

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.1 Généralités sur les déformations

L'analyse des **déformations** en un **point** d'une **structure** ou d'un **objet** et leurs **méthodes** de **transformation** sont analogues à celles des **contraintes** du chapitre précédent. Les **relations établies** sont particulièrement **utiles** aux **études expérimentales** à partir des **jauges** de contraintes. En effet, les jauges étant **orientées** et **collées** dans des **directions données**, il est souvent de transformer et manipuler les résultats obtenus.

3.2 Définition d'une déformation

Sous l'action des **forces** appliquées, les **points** d'un solide **se déplacent**, il en résulte : **déformation linéaire** et déformation **angulaire** par rapport à $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

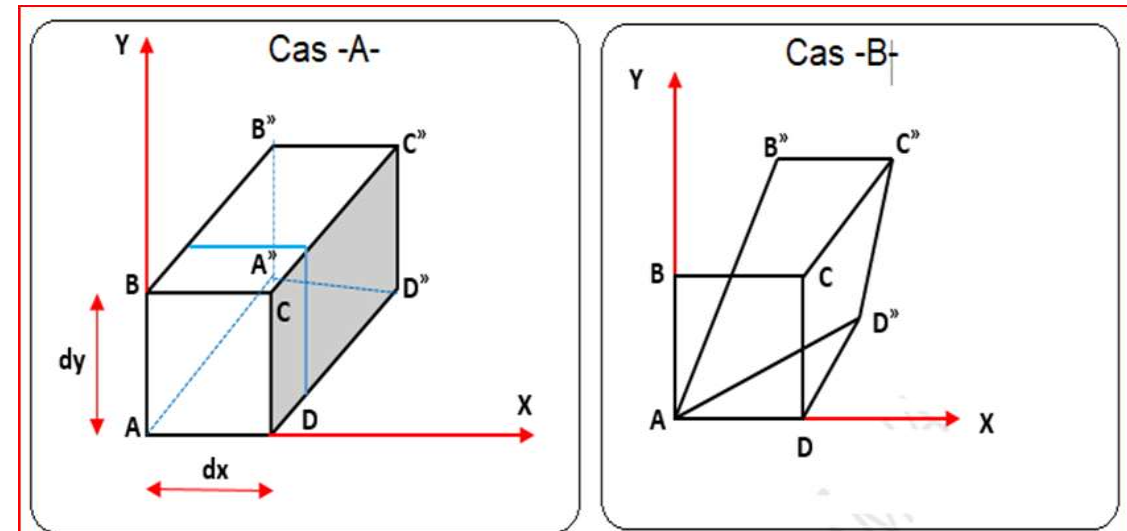
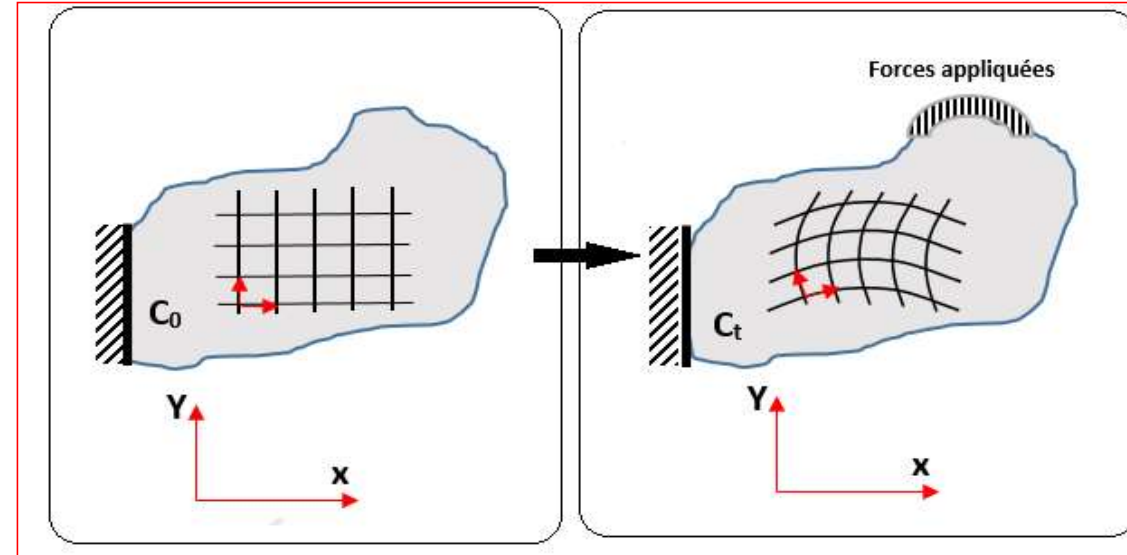
CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.1.1 Définition d'une déformation

