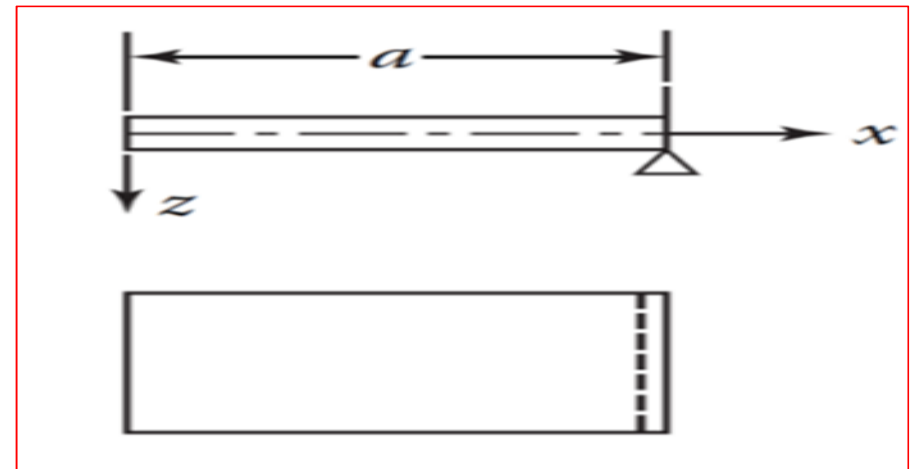
Dans ce cas on remarque ce qui suit :

$$\begin{cases} w(a, y) = 0 \\ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = 0 \end{cases}$$

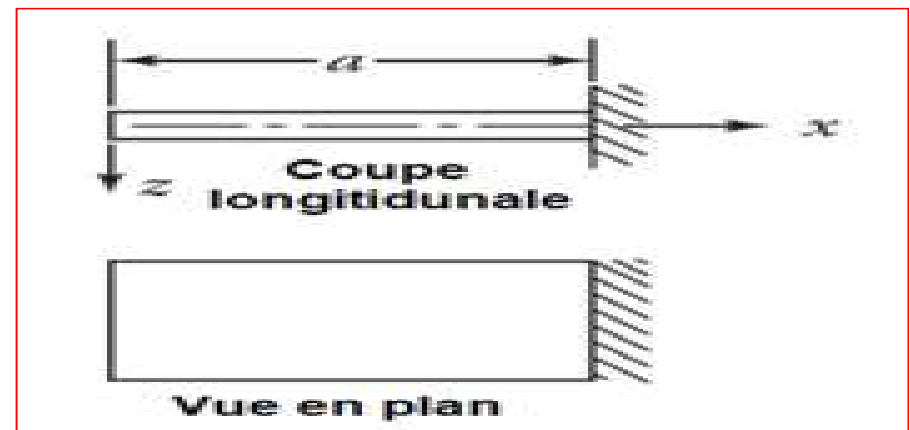
#### c) bord encasté

Dans ce cas les conditions sont les suivantes

$$\begin{cases} w(a, y) = 0 \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \end{cases}$$



bord simplement appuyé



bord encasté

## CHAPITRE 8 : ÉTUDE DES PLAQUES MINCES

### 8.8. Exercice d'application

Une plaque mince est soumise à des moments de flexion uniformément répartis  $M_x = M_b$  et  $M_y = M_a$ , appliqués le long de ses bords (Figure 8.5). Dériver l'équation régissant la déformation de la plaque pour deux cas :

**a-**  $M_a \neq M_b$

**b-**  $M_a = -M_b$

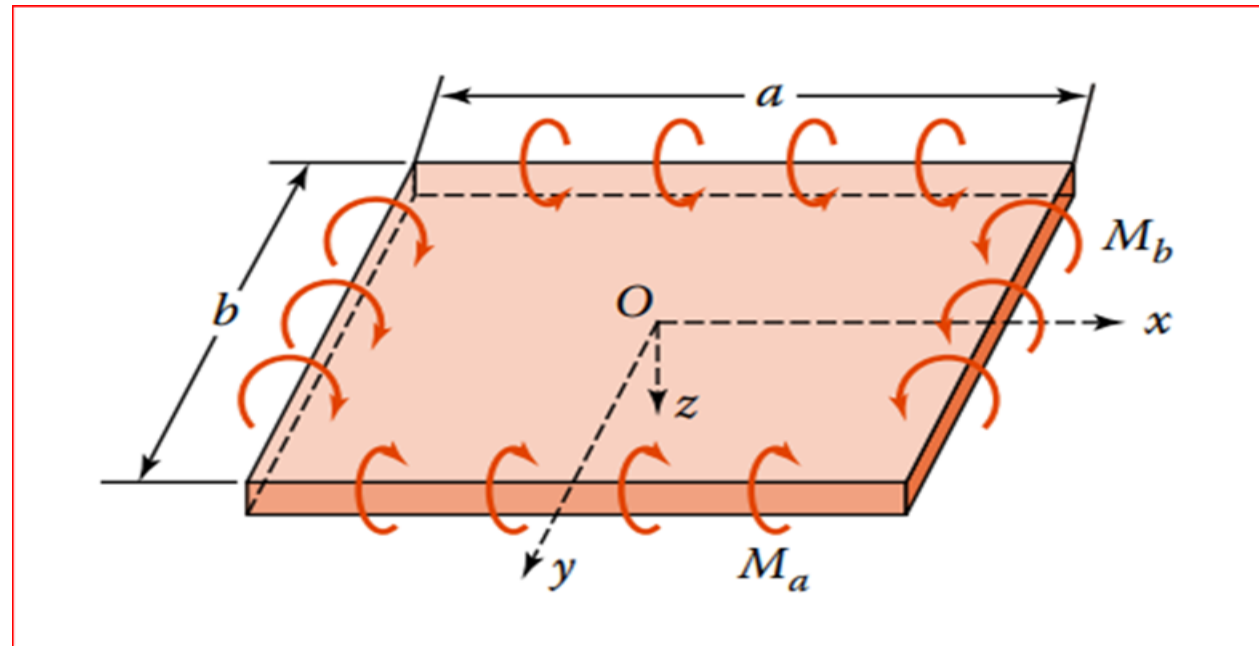


Figure 8.5: Moments aux bords de la plaque

## CHAPITRE 8 : ÉTUDE DES PLAQUES MINCES

### Solution

a-  $M_a \neq M_b$  :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_b - \nu M_a}{D(1 - \nu^2)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_a - \nu M_b}{D(1 - \nu^2)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

✓ L'intégration de ce qui précède conduit à :

$$w = -\frac{M_b - \nu M_a}{2D(1 - \nu^2)} x^2 - \frac{M_a - \nu M_b}{2D(1 - \nu^2)} y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3$$

✓ Si l'origine de  $xyz$  est située au centre et au milieu de la surface de la plaque déformée, les constantes d'intégration disparaissent, et nous avons :

$$w = -\frac{M_b - \nu M_a}{2D(1 - \nu^2)} x^2 = -\frac{M_a - \nu M_b}{2D(1 - \nu^2)} y^2$$

b-  $M_a = -M_b$

$$w = -\frac{M_b}{2D(1 - \nu^2)} (x^2 - y^2)$$