

# CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE

## CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE

**1. Introduction:** L'élasticité bidimensionnelle concerne des solides de géométrie particulière dans des chargements particuliers ; on montre alors que le tenseur des contraintes (ou celui des déformations) ne comporte plus que quatre composantes dépendantes de deux variables de l'espace.

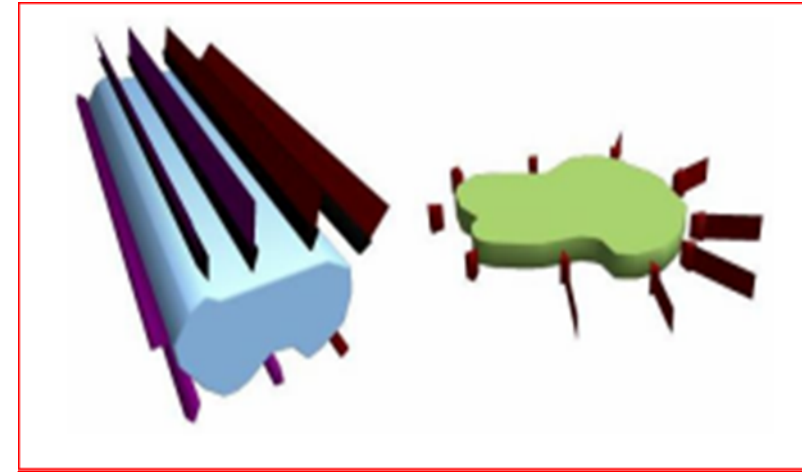


Figure 6.1 : États plans de déformation et de contrainte

Dans une telle configuration, non seulement le problème est considérablement simplifié du point de vue des mathématiques, mais encore bénéficie-t-il de méthodes de résolution spécifiques. Il existe deux cas d'élasticité dite plane (déformation plane et contrainte plane). (Figure 6.1).

### 2. État de déformation plane

L'état de déformation plane concerne les corps prismatiques dont la longueur (selon z axe du prisme) est infiniment plus grand que les dimensions transversales de la section droite.

Ce prisme est uniquement soumis à des efforts latéraux agissant perpendiculairement à l'axe du prisme et uniformément sur toute la longueur. Dans ce cas, on convient que la déformation est la même dans toutes les sections transversales de la structure, et le champ de déplacement soit de la forme :

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = 0 \end{cases}$$

On aura donc le tenseur de déformation sous la forme suivante :

## CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ avec: } \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} ; \text{ Donc, La loi de comportement se réduit à :}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yx} \end{Bmatrix}, \text{ avec: } \sigma_{zz} = \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}); \text{ D'où } [\sigma] \text{ s'écrit :}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

## CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE



Figure 6.2 : Exemples de déformations planes

### 6.3. État de contrainte plane

L'état de contrainte plane concerne les plaques minces chargées dans leur plan (il n'y a donc pas de flexion comme cela serait le cas pour un plancher par exemple). Les surfaces parallèles délimitant la plaque ne sont pas chargées. Si on note  $\underline{Z}$  l'axe perpendiculaire à la plaque on considère que les grandeurs ne dépendent pas de la coordonnée  $\underline{Z}$ . Dans ce cas la contrainte est la même dans toutes les sections de l'épaisseur de la structure et, les composantes  $\underline{U}$  et  $\underline{V}$  des déplacements élastiques sont fonctions uniquement de  $X$  et  $Y$ , et ne dépendent pas de  $Z$ . (voir figure 6.3).

### 6.3. État de contrainte plane

Dans ce cas, on aura le tenseur des contraintes sous la forme :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Où :  $\sigma_{xx}$  ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{yx}$  , sont indépendantes de  $Z$ .