Sous l'action des **forces** appliquées, les **points** d'un solide **se déplacent**, il en résulte : **déformation linéaire** et déformation **angulaire** par rapport à $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Remarque :

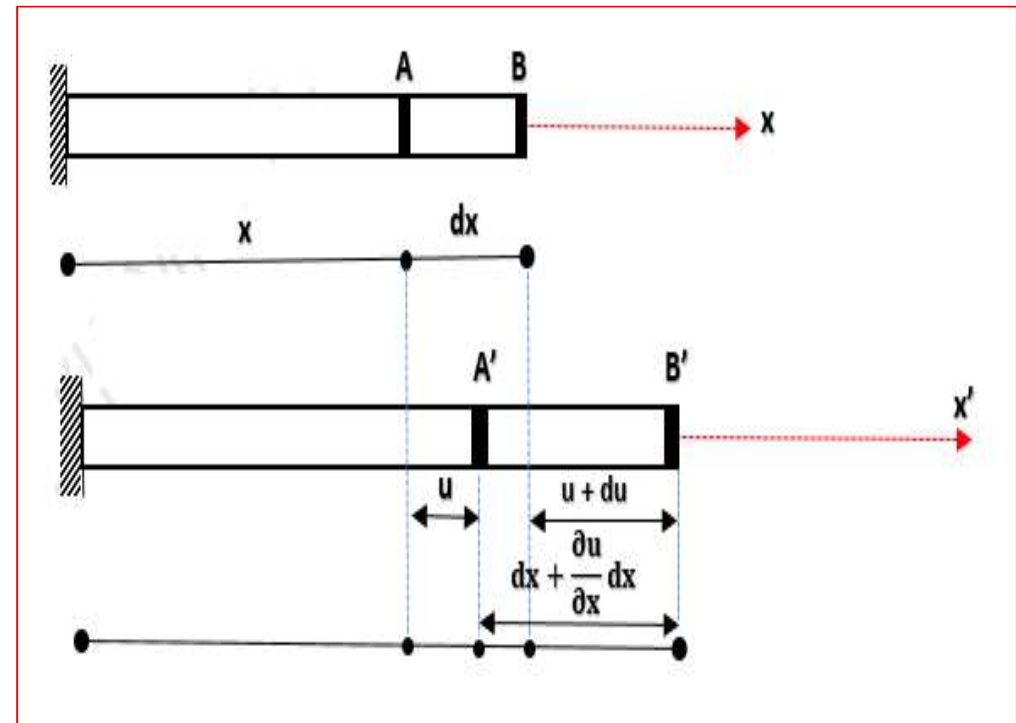
Si **tous les points** d'un solide sont **déplacés** de la **même grandeur** le solide **ne se déforme pas** (Cas -A-). Or, si **ses points ne se déplacent pas de la même grandeur**, le solide **se déforme** (Cas-B-).



CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.1.2 Déformation linéaire relative (extension)

La **déformation linéaire relative** désignée par " ϵ_{ii} ", est le **rapport** du **déplacement différentiel** dans la direction « \vec{i} » sur la **longueur élémentaire** d'un **segment** « i ». Soit le segment **AB** dans la direction **x**, dont les **déplacements** par rapport à : \vec{x}, \vec{y} et \vec{z} sont **u, v** et **w**.



Déformation linéaire d'un solide

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.1.2 Déformation linéaire relative (extension)

Selon cette figure on peut constater ce qui suit :

a)- Etat initial :

Segment (AB) = dx ,

$$\text{d'où } \begin{cases} A & \rightarrow A' \\ B & \rightarrow B' \end{cases}$$

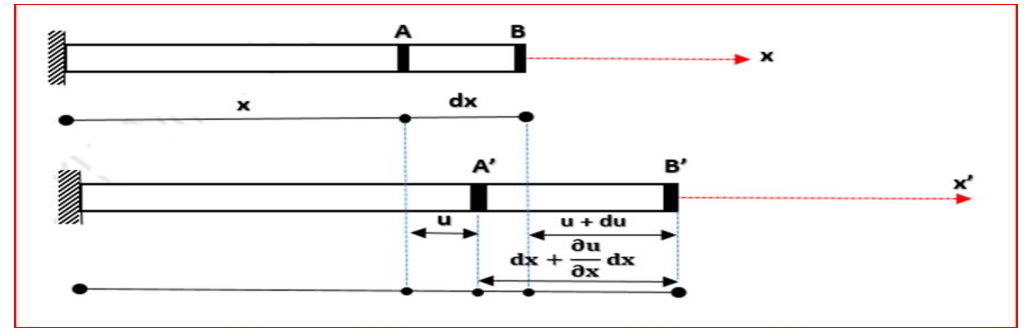
b)- Etat final :

