

### 7.1. Introduction

Un *solide* dont l'une de ses *dimensions* (longueur), est bien *plus grande* que les deux autres sera appelé *poutre*. Elle est engendrée par une section droite plane dont le centre appartient à une courbe (C) appelée *ligne moyenne* du solide. La figure 7.1, présente une poutre dont les coordonnées x et y définissent *le plan* de la poutre, tandis que *l'axe z*, origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur.

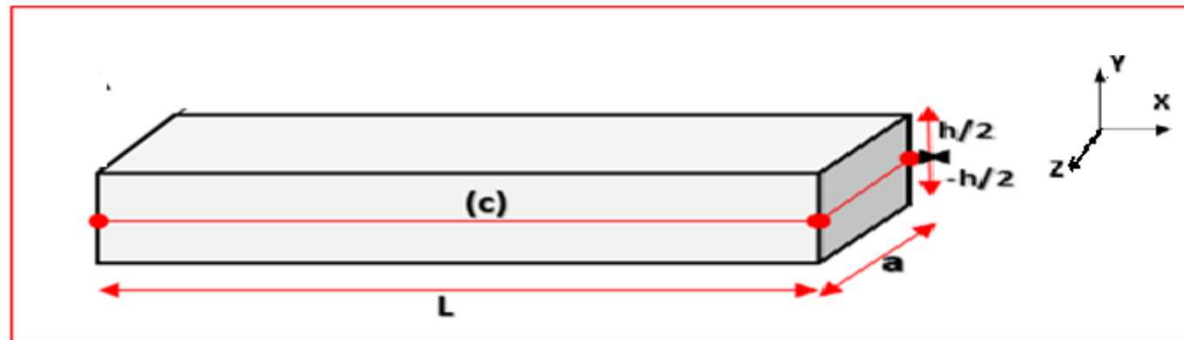


Figure 7.1 : Élément poutre

### 7.2. Flexion des poutres

Soit la poutre de longueur  $L$  le long de l'axe  $Ox$ , et de dimensions latérales petites devant  $L$  représentée sur la figure 7.2. Elle est fléchie suivant un rayon de courbure  $R$ . cette courbure est **positive** si la **concavité** est tournée vers les  $y > 0$  (ce qui est le cas sur la figure 7.1), et **négative** dans le cas contraire.

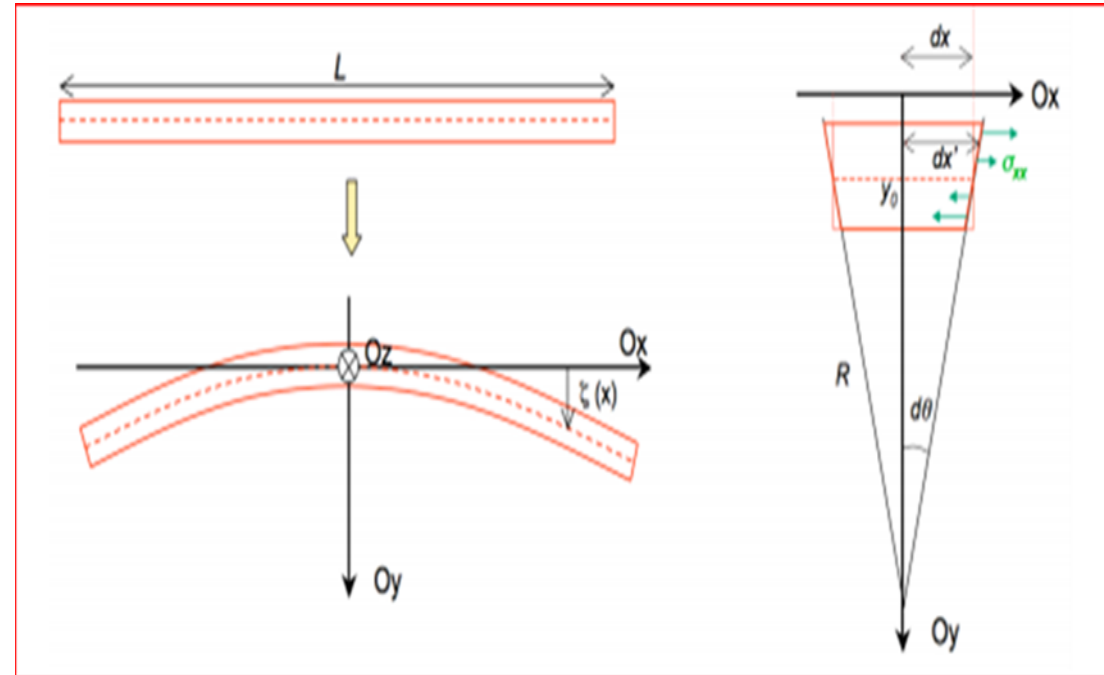


Figure 7.2 : Flexion d'une poutre

### 7.2. Flexion des poutres

On fait les approximations suivantes :

