

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GENERALES D'ÉLASTICITE LINEAIRE

5.1. Généralités:

La résolution d'un problème *d'élasticité linéaire*, nécessite de trouver un *champ de déplacements* $u_i(\mathbf{x}, t)$ et un *champ de contraintes* $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ vérifiant les *équations du mouvement* ou d'équilibre selon le type de problème *dynamique* ou *quasi-statique*. Sous les *hypothèses des petites perturbations*, et dans un problème de *MMC*, le nombre d'*inconnues* est égal à 15. En effet, l'objectif est de déterminer en chaque point du solide le *vecteur déplacement* (03 *composantes*), le *tenseur de déformations* (06 *composantes indépendantes*) et le *tenseur des contraintes* (06 *composantes indépendantes*). On obtient donc un système de (15) *équations* à (15) *inconnues* et le problème sera « *bien posé* » et admettra une solution unique pourvu qu'on lui rajoute des conditions aux limites et éventuellement des conditions initiales adéquates. Ces équations sont:

5.1. Généralités:

- Les trois équations d'équilibre (étude statique de Navier) :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \quad (5.3)$$

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

5.1. Généralités:

- Les six équations de compatibilités des déformations

Tableau 5.1 : Équations de Cauchy (Extensions et Distorsions)

$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$	$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$
$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$	$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$
$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$	$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

5.1. Généralités:

Tableau 5.2 : Équations de compatibilité ou St Venant

$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right)$
$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z}$	$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} \right)$
$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial z}$	$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} \right)$

5.1. Généralités:

- Les six équations de Hooke

Tableau 5.3 : Équations de Hooke

$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right)$	$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}$
$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right)$	$\gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}$
$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right)$	$\gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}$

5.1. Généralités:

➤ Équations de Lamé

La formule suivante donne les contraintes en fonction des déformations :

$$\sigma_{ii} = \lambda \cdot \text{tr}\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{ii}$$

D'où :

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

Les six équations de Lamé sont récapitulées dans le tableau suivant:

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

5.1. Généralités:

Tableau 5.4 : Equations e Lamé

$\sigma_{xx} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_v + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xx}$	$\sigma_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$
$\sigma_{yy} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_v + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{yy}$	$\sigma_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$
$\sigma_{zz} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_v + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{zz}$	$\sigma_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$

5.2. Méthode de résolution d'un problème d'élasticité linéaire

Elles existent deux **grandes méthodes** de résolution ce type de problèmes. La première, dite résolution en **déplacements**, consiste à écrire toutes les **conditions** que doivent satisfaire les **déplacements** dans la structure, pour en déduire une **solution**. La seconde, dite résolution en **contraintes**, consiste à écrire ces équations à l'aide du **tenseur des contraintes**:

5.2. Méthode de résolution d'un problème d'élasticité linéaire

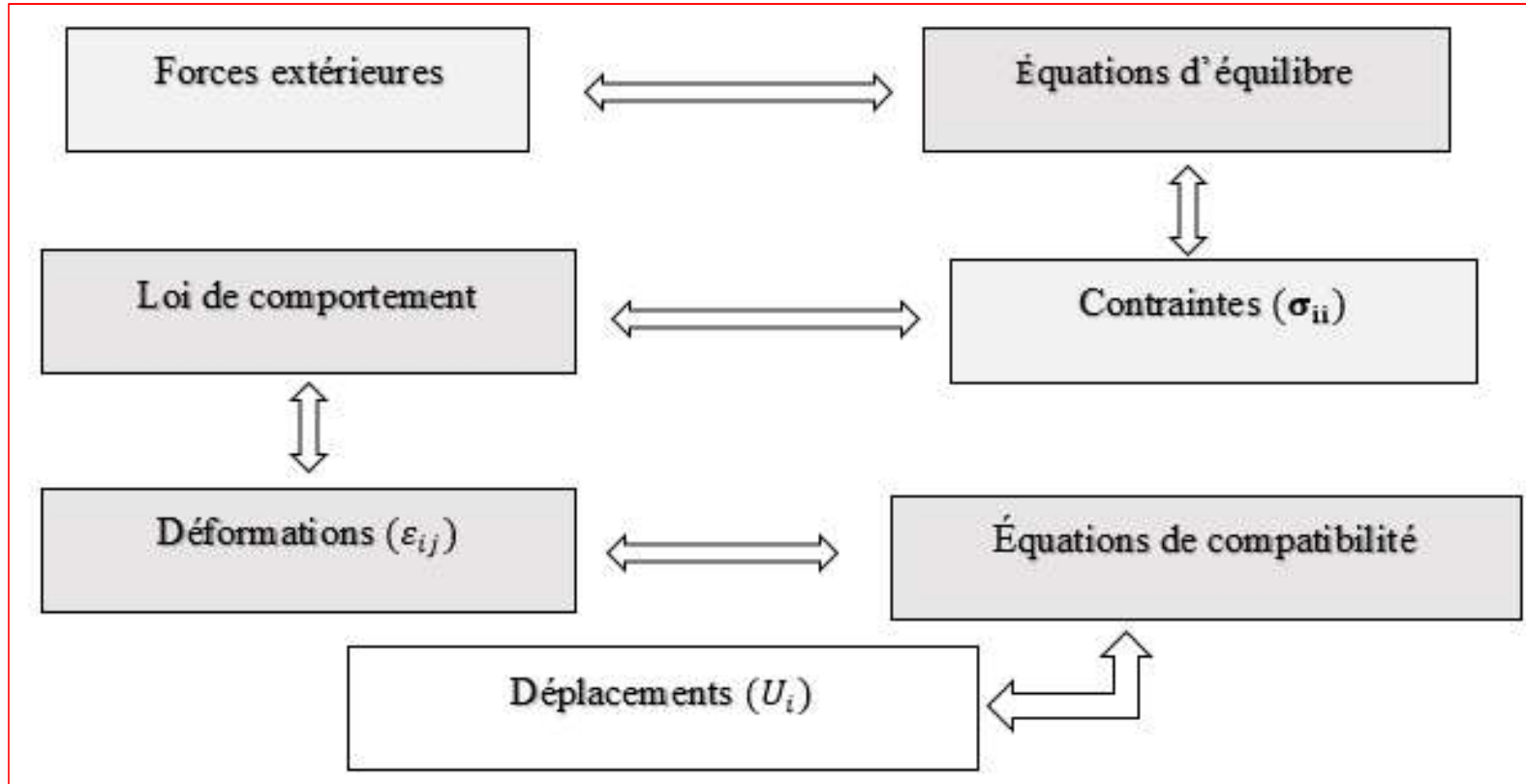


Figure 5.1 : Organigramme de résolutions d'un problème d'élasticité

5.3.1. Équations de Lamé (Résolution en déplacements)

Pour aboutir un champ de *déplacements* dans un matériau, il suffit de résoudre un problème à trois inconnues (les *03 déplacements* selon les *03 directions*). Pour cela, les *trois équations d'équilibres* vont formuler en *déplacements* selon la *loi de comportement* et la définition des déformations. En effet, le champ de *déformation* va se déduire du champ de *déplacement* à l'aide de *six équations de compatibilité*.

La résolution en *déplacements* d'un problème d'élasticité se fait donc à l'aide des *trois équations différentielles* dites de « *Lamé-Clapeyron* » dont le but est d'*exprimer* les *équations différentielles d'équilibre* en fonction des *déplacements u , v et w* . Pour cela en utilisant les *équations de Lamé* et en les remplaçant dans les *équations d'équilibre*, on aura :

5.3.1. Équations de Lamé (Résolution en déplacements)

$$\frac{\partial(\lambda.\varepsilon_v + 2G.\varepsilon_x)}{\partial x} + \frac{\partial(G.\gamma_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(G.\gamma_{xz})}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial(\lambda.\varepsilon_v + 2G.\varepsilon_y)}{\partial y} + \frac{\partial(G.\gamma_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(G.\gamma_{yz})}{\partial z} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial(\lambda.\varepsilon_v + 2G.\varepsilon_z)}{\partial z} + \frac{\partial(G.\gamma_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(G.\gamma_{zy})}{\partial y} + F_z = 0$$

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

5.3.1. Équations de Lamé (Résolution en déplacements)

Après des opérations mathématiques intermédiaires, on obtient les équations finales de Lamé.

On prend le sens \underline{x} comme exemple et après réarrangements des termes de l'équation, on peut écrire ce qui suit :

$$\frac{\partial(\lambda.\varepsilon_v)}{\partial x} + \frac{\partial(2G.\varepsilon_x)}{\partial x} + \frac{\partial(G.\gamma_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(G.\gamma_{xz})}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\text{Or : } \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$

$$\text{Et : } \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

5.3.1. Équations de Lamé (Résolution en déplacements)

En remplaçant ces termes dans la première équation, on aura :

$$\frac{\partial(\lambda \cdot \varepsilon_v)}{\partial x} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \lambda \cdot \varepsilon_v}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \lambda \cdot \varepsilon_v}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_x = 0$$

5.3.1. Équations de Lamé (Résolution en déplacements)

Sachant que le Laplacien $\nabla^2 u$ est égal à :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Et :