L'axe  $z$  est donc, pour tous les points du solide, direction principale et la contrainte principale associée est nulle dont la loi de comportement, se réduit à :

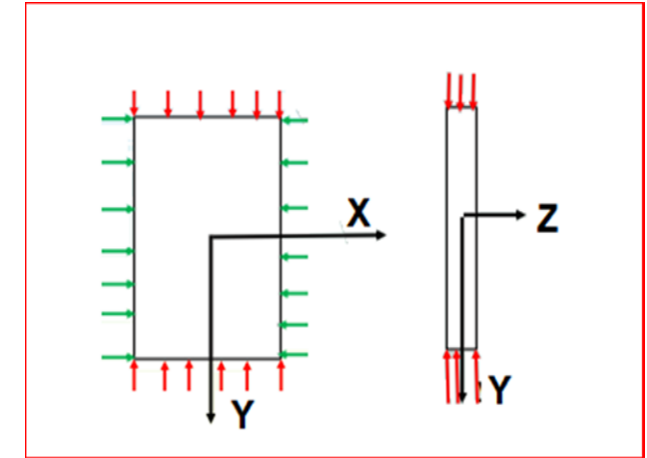


Figure 6.3 : État de contrainte plane

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{bmatrix}$$

## CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE

### 6.4. Équations fondamentales exprimées en déplacements

Ces équations servent à exprimer les équations d'élasticité plane en déplacements dans les deux cas (*déformation plane* et *contrainte plane*).

#### a. Cas de déformations planes

On va exprimer les équations d'équilibre en fonction des déplacements :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases} \quad 6.1$$

Or selon les équations de Lamé on a :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = (\lambda + 2G)\varepsilon_{xx} + \lambda \cdot \varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} = (\lambda + 2G)\varepsilon_{yy} + \lambda \cdot \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \end{cases} \quad 6.2$$

## CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE

En remplaçant (6.2) en (6.1), on aura :

$$\begin{cases} \frac{(\lambda + 2G)\partial\varepsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\lambda.\partial\varepsilon_{yy}}{\partial x} + \frac{G.\partial\gamma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{(\lambda + 2G)\partial\varepsilon_{yy}}{\partial y} + \frac{\lambda.\partial\varepsilon_{xx}}{\partial y} + \frac{G.\partial\gamma_{yx}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases}$$

Selon la relation de compatibilité :

$$\left\{ \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}$$

En remplaçant, on aura :

$$\begin{cases} \frac{(\lambda + 2G)\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\lambda.\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{G.\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{G.\partial^2 v}{\partial x\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{(\lambda + 2G)\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\lambda.\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{G.\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{G.\partial^2 u}{\partial x\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

Après réarrangement de ces termes, les équations d'élasticité plane en déplacements dans le cas de déformation plane s'écrivent :

$$\begin{cases} G \cdot \nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + f_x = 0 \\ G \cdot \nabla^2 v + (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

### b. Cas de contraintes planes

On suit le même cheminement du cas précédent, les équations d'élasticité plane en déplacements dans le cas de contrainte plane sont données comme suit :

$$\begin{cases} G \cdot \nabla^2 u + \frac{E}{2(1-\nu)} \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + f_x = 0 \\ G \cdot \nabla^2 v + \frac{E}{2(1-\nu)} \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

### 6.5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

Le but est d'exprimer les équations d'élasticité plane en contraintes dans les deux cas (déformation plane et contrainte plane).

#### •Cas de contraintes planes

Selon les équations de contrainte plane :

Et

$$\left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \right. \quad 6.3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \cdot \sigma_{yy}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \cdot \sigma_{xx}) \\ \gamma_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \end{array} \right. \quad 6.4$$

### 6.5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

En remplaçant (6.4) dans (6.3) ; on aura :

$$\frac{1}{E} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \nu \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \nu \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \frac{1}{G} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{1}{E} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} - \nu \cdot \sigma_{yy}) + \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{yy} - \nu \cdot \sigma_{xx}) = \frac{2(1 + \nu)}{E} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Donc après simplification on a :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} - \nu \cdot \sigma_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{yy} - \nu \cdot \sigma_{xx}) \right. = 2(1 + \nu) \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad 6.5$$

### 6.5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

D'autre part, d'après les équations d'équilibre on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