- Flexion faible si :  $R \gg L$ ,
- Flexion pure si : la poutre n'est soumise à aucune traction ou compression supplémentaire. Autrement dit, les surfaces perpendiculaires à l'axe Ox situées aux extrémités de la poutre sont libres (contraintes nulles).
- Note : le rayon de courbure dépend en général de l'abscisse x :  $R = R(x)$ .

### 7.3 Déformation d'une poutre fléchie

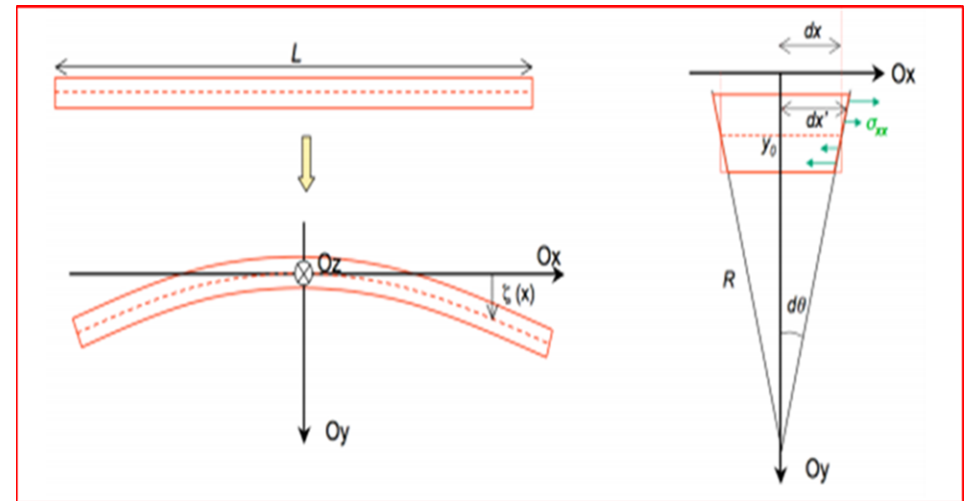
On considère un tronçon mince transversal de la poutre (figure 7.2).  $R$  est en fait la courbure d'une surface située en  $y = y_0$ . On voit sur la figure que :

- ✚ Pour  $y < y_0$ , la poutre est soumise à une traction,
- ✚ Pour  $y > y_0$ , la poutre est soumise à une compression.

Supposons  $dx'$  la longueur d'un élément de la poutre qui avait la longueur  $dx$  avant la déformation. On a :

- $dx' > dx$  pour  $y < y_0$ ,
- $dx' < dx$  pour  $y > y_0$ ,
- $dx' = dx$  pour  $y = y_0$ .

La surface  $y = y_0$  est celle dont la longueur ne varie pas au cours de la flexion : c'est la surface neutre de la poutre.



### 7.3 Déformation d'une poutre fléchie

Calculons la déformation d'une surface de la poutre pour laquelle  $y = \text{cte}$  avant la flexion. Le rayon de courbure de cette surface est égal à  $R - (y - y_0)$ . On a donc :

$$d\theta = \frac{dx'(y)}{R - (y - y_0)}$$

Or en ( $y = y_0$ ) :

$$d\theta = \frac{dx'(y)}{R} = \frac{dx}{R}$$

L'allongement relatif de la surface située en  $y$  est donc :

$$\frac{dx'}{dx} = 1 - \frac{y - y_0}{R}$$

La déformation correspondante est :

$$\varepsilon_{xx}(y) = \frac{dx' - dx}{dx} = -\frac{y - y_0}{R} \quad (7.1)$$

### État de contrainte de la poutre fléchie

La loi de Hooke associe à la déformation  $\varepsilon_{xx}$  une contrainte  $\sigma_{xx}$ . Comme la déformation consiste ici en une traction de poutre, les surfaces latérales étant libres de contrainte, on a :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx}(y) = -E \cdot \frac{y - y_0}{R} \quad (7.2)$$

Comme les surfaces latérales sont libres, on a :

- ✚  $\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{zy} = 0$  pour la surface libre perpendiculaire à  $Oy$  ;
- ✚  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$  pour la surface libre perpendiculaire à  $Oz$ .