Segment (A'B') = $dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$

Par définition la déformation relative linéaire : $\epsilon_{xx} = \frac{(A'B') - (AB)}{(AB)}$

Donc : $\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$, et par analogie, la déformation linéaire relative dans les directions \vec{y} et \vec{z} sont :

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$



=> déplacement u

=> déplacement $u + du$

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.1.2 Déformation linéaire relative (extension)

Résultat :

La déformation relative linéaire dans les directions \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} , est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right.$$

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

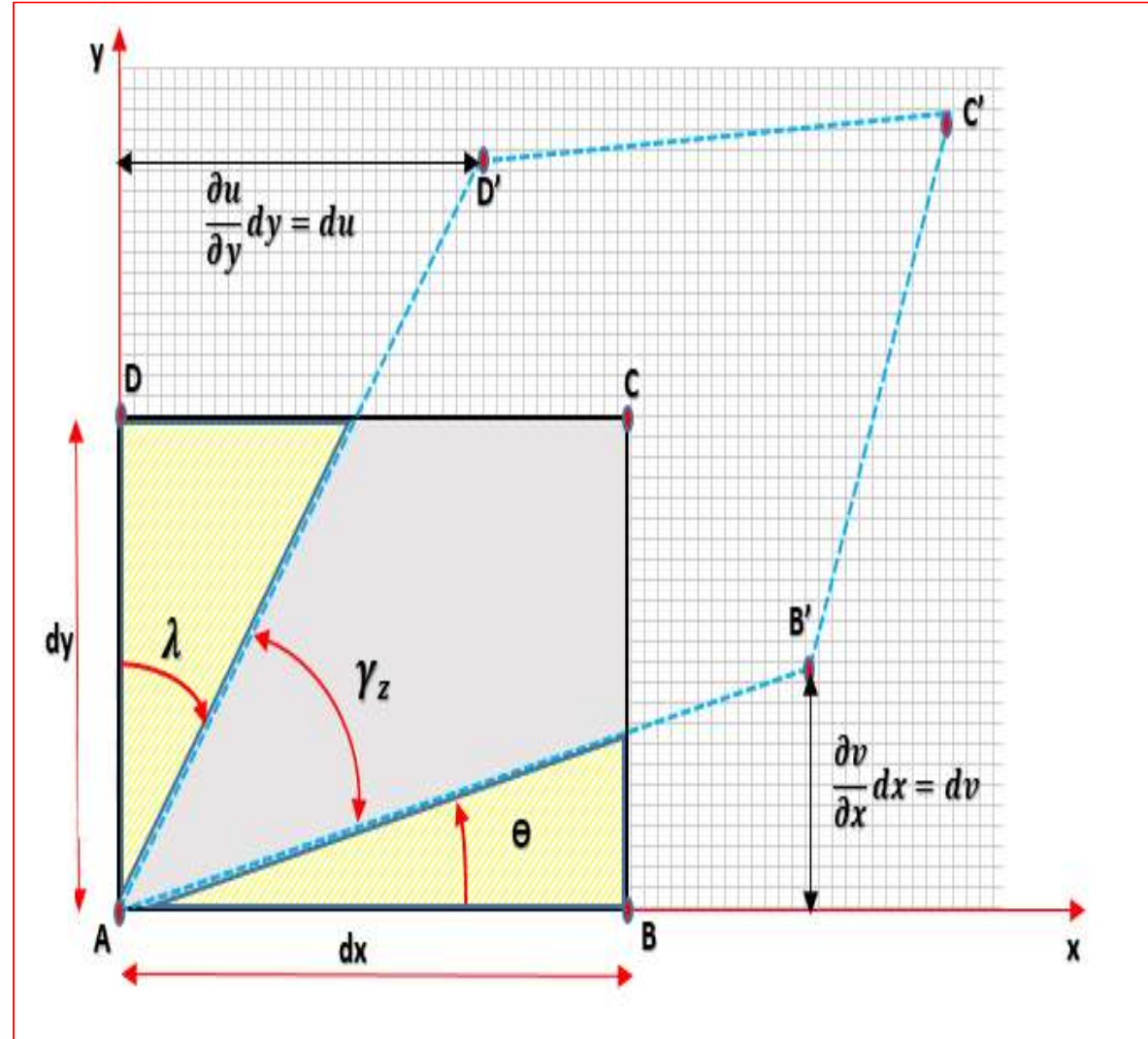
3.1.3 Déformation angulaire (distorsion)

La déformation **angulaire** désignée par " ε_{ij} " avec ($i \neq j$), représente la demi variation de l'angle (\vec{i}, \vec{j}) initialement égale à $(\frac{\pi}{2})$.

