

CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.1 Introduction

La loi de comportement **relie** le tenseur des déformations au tenseur des contraintes. A chaque catégorie de **matériau** correspond un type de **loi**. Nous allons ici intéresser seulement aux matériaux **homogènes** et **isotropes** dans leur domaine **élastique linéaire** et donc à la **loi de Hooke**.

On dit que le milieu est **élastique** si les **contraintes** ne **dépendent** que des **déformations**. La relation liant les tenseurs des contraintes au tenseur des déformations en tout point M du solide, est dite donc **loi de comportement**.

$$[\sigma] = f\{\varepsilon\}$$

CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

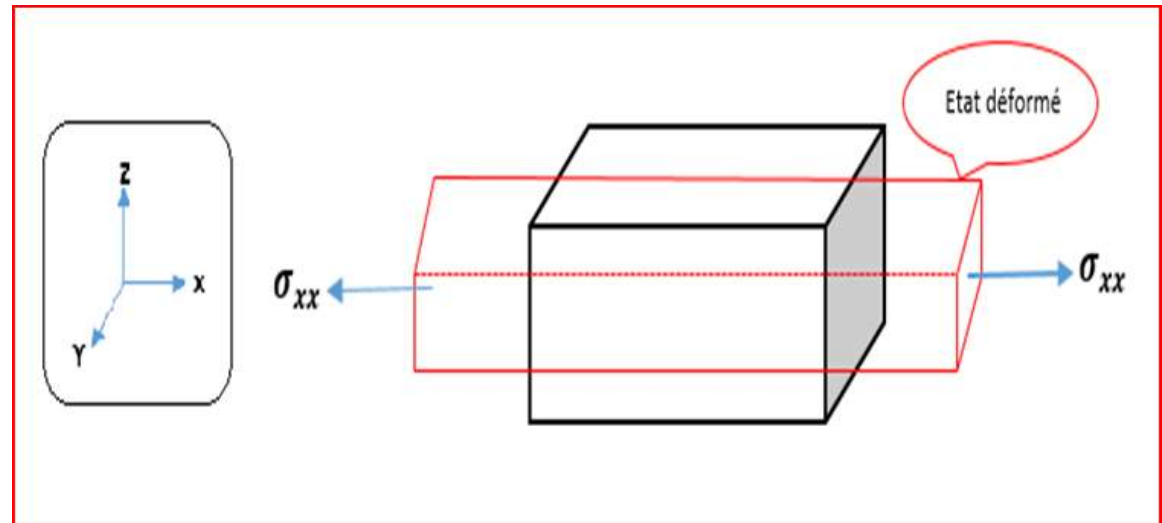
4.2 Loi de Hooke généralisée

Dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations, la loi de Hooke généralisée décrit le **comportement rhéologique** d'un solide **élastique** quelconque. Soit un point d'un matériau supportant un état de contrainte triaxial $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ engendrant les déformations $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$. Les contraintes sont liées aux déformations par la **loi de Hooke** ($\sigma = E \cdot \epsilon$ en traction) et le coefficient de **Poisson** ν tel que ($\epsilon_{latérale} = -\nu \cdot \epsilon_{longitudinale}$).

4.2.1 Effet des contraintes normales

on considère un solide élastique soumis

Uniquement à des contraintes normales σ_{xx}



CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.2 Loi de Hooke généralisée

4.2.1 Effet des contraintes normales

Il s'agit de déterminer les déformations selon les trois axes : \vec{x} , \vec{y} et \vec{z}