Donc la contrainte  $\sigma_{xx}$  est la seule composante non nulle du tenseur des contraintes.

### Flèche de la poutre

Selon la figure 7.2, la flèche de la poutre  $\varepsilon(x)$  est la composante selon l'axe  $Oy$  du déplacement de la surface neutre de la poutre.

Moment fléchissant

La contrainte  $\sigma_{xx}$  est associée à un moment qui sert à fléchir la poutre autour de l'axe neutre, autrement dit un moment par rapport l'axe Oz (Figure7.2). Donc le moment infinitésimal qui s'exerce sur un élément de surface  $dy \cdot dz$  perpendiculaire à l'axe Ox, et situé à la hauteur  $y$ ,

est :  $d\vec{m} = (y - y_0)\vec{e}_y \wedge \sigma_{xx}\vec{e}_x dydz = -\sigma_{xx}(y - y_0)dydz\vec{e}_z$

D'où le moment fléchissant de la poutre est :

$$M_f = \int_{s_x} d\vec{m}$$

$$M_f = -\int_{s_x} \sigma_{xx}(y - y_0)dydz\vec{e}_z$$

$$M_f = -\frac{E}{R(x)} \int_{s_x} (y - y_0)^2 dydz\vec{e}_z$$

$$M_f = \frac{EI_Z}{R(x)_Z} \vec{e}_z \tag{7.3}$$

Où  $I_Z$  est le moment d'inertie de la section

géométrique  $s_x$  par rapport à la surface neutre :  $I_Z = \int_{s_x} (y - y_0)^2 dydz.$

## CHAPITRE 7 : FLEXION DES POUTRES

Soit  $y(x)$  la flèche de la poutre, dont la courbure de la ligne neutre (Figure 7.2), qui est l'inverse du rayon de courbure, s'exprime :

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y(x)}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Selon les hypothèses de faible flexion  $\frac{d\varepsilon(x)}{dx} \ll 1$

$$\frac{1}{R} \cong \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$$

Le moment fléchissant de la poutre devient donc :

$$M_f = EI_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \vec{e}_z \quad (7.4)$$

### 7.7. Équation d'équilibre

Le moment fléchissant de la poutre à l'équilibre, doit être égal à la composante selon l'axe Oz du moment extérieur appliqué à la poutre afin de la fléchir. Appelons  $M_z$  la composante z du moment extérieur  $\vec{M}$ . On a donc :

$$M\vec{e}_z = \vec{M}_f$$

D'où l'équation d'équilibre des moments :

$$M_z = EI_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad (7.5)$$

En général,  $\vec{M}$  est le moment d'une force extérieure  $\vec{F}$  appliquée à la poutre. Considérons une section de la poutre de longueur  $dx$ . Le moment élémentaire  $d\vec{M}$  de la force  $\vec{F}$  qui fait fléchir la poutre est :

$$d\vec{M} = dx \vec{F}$$

### 7.7. Équation d'équilibre

Soit :

$$dM_z = F_y dx$$

D'où :

$$F_y = \frac{dM_z}{dx}$$

Avec :

$F_y$ : Effort tranchant.

Selon l'équation (7.5), obtient l'équation d'équilibre des forces :

$$F_y = E \frac{d}{dx} \left( I_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right) \quad (7.6)$$

Cette équation (7.6) est bien utile lorsque la force  $F_y$  ne dépend pas de  $x$ , par exemple dans le cas d'une force ponctuelle appliquée à l'extrémité de la poutre.

### 7.7. Équation d'équilibre

Dans le cas où la force extérieure dépend de  $x$  (par exemple lorsqu'on considère le poids de la poutre), on peut avoir de préférence affaire à la force extérieure par unité de longueur  $f_y = \frac{dF_y}{dx}$  (qui est constante dans le cas de la pesanteur et d'une poutre de section constante). On a alors une équation d'équilibre des forces linéiques :

$$f_y = E \frac{d^2}{dx^2} \left( I_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right) \quad (7.7)$$

En cas d'une poutre de section constante, le moment d'inertie  $I_z$  ne dépend pas de  $x$  et les équations d'équilibre (7.5), (7.6) et (7.7), se transforment comme suivant :

7.7. Équation d'équilibre

$$M_z = EI_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad (7.8)$$

$$F_y = EI_z \frac{d^3 y(x)}{dx^3} \quad (7.9)$$

$$f_y = EI_z \frac{d^4 y(x)}{dx^4} \quad (7.10)$$

### 7.7. Équation d'équilibre

$$M_z = EI_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad (7.8)$$

$$F_y = EI_z \frac{d^3 y(x)}{dx^3} \quad (7.9)$$

$$f_y = EI_z \frac{d^4 y(x)}{dx^4} \quad (7.10)$$

### 7.8. Conditions aux limites

Pour déterminer la déformation d'une poutre fléchie, on utilise les équations d'équilibre ci-dessus et les conditions aux limites suivantes.