On remarque que de l'état **initial** à l'état **final** l'angle $(\vec{x}, \vec{y}) = \pi/2$, est passé à la valeur γ_z .

Soit : $\tan \theta \approx \theta \approx \frac{\partial v}{\partial x}$
 \Rightarrow (petites déformations) $\Rightarrow [\theta]$ en rad. Et donc

$$\tan \lambda \approx \frac{\partial u}{\partial y}$$



CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.1.3 Déformation angulaire (distorsion)

Comme résultat, on peut déterminer la valeur de " ϵ_{xy} " :

$$\begin{aligned}\epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(\lambda + \theta) = \frac{1}{2}\gamma_z \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

Par analogie, les variations angulaires dans les plans (x,y) et (y,z), s'écrivent :

$$\begin{cases} \epsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\gamma_y \\ \epsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\gamma_x \end{cases}$$

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.1. Tenseur de déformation

En connaissant les trois **composantes diagonales** qui caractérisent les **allongements** dans les **directions des axes** et les trois **composantes non diagonales** qui caractérisent les **glissements ou distorsions**, on peut déterminer le **tenseur** de déformations dans une base orthonormée pour un point M donné, ce tenseur est **symétrique** d'ordre deux peut se réduire à :

$$[\varepsilon(M)]_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.2. Transformation des angles et des longueurs

L'allongement unitaire et dilatation en un point 'M' d'un solide dans une direction \vec{n} , s'écrivent :

$$\diamond \varepsilon(M, \vec{n}) \approx \{n\}^t [\varepsilon] \{n\} = \varepsilon_{xx} n_x^2 + \varepsilon_{yy} n_y^2 + \varepsilon_{zz} n_z^2 + \gamma_{xy} n_x \cdot n_y + \gamma_{xz} n_x \cdot n_z + \gamma_{yz} n_y \cdot n_z.$$

$$\diamond \lambda(M, \vec{n}) \approx 1 + \{n\}^t [\varepsilon] \{n\}.$$

Si \vec{n} est l'un des axes : \vec{i} , \vec{j} , ou \vec{k} , on obtient :

$$\triangleright \varepsilon(M, \vec{i}) \approx \varepsilon_{xx} ; \quad \varepsilon(M, \vec{j}) \approx \varepsilon_{yy} ; \quad \varepsilon(M, \vec{k}) \approx \varepsilon_{zz} .$$

$$\triangleright \lambda(M, \vec{i}) \approx 1 + \varepsilon_{xx} ; \quad \lambda(M, \vec{j}) \approx 1 + \varepsilon_{yy} ; \quad \lambda(M, \vec{k}) \approx 1 + \varepsilon_{zz} .$$

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

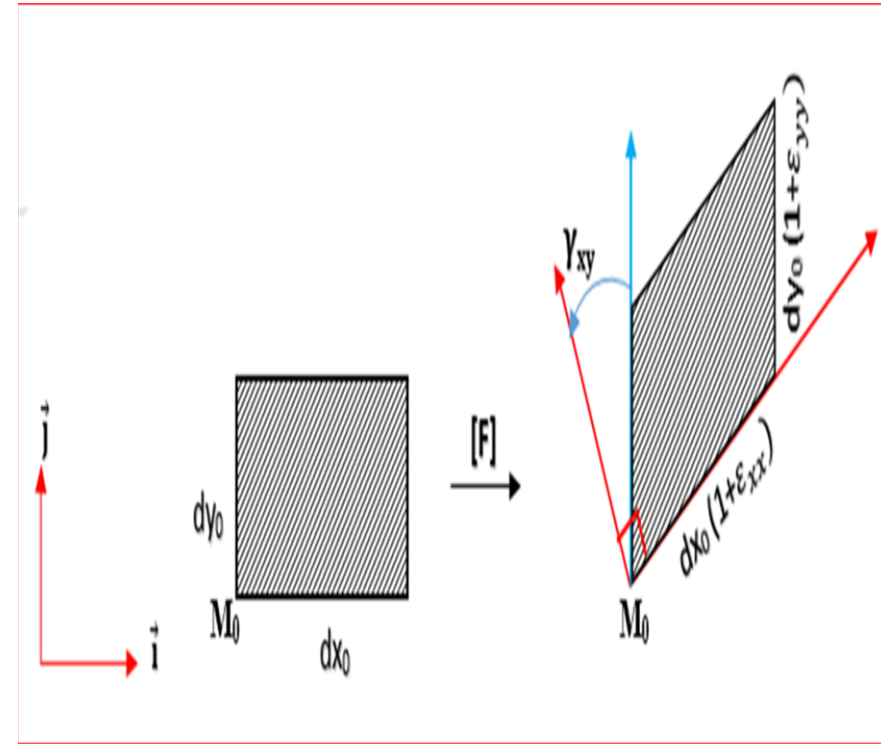
3.2. Transformation des angles et des longueurs