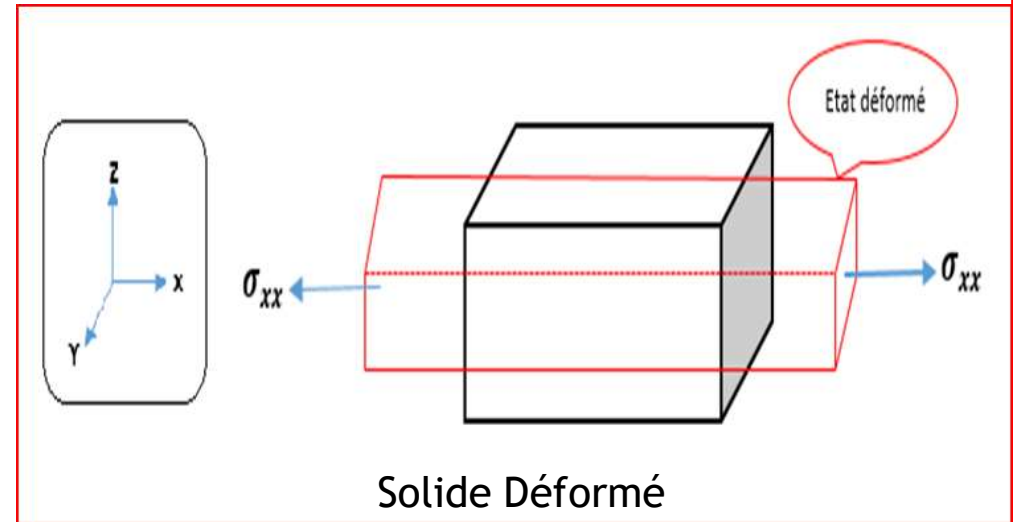
a) Axe \vec{x} :

En utilisant la loi de Hooke on obtient ce qui suit :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

Où :

E : Module d'élasticité longitudinal (module de Young)



CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.2.1 Effet des contraintes normales

b) Axe \vec{y} et \vec{z}

En utilisant la loi de **Poisson**, on obtient :

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \cdot \varepsilon_{xx} \Rightarrow \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

Où :

ν : Coefficient de dilatation transversal (coef de Poisson).

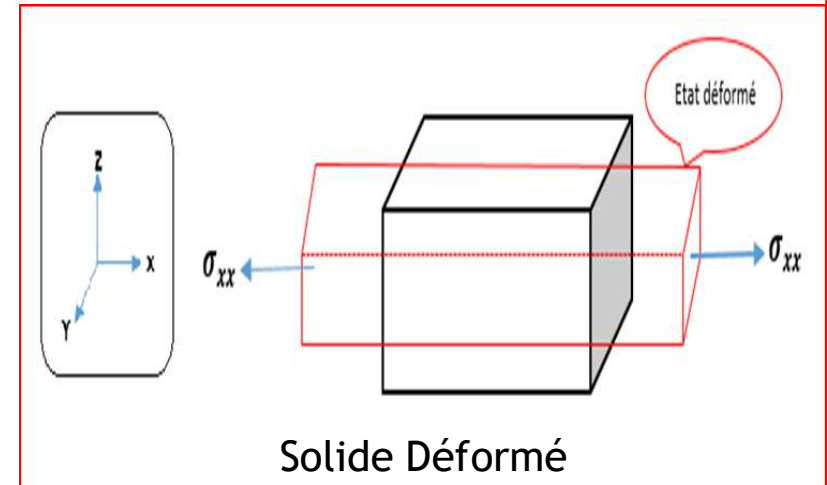
Par analogie on peut déduire ce qui suit :

Axe \vec{y} :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$$

Axe \vec{z} :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$$



CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.2.1 Effet des contraintes normales

Généralisation :

Soit un solide élastique soumis aux contraintes normales σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{zz} . En utilisant le principe de superposition, les déformations $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ et ε_{zz} s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{array} \right. \Rightarrow \text{Loi de Hooke généralisée}$$

CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.2.1 Effet des contraintes normales

Généralisation :

Soit un solide élastique soumis aux contraintes normales σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} . En utilisant le principe de superposition, les déformations ε_{xx} , ε_{yy} et ε_{zz} s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \Rightarrow \text{Loi de Hooke généralisée}$$

Remarque : Les contraintes normales provoquent uniquement les déformations linéaires.

Résultat :

$$\varepsilon_{\text{moy}} = \sigma_{\text{moy}} \left(\frac{1-2\nu}{E} \right)$$

CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.2.3. Effet des contraintes tangentielles

Soit un solide élastique soumis uniquement à la contrainte tangentielle τ_{xy} ou τ_{yx} selon la figure suivante:

Sous l'effet des contraintes de cisaillement τ_{xy} ou τ_{yx}

l'angle droit (\widehat{xy}) varie de $2\varepsilon_{xy} = \gamma_z$. Dans le

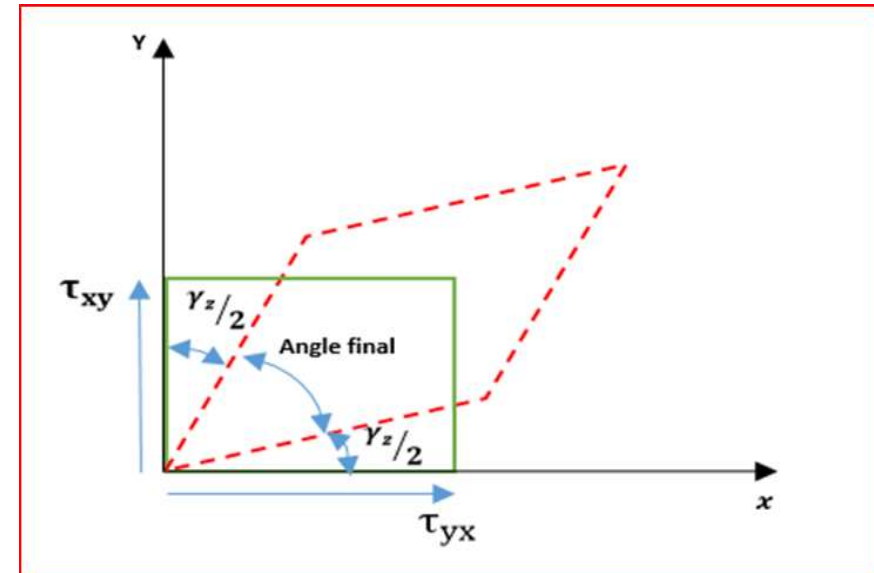
domaine élastique on utilise la loi de Coulomb :

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_z .$$

G : Module d'élasticité transversal ou le module de Coulomb.

Dans le cas général les déformations angulaires correspondantes s'écrivent :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2 \cdot G}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2 \cdot G}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2 \cdot G}$$



CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.3.Loi de comportement

L'état de contrainte et l'état de déformations en un point seront représentés par un vecteur à six composantes « notation de Voigt »

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}\}$$

Pour un matériau isotrope dont en un point donné du solide, les déformations et les contraintes sont liées par la relation (loi de comportement) suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \\ \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}; \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \end{array} \right.$$

CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.3.Loi de comportement

Où : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module d'élasticité transversal. ($0 < \nu < 0.5$)

Avec ces notations la loi de comportement s'écrit : $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$

Où la matrice $[D]$ des coefficients élastiques est égale à :

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (\text{les coefficients de Lamé})$$

. Inversement on a : $\mathbf{E} = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.4. Influence de la température

Pour un matériau isotrope subit une variation de température, la loi de comportement liant les déformations avec les contraintes est donnée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) + \alpha \cdot \Delta T \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) + \alpha \cdot \Delta T \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) + \alpha \cdot \Delta T \\ \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}; \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \end{array} \right.$$

Où : α : Coefficient de dilatation thermique; ΔT : Variation de la température.

Donc la loi de comportement peut s'écrire sous la forme :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} + \{\sigma_{th}\}$$

CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.5. Critères de limites élastiques

Au moment de la conception des structures ou des machines, il est souvent nécessaire de mettre une limite supérieure aux contraintes aux contraintes sollicitant les matériaux.

4.5.1 Critère de Rankine ou de la contrainte normale maximale

Dans ce critère le domaine élastique est défini par la relation :

$$\sigma_R = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq \sigma_E$$

La quantité σ_R est appelée contrainte équivalente de Rankine ou de la contrainte normale maximale.

Le critère s'écrit :

- $|\sigma| \leq \sigma_E$ pour un état de **traction simple** ;
- $|\tau| \leq \sigma_E$ pour un état de **cisaillement pur**, ce qui impose $\sigma_E = \tau_E$ où τ_E est la limite élastique au cisaillement pur.

CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

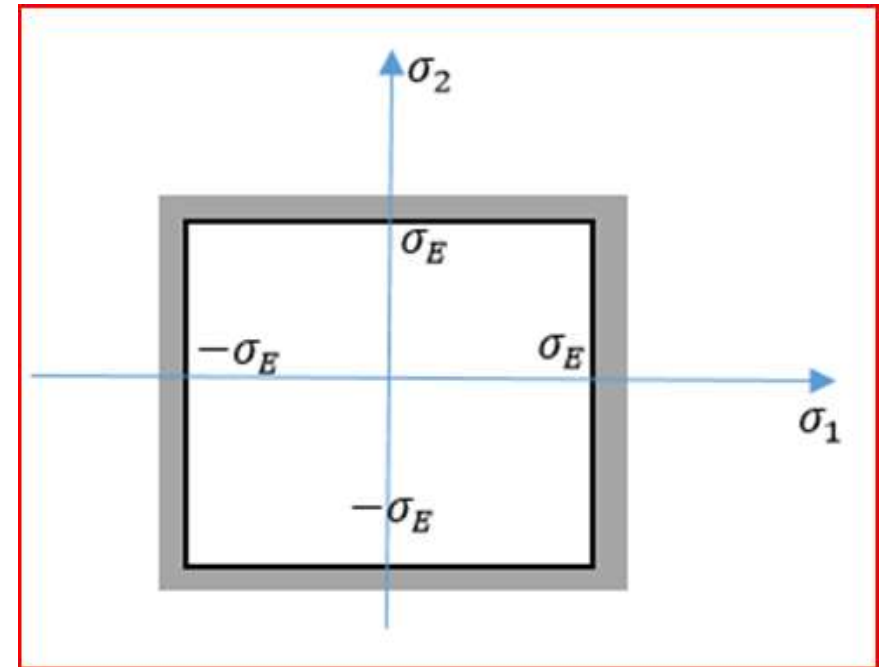
4.5. Critères de limites élastiques

4.5.1 Critère de Rankine ou de la contrainte normale maximale

Pour un état plan de contrainte ($\sigma_3 = 0$) la contrainte équivalente de Rankine se réduit à :

$$\sigma_R = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|) \leq \sigma_E$$

Le domaine élastique est représenté sur la figure suivante



CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.5. Critères de limites élastiques

4.5.2 Critère de Tresca ou de cisaillement maximal

Le domaine élastique pour ce critère est défini par la relation :

$$\sigma_T = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 2\tau_{max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_E$$

La valeur σ_T est appelée **contrainte équivalente de Tresca**.

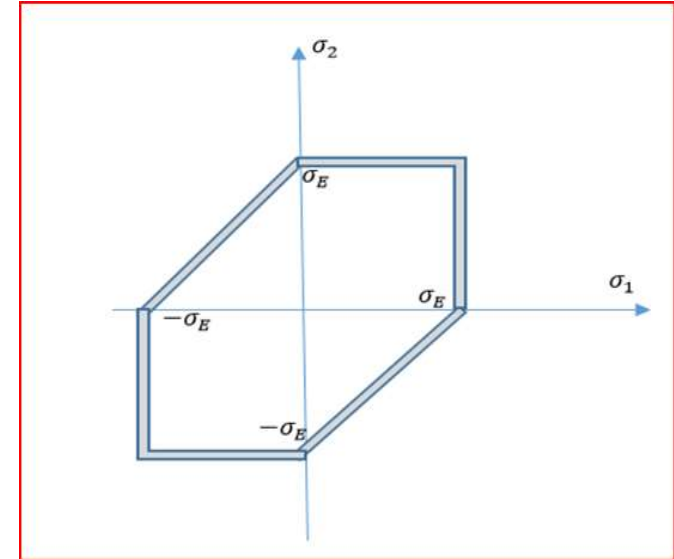
Ce critère s'écrit :

- $|\sigma| \leq \sigma_E$; pour un état de **traction simple** ;
- $|2\tau| \leq \sigma_E$; pour un état de **cisaillement pur**, ce qui impose : $\tau_E = \sigma_E / 2$.

Pour un **état plan de contrainte** ($\sigma_3 = 0$) la contrainte de Tresca se réduit à :

$$\sigma_T = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|)$$

Le domaine élastique est représenté sur la figure suivante:



CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.5. Critères de limites élastiques

4.5.3 Critère de Vons Mises

Ce critère est défini par : $\sigma_{VM} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2)} \leq \sigma_E$

Où : σ_{VM} est la contrainte équivalente de Von Mises. Le critère s'écrit

- $|\sigma| \leq \sigma_E$; pour un état de **traction simple** ;
- $\sqrt{3}|\tau| \leq \sigma_E$; pour un état de **cisaillement pur**, ce qui impose : $\tau_E = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_E = 0.58\sigma_E$