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

5.3.1. Équations de Lamé (Résolution en déplacements)

Après simplification on aura donc :

$$\frac{\lambda \partial \varepsilon_v}{\partial x} + G \nabla^2 u + G \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + F_x = 0$$

Soit :

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G \nabla^2 u + F_x = 0$$

Généralisation sur les axes y et z on aura donc :

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G \nabla^2 v + F_y = 0$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G \nabla^2 w + F_z = 0$$

Remarque : Si on a l'effet de la température les équations d'élasticité en déplacement s'écrivent comme suit :

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G \nabla^2 u - \frac{\alpha \cdot E}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x} + F_x = 0$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G \nabla^2 v - \frac{\alpha \cdot E}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial y} + F_y = 0$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G \nabla^2 w - \frac{\alpha \cdot E}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial z} + F_z = 0$$

Où : ΔT : La variation de température ;

α : Coefficient de dilatation du matériau

5.3.2 Équation de Beltrami-Michell

Quand seules les *conditions aux limites en contraintes* s'existent, il peut être intéressant de résoudre le problème en utilisant les six composantes indépendantes du *tenseur des contraintes* comme *inconnues*. Il faut alors disposer les *six équations*, qui sont obtenues en vérifiant que les *déformations* obtenues par la loi de comportement *respectent* les *équations de compatibilité*. Les équations d'équilibre sont donc ici simplement utilisées pour simplifier les équations de compatibilité exprimées en contraintes. Donc, la solution de Beltrami, consiste à exprimer les 15 équations de l'*élasticité* en *contrainte uniquement*. A cet effet, on dérive les équations (5.1) respectivement par rapport à x , y et z et on suppose que les forces de volume sont constantes ($\frac{\partial F_i}{\partial i} = 0$).

5.3.2 Équation de Beltrami-Michell

Soit :

$$(\lambda + G) \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial x^2} + G \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 u) + \frac{\partial F_x}{\partial x} = 0$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial y^2} + G \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 v) + \frac{\partial F_y}{\partial y} = 0 \quad (5.5)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial z^2} + G \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 w) + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0$$

5.3.2 Équation de Beltrami-Michell

On additionne les équations (5.2), on aura :

$$(\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial z^2} \right) + G \cdot \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

Soit :

$$(\lambda + 2 \cdot G) \nabla^2 \varepsilon_v = 0$$

Ou bien

$$\nabla^2 \varepsilon_v = 0$$

5.3.2 Équation de Beltrami-Michell

Lorsque les forces de volume sont constantes, le Laplacien de la déformation volumique est nul.

Passant maintenant à la transformation de déformations des équations (5.2) aux contraintes, à cet effet, on fait appel aux équations de Lamé.

On a :

$$\sigma_{xx} = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2G \cdot \varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2G \cdot \varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2G \cdot \varepsilon_{zz}$$

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

5.3.2 Équation de Beltrami-Michell

En appliquant le Laplacien à ces équations on aura :

$$\nabla^2(\sigma_{xx}) = \lambda \cdot \nabla^2(\varepsilon_v) + 2G \cdot \nabla^2(\varepsilon_{xx})$$

$$\nabla^2(\sigma_{yy}) = \lambda \cdot \nabla^2(\varepsilon_v) + 2G \cdot \nabla^2(\varepsilon_{yy})$$

$$\nabla^2(\sigma_{zz}) = \lambda \cdot \nabla^2(\varepsilon_v) + 2G \cdot \nabla^2(\varepsilon_{zz})$$

Or : $\nabla^2 \varepsilon_v = 0$

D'où :

$$\nabla^2(\sigma_{xx}) = 2G \cdot \nabla^2(\varepsilon_{xx})$$

$$\nabla^2(\sigma_{yy}) = 2G \cdot \nabla^2(\varepsilon_{yy}) \quad (5.6)$$

$$\nabla^2(\sigma_{zz}) = 2G \cdot \nabla^2(\varepsilon_{zz})$$

D'après la loi de Hooke généralisée :

$$\theta = (3\lambda + 2G) \cdot \varepsilon_v \quad \text{et} \quad \varepsilon_v = \frac{1}{(3\lambda + 2G)} \theta$$

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

5.3.2 Équation de Beltrami-Michell

On dérive l'équation ($\varepsilon_v = \frac{1}{(3\lambda+2G)}\theta$) 2 fois par rapport à x, y et z, on aura

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial x^2} = \frac{1}{(3\lambda + 2G)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial y^2} = \frac{1}{(3\lambda + 2G)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial z^2} = \frac{1}{(3\lambda + 2G)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

5.3.2 Équation de Beltrami-Michell

Il faut maintenant remplacer (5.5) et (5.6) dans (5.7), on aura :

$$(\lambda + G) \frac{1}{(3\lambda + 2G)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + G \cdot \frac{\nabla^2 \sigma_{xx}}{2G} = 0$$

En réarrangeant les termes et en remplaçant les constantes de Lamé, on aura :

$$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$$

On suit le même cheminement les équations de Beltrami-michell sont récapitulés dans le tableau suivant.