Remarque : Le **glissement** en point M dans les directions orthogonales \vec{n} et \vec{n}' est

$$\gamma(M, \vec{n}, \vec{n}') = 2\{n'\}^t [\varepsilon] \{n\}$$

Si \vec{n} et \vec{n}' sont l'un des axes : \vec{i} , \vec{j} ou \vec{k} , on obtient :

$$\gamma(M, \vec{i}, \vec{j}) = \gamma_{xy}, \quad \gamma(M, \vec{i}, \vec{k}) = \gamma_{xz}, \quad \gamma(M, \vec{j}, \vec{k}) = \gamma_{yz}$$



Le volume infiniment petit dv_0 en M_0 devient dv en M :

$$dv = \det([F]) dv_0 \approx (1 + \text{tr}[\varepsilon]) dv_0 = (1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) dv_0$$

La déformation volumique en M se réduit à : $\varepsilon_v(M) = \frac{dv - dv_0}{dv_0} \approx \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \vec{u}$

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.2. Directions et valeurs principales

Le tenseur des déformations est une **matrice symétrique** à **coefficients réels**, **diagonalisable**. Donc, en un point M, et dans un repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, Le tenseur de déformation se réduit à :

$$[\varepsilon]_{\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

D'où : $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ les **déformations principales** et sont déterminées par la résolution de **l'équation caractéristique** suivante :

$$\mathit{det} ([\varepsilon(M)] - \varepsilon_i [I]) = 0$$

Où $[I]$ est la **matrice identité**.

Les dilatations principales sont : $\lambda_1 = 1 + \varepsilon_1$, $\lambda_2 = 1 + \varepsilon_2$, $\lambda_3 = 1 + \varepsilon_3$

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.4. Représentation géométrique des déformations (Cercle de Mohr)

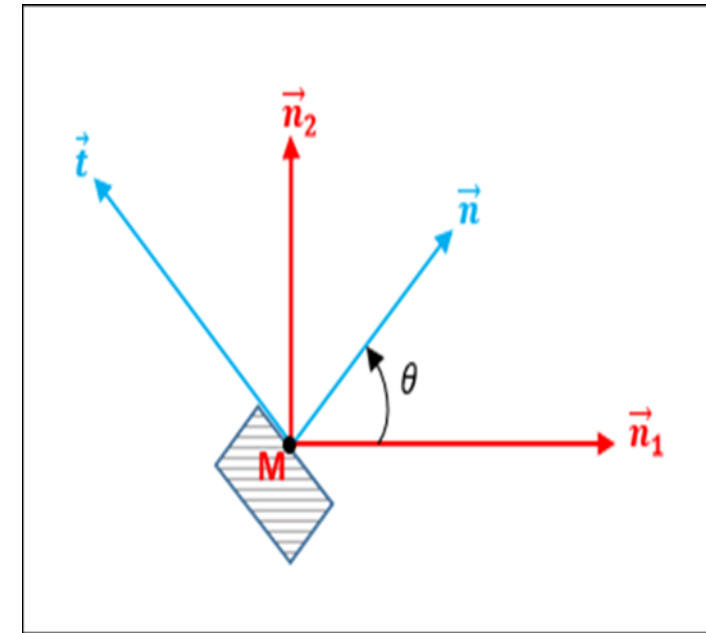
On considère un repère principal $\{M; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ en point M. Supposons la famille de facettes passant par la direction principale \vec{n}_3 .

Soit :

- $\vec{n}(\cos\theta, \sin\theta, 0)$: un vecteur faisant avec \vec{n}_1 un angle θ .
- $\vec{t}(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$: un vecteur faisant avec \vec{n} un angle $\frac{\pi}{2}$.