On dérive la première équation par rapport à  $x$ , et la deuxième par rapport à  $y$ , on trouve ce qui suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad 6.6$$

## CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE

### 6.5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

La somme membre à membre des équations (6.6) nous donne :

$$\left\{ \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial f_y}{\partial y} \end{aligned} \right. \quad 6.7$$

En remplaçant (6.7) dans (6.5), on aura :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} - \nu \cdot \sigma_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{yy} - \nu \cdot \sigma_{xx}) &= (1 + \nu) \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} - \nu \cdot \sigma_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{yy} - \nu \cdot \sigma_{xx}) &= -(1 + \nu) \cdot \left( \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) &= -(1 + \nu) \cdot \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

## CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE

### 6.5. Equations fondamentales exprimées en contraintes

Sachant que :

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Donc, l'équation de la contrainte plane exprimée en contrainte est donnée sous forme :

$$\left\{ \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1 + \nu) \cdot \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \right. \quad 6.8$$

**Cas de déformations planes:** On refait la même chose pour le cas de la déformation plane, en utilisant les équations correspondantes, on aura l'équation de déformation plane exprimée en contrainte :

$$\left\{ \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{1}{(1 + \nu)} \cdot \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \right. \quad 6.9$$

### 6.6. Fonction d'Airy (Fonction de contrainte)

La résolution d'un problème d'élasticité plane se réduit à l'intégration des équations différentielles (équilibre, compatibilité et Hooke) ainsi que les équations de conditions aux limites, en pratique, les forces de volume sont le poids propre, dont les composantes peuvent être :

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = \rho \cdot g \end{cases}$$

La combinaison des équations (6.8) et (6.9), dans le cas des contrainte et déformation plane nous a donné :

$$\{\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad 6.10$$

### 6.6. Fonction d'Airy (Fonction de contrainte)

Donc la solution exacte de l'équation (6.10), nécessite la détermination des deux paramètres  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$ . A cet effet, nous allons revenir aux équations d'équilibre dont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = -\rho \cdot g \end{cases}$$

Les équations d'équilibre présentent un système de deux équations différentielles à 02 inconnues. Ce système d'équations admet une solution particulière plus une solution homogène.

### 6.6. Fonction d'Airy (Fonction de contrainte)

a) Solution particulière: Dans ce, la solution est présentée sous plusieurs possibilités :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \sigma_{xy} \Rightarrow \sigma_{yy} = -\rho \cdot g \cdot y \\ \sigma_{yx} = \sigma_{yy} \Rightarrow \sigma_{xy} = -\rho \cdot g \cdot x \end{cases} \quad 6.11$$

b) Solution homogène (les forces de volumes nulles): Dans cette partie, il s'agit de trouver la solution sans second membre :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad 6.12$$

### 6.6. Fonction d'Airy (Fonction de contrainte)

Ces équations sont satisfaites d'office pour des contraintes dérivant d'une fonction d'Airy. A cet effet, pour satisfaire la première équation du système (6.12), on va choisir la fonction  $\psi(x, y)$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{et} \\ \sigma_{xx} = \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} \end{array} \right. \quad 6.13$$

Pour la deuxième équation du système, on va choisir la fonction  $\chi(x, y)$  telle que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{et:} \\ \sigma_{yx} = \frac{\partial \chi(x,y)}{\partial y} \\ \sigma_{yy} = -\frac{\partial \chi(x,y)}{\partial x} \end{array} \right. \quad 6.14$$

## CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE

### 6.6. Fonction d'Airy (Fonction de contrainte)

Et comme ( $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ ) dans les équations (6.13) et (6.14) on a :

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial\chi(x, y)}{\partial y}$$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial\chi(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad 6.15$$

Pour satisfaire l'équation (6.15), on choisit une fonction  $\varphi(x, y)$  telle que :

$$\begin{cases} \text{et: } \psi(x, y) = \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} \\ \chi(x, y) = -\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x} \end{cases} \quad 6.16$$

En remplaçant (6.16) dans (6.13) et (6.14), on obtient toutes les contraintes inconnues :

## CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE

### 6.6. Fonction d'Airy (Fonction de contrainte)

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} = -\frac{\partial \chi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \chi(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad 6.17$$

Pour que la solution soit exacte, il faut qu'elle vérifie l'équation générale en contraintes (6.10) :

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0$$

On remplace (6.18) dans (6.10), on aura donc :

Ainsi la (Sg = Sp+Sh) , on aura donc :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} - \rho \cdot g \cdot x \end{cases} \quad 6.18$$

$$\left\{ \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4} = 0 \right. \quad 6.19$$

Par conséquent la fonction d'Airy s'écrit :

$$\{\nabla^4(\varphi(x, y)) = 0 \quad 6.20$$

## CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE

### 6.6. Fonction d'Airy (Fonction de contrainte)

a) **Résumé de la méthode:** En cas d'un problème d'élasticité plane où le poids propre est la seule force volumique, la procédure de la résolution de ce problème sera comme suit :

1. Recherche d'une fonction  $\varphi(x, y)$  solution de l'équation (6.18).

$$\frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4} = 0$$

2. Calcul des contraintes ( $\sigma_{xx}$  ;  $\sigma_{yy}$  ;  $\sigma_{xy}$ ) à l'aide des équations (6.18)

$$[\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \quad ; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \quad ; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} - \rho \cdot g \cdot x]$$

3. Vérification des conditions aux limites (de toutes les faces)

$$\begin{cases} \vec{T}_x = \sigma_{xx} \vec{n}_1 + \sigma_{xy} \vec{n}_2 \\ \vec{T}_y = \sigma_{xy} \vec{n}_1 + \sigma_{yy} \vec{n}_2 \end{cases}$$

## CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE

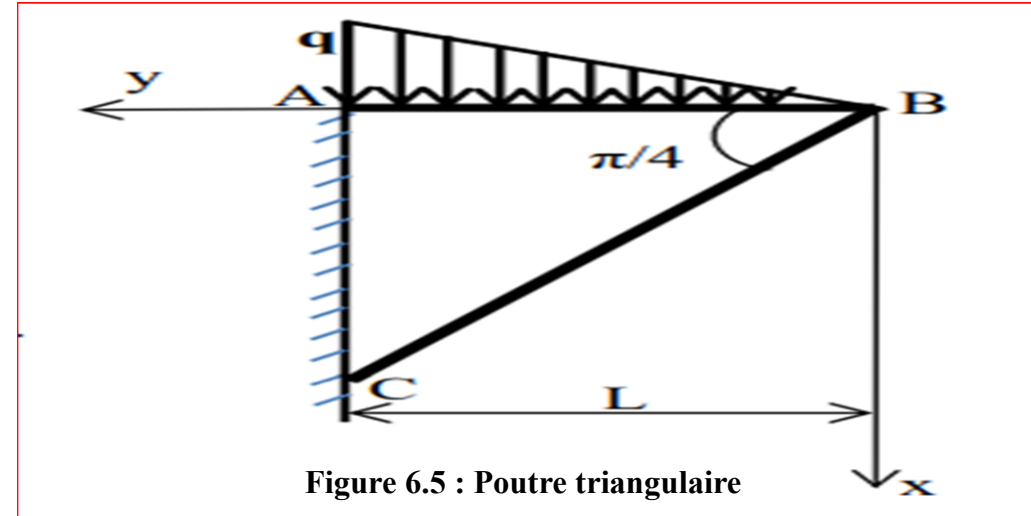
### 6.7. Exercice d'application

Soit la poutre triangulaire ABC, de très petite dimension suivant l'axe z. Elle est soumise sur le côté AB à une charge triangulaire d'intensité maximale q, Déterminer le tenseur des contraintes en utilisant la fonction d'Airy suivante :

$$\varphi(x, y) = ax^3 + byx^2 + cxy^2 + dy^3$$

où **a**, **b**, **c** et **d** : sont des constantes à déterminer.