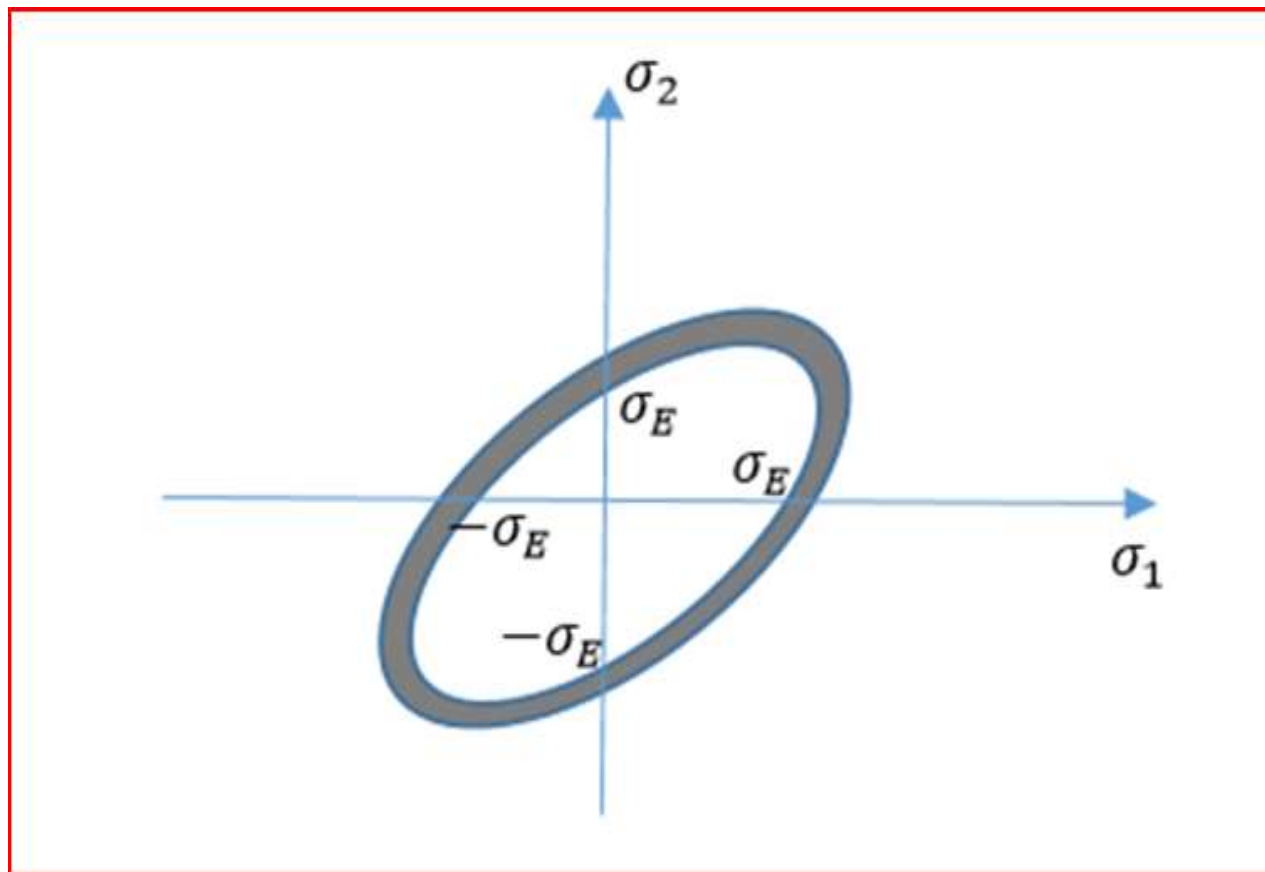
Pour un **état plan** de contrainte ($\sigma_3 = 0$) la contrainte équivalente de Von Mises se réduit à :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$$

CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.5. Critères de limites élastiques

4.5.3 Critère de Vons Mises



CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.6. Exercices

Exercice N°01

Sous les charges (F_1, F_2, F_3), on mesure les déformations en un point d'un solide à l'aide d'une rosette à 60° . On demande ce qui suit :