Pour chaque facette \vec{n} on peut associer les deux quantités de déformations ε_n et γ_{nt} définies par les équations :

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \varepsilon(M, \vec{n}) = \{n\}^t [\varepsilon] \{n\} \\ \gamma_{nt} = \gamma(M, \vec{n}, \vec{t}) = 2\{t\}^t [\varepsilon] \{t\} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \varepsilon_n = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \\ \gamma_{nt} = -2\varepsilon_1 \cos \theta \sin \theta + 2\varepsilon_2 \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$



CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.4. Représentation géométrique des déformations

(Cercle de Mohr)

Soit :

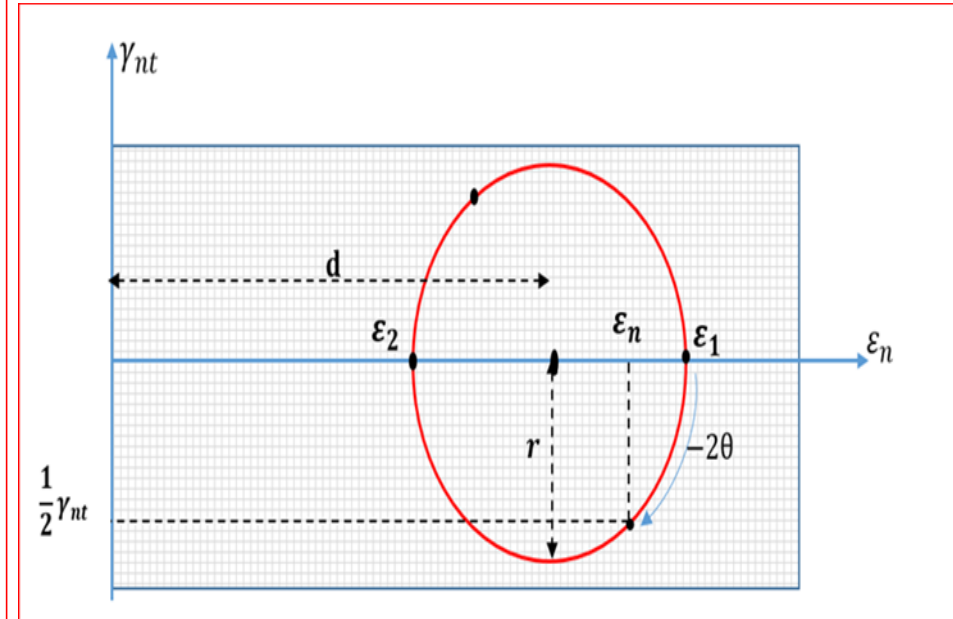
$$\begin{cases} \varepsilon_n = d + r \cdot \cos(-2\theta) \\ \gamma_{nt} = r \cdot \sin(-2\theta) \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} d = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ r = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \end{cases}$$

A chaque **facette** \vec{n} on peut associer un point $(\varepsilon_n, \gamma_{nt})$ dans un repère orthonormé.

Lorsque θ varie, ce point décrit le cercle **de centre** $(d, 0)$ et de **rayon** r .



Cercle de Mohr des déformations

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.4. Équation de compatibilité des déformations

Quand on connaît les déplacements il est simple de déterminer les déformations, mais le problème inverse n'est pas aussi simple.

La méthode directe est plutôt simple, car à partir des déplacements, on calcule directement les déformations par dérivation. Les contraintes sont ensuite directement évaluées.

On suppose dans un état plan, les déformations : ϵ_{xx} et ϵ_{yy} , fonctions des variables x et y comme connues et on cherche les deux fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ composantes de la fonction déplacement $\vec{u}(x, y)$ telles que :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 2. \epsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.4. Équation de compatibilité des déformations

En dérivant la première déformation par rapport à y et la deuxième déformation par rapport à x , deux fois, et puis en les ajoutant membre à membre, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} & (*) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} & (**) \end{cases} \Rightarrow (*) + (**) = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Comme résultat :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.4. Équation de compatibilité des déformations

En suivant le même raisonnement dans le cas général en trois dimensions, on obtient six équations de compatibilité :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} \right)$$

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.4. Mesure des déformations

Les **mesures** des **déformations** en un point (M) est généralement réalisé par un **ensemble de trois jauges** (A, B, C) encore appelé « **rosette** ». Les **jauges** sont **collées** sur la **surface (libre)** de la structure ou de l'objet et, sous charge, suivent les **déformations** de celui-ci. S'il n'y a pas de **contrainte** en surface (**pression** superficielle, etc.). Les **jauges** supportent un **état** de **contrainte plane** et non pas un **état de déformations planes**.