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

5.3.2 Équation de Beltrami-Michell

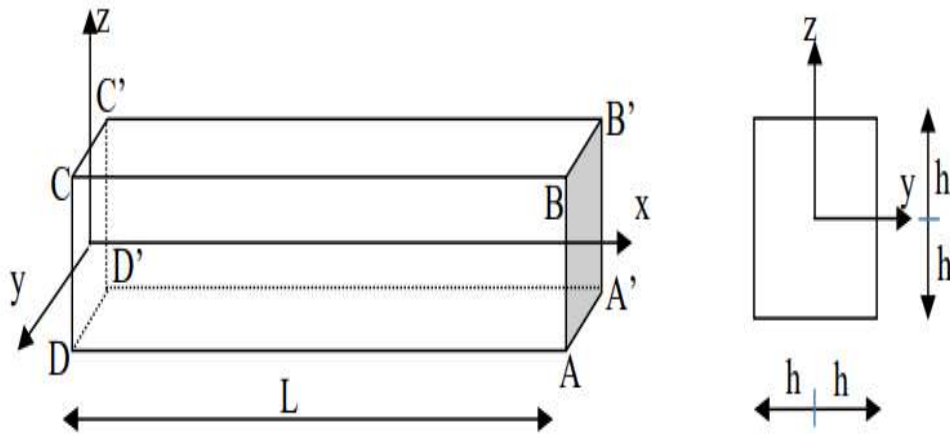
Tableau 5.6 : Équations de Beltrami-Michell

$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$	$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{xy} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial xy^2} = 0$
$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$	$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{xz} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial xz^2} = 0$
$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$	$(1 + \nu) \cdot \nabla^2 \sigma_{yz} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial yz^2} = 0$

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

5.4. Exercice: On considère un domaine pour lequel on suppose avoir le tenseur de déformations

$$\text{suivant : } [\varepsilon] = \begin{bmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & -\nu ax & 0 \\ 0 & 0 & -\nu ax \end{bmatrix} \text{ Où « a » est une constante.}$$



- 1- Calculer le tenseur de contraintes associé;
- 2- Que représente l'état de contrainte trouvé ?
- 3- Calculer les composantes du vecteur déplacements (u,v,w).

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

Solution

1- Le tenseur de contrainte associé est fourni par la loi de Hooke sous la forme de

Lamé : $\sigma_{ij} = \lambda \cdot \text{tr}\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{ij}$

Donc :

$$\sigma_{xx} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} a \cdot x(1-2\nu) + 2 \frac{E}{2(1+\nu)} a \cdot x = Eax$$

Alors

$\sigma_{xx} = Eax$	$\sigma_{yy} = 0$	$\sigma_{zz} = 0$
$\gamma_{xy} = 0$	$\gamma_{yz} = 0$	$\gamma_{zx} = 0$

2- L'état de contrainte trouvé est un état de **contrainte uni-axial** (traction ou compression) selon la direction de x.

CHAPITRE 5 : ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

3- Les déplacements (u,v,w)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = ax \Rightarrow u(x, y, z) = \frac{a}{2}x^2 + f_1(y, z)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -vax \Rightarrow v(x, y, z) = -vaxy + f_2(x, z)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -vax \Rightarrow w(x, y, z) = -vaxz + f_3(x, y)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x, z)}{\partial x} - vax = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_2(x, z)}{\partial x} = g_1(z) \\ \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} = vax - g_1(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_2(x, z) = g_1(z) \cdot x + g_2(z) \\ f_1(y, z) = vax \frac{y^2}{2} - g_1(z)y + g_3(z) \end{cases}$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow -g'_1(z) \cdot y + g'_3(z) - vax + \frac{\partial f_3(x, y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f_3(x, y)}{\partial x} = g'_1(z) \cdot y - g'_3(z) + vax \Rightarrow \begin{cases} c_1 = g'_1(z) \\ c_2 = -g'_3(z) + vax \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g'_1(z) = c_1z + D_1 \\ g'_3(z) = -c_2z + va \frac{z^2}{2} + D_2 \\ f_3(x, z) = c_1xy + C_2x + g_4(y) \end{cases}$$