- ✚ Condition d'appuis de la poutre : Condition de déplacement et rotation aux extrémités de la poutre.
- ✚ Conditions sur les forces ou les moments en un point de la poutre.

### 7.9. Exemple d'application

Soit la poutre schématisée dans la figure ci-dessous, encastée et soumise à une force verticale à son extrémité libre.

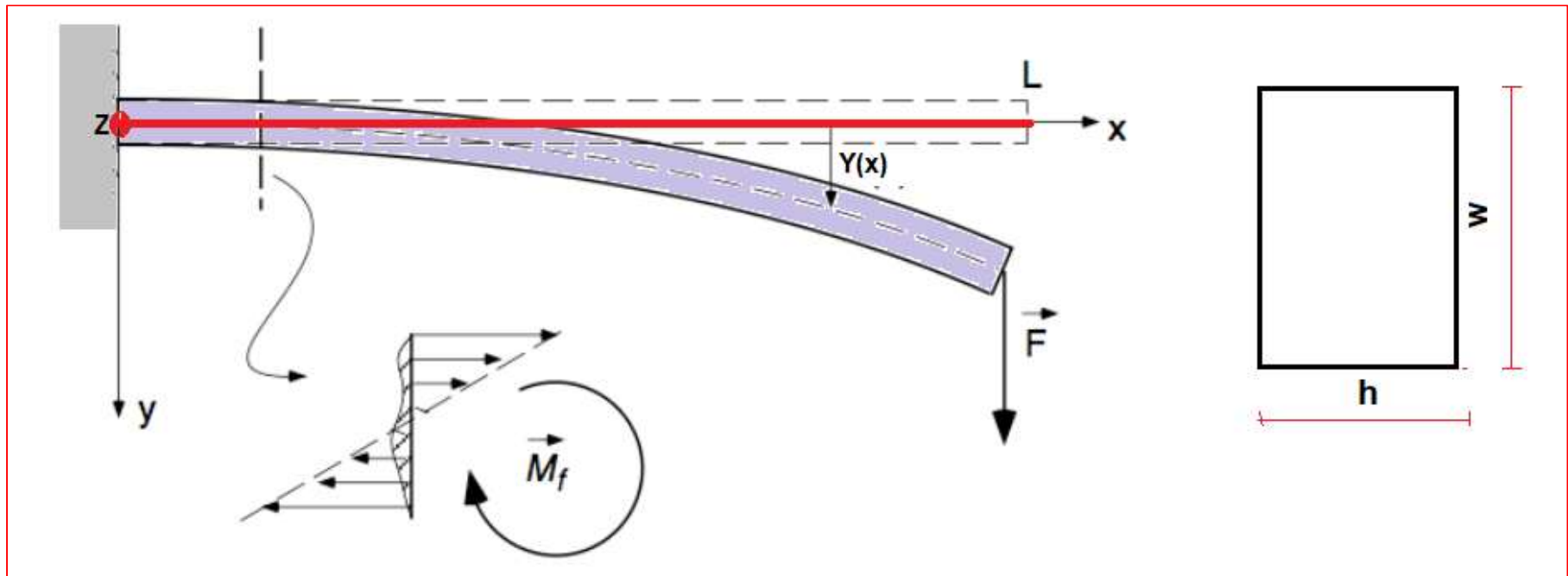


Figure 7.3 : Schéma d'une poutre encastée

7.9. Exemple d'application

A. Surface neutre : Comme aucune force extérieure n'est appliquée dans la direction Ox, on doit avoir.

$$\int_{S_x} \sigma_{xx} dydz = 0$$

$$\frac{h^2}{2} - y_0 h = 0$$

$$w \int_0^h E \frac{y - y_0}{R} dy = 0$$

$$y_0 = \frac{h}{2}$$

$$\int_0^h (y - y_0) dy = 0$$

Donc la surface neutre est située au centre de la poutre. Pour simplifier les notations, on pose  $y_0 = h$ .