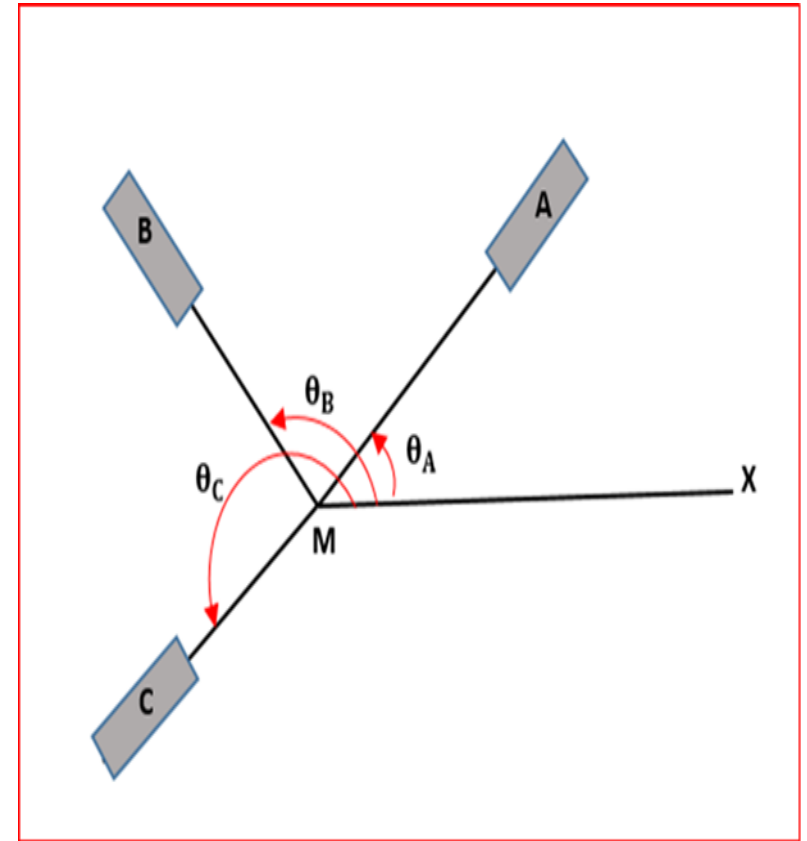
Dans le cas général, les **jauges** sont **orientées dans trois directions** définies par les angles $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ et permettant de mesurer **les déformations** $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C$ suivant ces directions. À partir de ces **valeurs** et **des équations** de transformation, il est possible de définir les déformations $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$ et γ_{xy} et les déformations principales au point M. on obtient :

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.4. Mesure des déformations

$$\begin{cases} \varepsilon_A = \varepsilon_{xx} \cos^2 \theta_A + \varepsilon_{yy} \sin^2 \theta_A + \gamma_{xy} \sin \theta_A \cos \theta_A & (1) \\ \varepsilon_B = \varepsilon_{xx} \cos^2 \theta_B + \varepsilon_{yy} \sin^2 \theta_B + \gamma_{xy} \sin \theta_B \cos \theta_B & (2) \\ \varepsilon_C = \varepsilon_{xx} \cos^2 \theta_C + \varepsilon_{yy} \sin^2 \theta_C + \gamma_{xy} \sin \theta_C \cos \theta_C & (3) \end{cases}$$

Les valeurs de ε_{xx} , ε_{yy} et γ_{xy} sont obtenues en résolvant le système de trois équations (1), (2) et (3) à trois inconnues.



Les trois jauges (A, B, C) »Rosette »

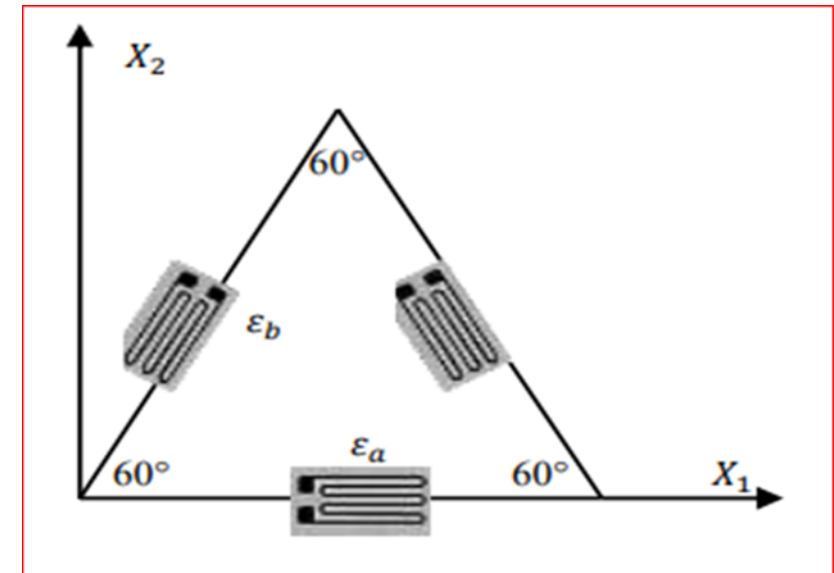
CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.5. Exercice