**NB** : Le poids propre de la poutre n'est pas négligé



### 6.7. Exercice d'application ( Solution)

Détermination du tenseur des contraintes en utilisant la fonction d'Airy :

$$\varphi(x, y) = ax^3 + byx^2 + cxy^2 + dy^3$$

1. Vérification que :

$$\nabla^4 \varphi(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4} = 0$$

D'où :

$$\frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4} = 0$$

Alors :

$$\nabla^4 \varphi(x, y) = 0 \quad \mapsto \quad CV$$

### 6.7. Exercice d'application ( Solution)

2.Calcul des contraintes suivant la fonction d'Airy

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} - \rho \cdot g \cdot x$$

Donc :

$$\sigma_{xx} = 2cx + 6dy$$

$$\sigma_{yy} = 6ax + 2by$$

$$\sigma_{xy} = -2bx - 2cy - \rho \cdot g \cdot x$$

## CHAPITRE 6 : RÉOLUTION DES PROBLEMES D'ÉLASTICITE PLANE

### 6.7. Exercice d'application ( Solution)

3. Détermination des constantes **a**, **b**, **c** et **d** à partir des conditions aux limites

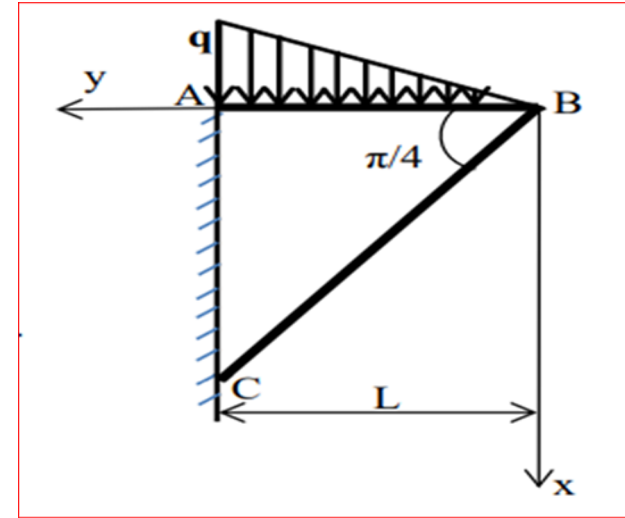
$$\begin{cases} \bar{X} = l\sigma_{xx} + m\sigma_{xy} \\ \bar{Y} = l\sigma_{xy} + m\sigma_{yy} \end{cases}$$

Coté AB :  $x = 0$ ;  $0 \leq y \leq l$ ;  $(l, m) = (-1, 0)$ ;  $\bar{X} = -\frac{q}{l}y$ ;  $\bar{Y} = 0$

$$\begin{cases} \bar{X} = -\sigma_{xx} = -6dy = -\frac{q}{l}y \\ \bar{Y} = -\sigma_{xy} = -2cy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \frac{q}{6l} \\ c = 0 \end{cases}$$

Coté BC :  $x = y$ ;  $0 \leq y \leq l$ ;  $(l, m) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ;  $\bar{X} = 0$ ;  $\bar{Y} = 0$

$$\begin{cases} \bar{X} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{xx} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{xy} = 0 \\ \bar{Y} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{xy} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_{yy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2}\left(\frac{q}{l} + \rho g\right) \\ a = \frac{1}{3}\left(\frac{q}{l} + \frac{\rho g}{2}\right) \end{cases}$$



### 6.7. Exercice d'application ( Solution)

$$\sigma_{xx} = \frac{q}{l} y$$

$$\sigma_{yy} = \frac{q}{l} (2x - y) + \rho g (x - y)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{q}{l} x$$

Donc :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \frac{q}{l} y & \frac{q}{l} x \\ \frac{q}{l} x & \frac{q}{l} (2x - y) + \rho g (x - y) \end{bmatrix}$$

Et :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{3} \left( \frac{q}{l} + \frac{\rho g}{2} \right) x^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{q}{l} + \rho g \right) y x^2 + \frac{q}{6l} y^3$$