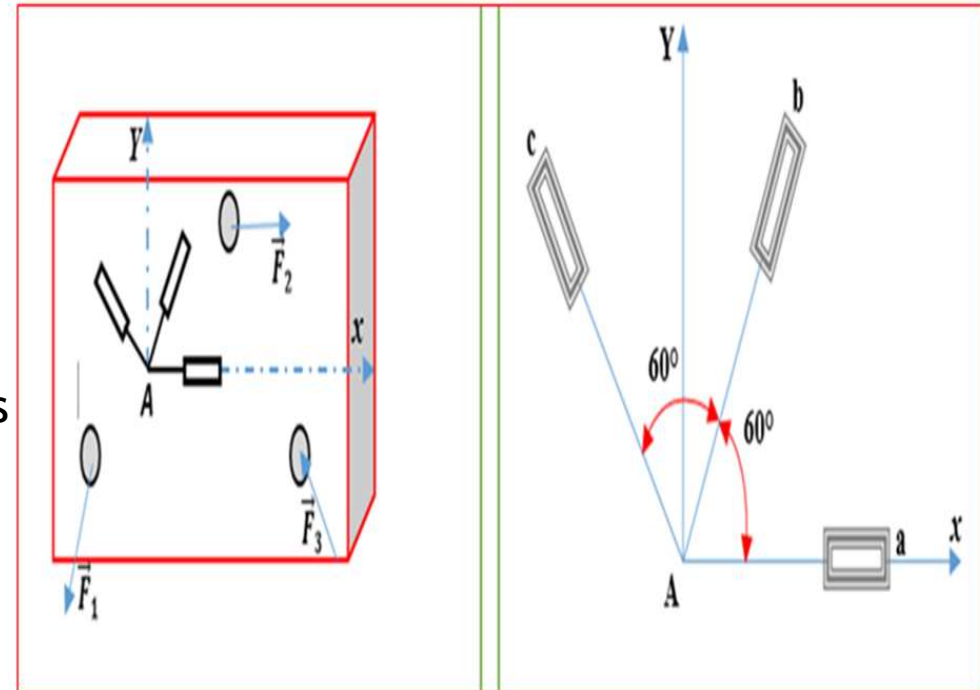
a. Déterminer $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ et les déformations principales

ε_1 et ε_2 si :

$$\varepsilon_A = 120.10^{-6}, \quad \varepsilon_B = 260.10^{-6}, \quad \varepsilon_C = 400.10^{-6}$$

a. Déterminer les contraintes principales en A si :

$$E = 200GPa, \quad \nu = 0.3.$$



CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

4.6. Exercices

$$\varepsilon_x = \varepsilon_A = 120.10^{-6} , \varepsilon_y = \frac{1}{3}(2\varepsilon_B + 2\varepsilon_C - \varepsilon_A) = \frac{1}{3}(2.60.10^{-6} + 2.400.10^{-6} - 120.10^{-6}) = 400.10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}((260 - 400)10^{-6}) = -162.10^{-6}$$

Les contraintes principales : $\varepsilon_1 = 422.10^{-6}$; $\varepsilon_2 = 98.10^{-6}$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \Rightarrow 84,4.10^6 = \sigma_1 - 0.3\sigma_2 \quad \dots (1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \Rightarrow 19.6.10^6 = \sigma_2 - 0.3\sigma_1 \quad \dots (2)$$

La résolution des équations (1) et (2) donne :

$$\sigma_1 = 99.2 \text{ MPa} ; \sigma_2 = 49.5 \text{ MPa}$$

CHAPITRE 4 : RELATION CONTRAINTES DEFORMATIONS ET LOI DE COMPORTEMENT

Exercice N°:02

Les contraintes en un point critique d'un composant de machine en acier sont :

$$\sigma_{xx} = 100 \text{ MPa} ; \sigma_{yy} = -60 \text{ MPa} \text{ et } \tau_{xy} = 60 \text{ MPa.}$$

Si la limite élastique de l'acier utilisé $R_e = 300 \text{ MPa}$; déterminer le coefficient de sécurité CS adopté par rapport aux critères de Tresca et de Von Mises.

Solution

En utilisant le cercle de Mohr, les contraintes principales sont :

$$\sigma_1 = 120 \text{ MPa} ; \sigma_2 = -80 \text{ MPa}$$

$$\text{Critère de Tresca } |\sigma_1 - \sigma_2| = 200 \leq R_e \Rightarrow C_{S1} = \frac{R_e}{200} = 1.5$$

Pour la contrainte maximale de cisaillement on a :

$$\tau_{max} = 100 \leq \frac{R_e}{2} = 150 \text{ donne le même coefficient de sécurité.}$$

$$\text{Von Mises : } \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 174.36 = \left(\frac{R_e}{C_{S2}}\right)^2 = \frac{300}{C_{S2}} \Rightarrow C_{S2} = 1.72$$