Soit une rosette delta de forme triangle équilatéral, permet de mesurer les dilatations longitudinales selon les trois directions parallèles aux trois côtés du triangle. Elle est disposée à la surface d'un solide homogène et isotrope, par rapport à un repère $\{O; X_1, X_2, X_3\}$, tel que montré sur la figure ci-contre.

Déterminer le tenseur des déformations planes si les valeurs mesurées sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = -3.10^{-4} \\ \varepsilon_b = 4.10^{-4} \\ \varepsilon_c = 2.10^{-4} \end{cases}$$



Les trois jauges (A, B, C) »Rosette »

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

3.5. Exercice

Solution:

Le tenseur des déformations planes est donné comme suit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

La direction de la dilatation ε_a est :

$$n_a = [\cos(0) \sin(0)] = [1 \ 0]$$

Ce qui donne :

$$\varepsilon_a = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_{xx}$$

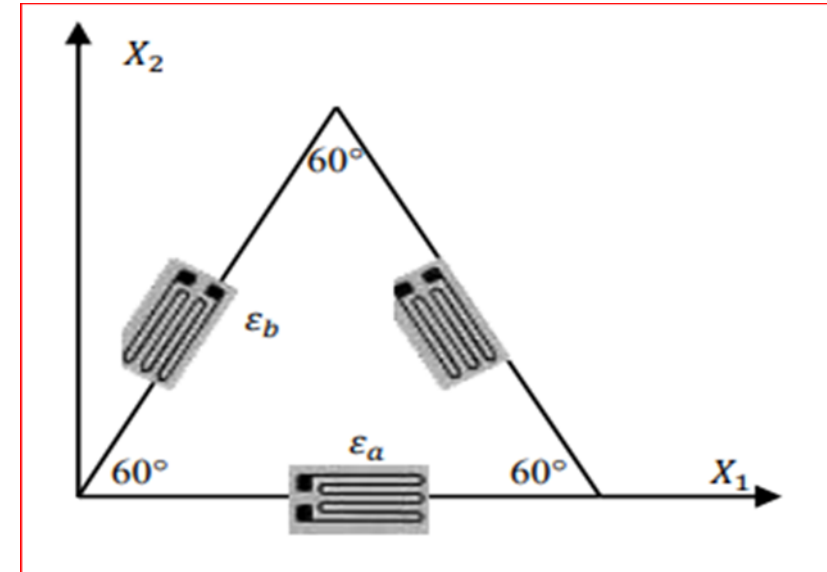
Donc :

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_a = -3 \cdot 10^{-4}$$

La direction de la dilatation ε_b :

On a :

$$n_b = [\cos(60) \sin(60)] = \left[\frac{1}{2} \ \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$



Les trois jauges (A, B, C) »Rosette »

CHAPITRE 3 : THÉORIE DE L'ÉTAT DE DÉFORMATIONS

Solution:

Ce qui nous donne :

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2} [1 \quad \sqrt{3}] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} (\varepsilon_{xx} + 2\sqrt{3} \varepsilon_{xy} + 3\varepsilon_{yy})$$

La direction de la dilatation ε_c est :

$$n_c = [\cos(120) \quad \sin(120)] = \left[-\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

Ce qui donne :

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2} [-1 \quad \sqrt{3}] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} (\varepsilon_{xx} - 2\sqrt{3} \varepsilon_{xy} + 3\varepsilon_{yy})$$

En remplaçant ε_{xx} par ε_a on obtient deux équations à deux inconnus :

$$4\varepsilon_b - \varepsilon_a = 2\sqrt{3} \varepsilon_{xy} + 3\varepsilon_{yy}$$

$$4\varepsilon_c - \varepsilon_a = -2\sqrt{3} \varepsilon_{xy} + 3\varepsilon_{yy}$$

La solution est : $\varepsilon_{yy} = 5 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_{xy} = 1,1 \cdot 10^{-4}$

Donc le tenseur de déformation s'écrit comme suit : $\begin{bmatrix} -3 \cdot 10^{-4} & 1,1 \cdot 10^{-4} \\ 1,1 \cdot 10^{-4} & 5 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$