### 7.9. Exemple d'application

B. Forme de la poutre : Soit une tranche de la poutre à l'abscisse  $x$ . Le moment de la force extérieure qui s'exerce en  $x$  est :

$$M_z = F(L - x)$$

Selon l'équation (7.8), on a :

$$EI_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = F(L - x)$$

Le moment d'inertie de la section  $S_x$  de poutre est :

$$I_z = \int_{S_x} (y)^2 dydz = w \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy$$

$$I_z = w \left[ \frac{h^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = w \frac{h^3}{12}$$



On remarque que  $I_z$  est indépendant de  $x$ .  
L'équation d'équilibre de la poutre est donc :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{12F}{Ewh^3} (L - x)$$

### 7.9. Exemple d'application

Après deux intégrations :

$$y(x) = \frac{12F}{Ewh^3} \left( L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + Ax + B$$

Or les conditions aux limites :

$$y(x = 0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$y'(x = 0) = 0 \rightarrow A = 0$$

D'où la forme de la poutre encastree est :

$$y(x) = \frac{12F}{Ewh^3} \left( L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

La flèche maximale  $\Delta$  est enregistrée à

une distance de  $(X = L)$ :  $\Delta = y(x = L) = \frac{4FL^3}{Ewh^3}$

Dans ce cas la poutre peut être considérée comme une tige élastique linéaire : la flèche est proportionnelle à la force appliquée :

$$F = K \cdot \Delta$$

Où :

$$k = \frac{Ew}{4} \left( \frac{h}{L} \right)^3$$

**K** : La raideur de la poutre

7.9. Exemple d'application

C. Déformation maximale de la poutre

En plan  $(x, y)$  la déformation est :  $\epsilon_{xx} = -\frac{y}{R} = -y \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = y \frac{12F}{Ewh^3} (L - x)$

$|\epsilon_{xx}|$  Est maximale en  $x = 0$  et  $|y| = \frac{h}{2}$  :  $|(\epsilon_{xx})_{max}| = \frac{6FhL}{Ewh^3} = \frac{3h}{2L} \frac{\Delta}{L} \ll \frac{\Delta}{L}$

D. Etat de contrainte de la poutre

$$|(\sigma_{xx})_{max}| = E |(\epsilon_{xx})_{max}| \sim \frac{FL}{wh^2}$$

Elle existe aussi une contrainte tangentielle  $\sigma_{xy}$  :  $\sigma_{xy} = \frac{F}{wh}$

On remarque que :  $\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} \ll 1$ .

### 8.1. Introduction

Une *plaque* est définie comme étant un *solide* délimité par *deux plans parallèles* appelés *faces* et dont *l'épaisseur  $h$*  est petite par rapport aux deux autres *dimensions*. Les plaques sont généralement employées pour modéliser des structures minces, car seule *une dimension* est faible par rapport aux *deux autres*.

Cependant, si la structure possède une *courbure* géométrique, ce sont les éléments de *coque* qui sont favorisés. En outre, si l'élément n'est pas *plan* au repos, nous parlons de *coque* plutôt que de plaque (figure 8.1).

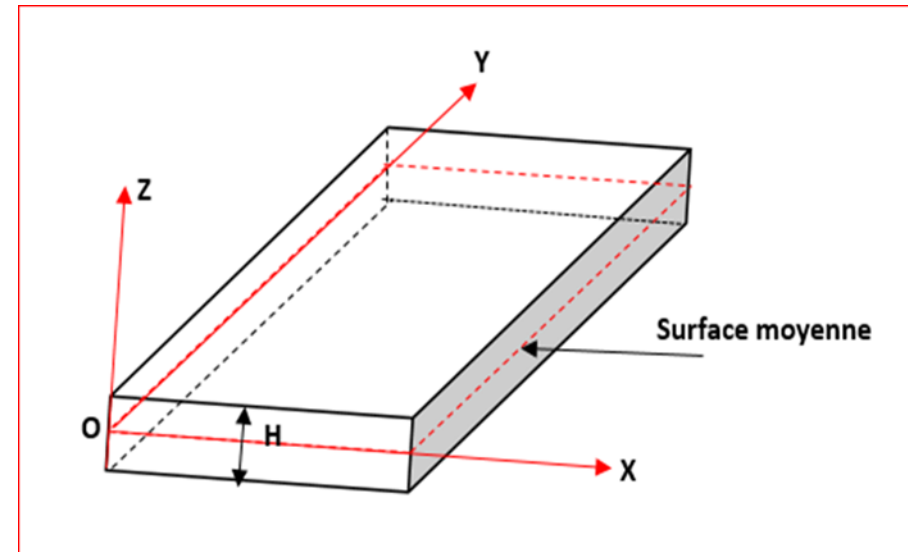


Figure 8.1 : Schéma d'une plaque