

# CHAPITRE II

# THÉORIE DE L'ÉTAT DE CONTRAINTES

## 2.1. Introduction:

La théorie de l'élasticité est la théorie des **petites déformations continues** et **réversibles** des milieux **isotropes élastiques**. Elle étudie les **déplacements**, les **déformations** et les **contraintes** dans un **solide** soumis à des **forces extérieures**, dont elle suppose que les matériaux étudiés **possèdent les propriétés suivantes** :

- Le comportement du matériau est **linéaire** (les relations entre les contraintes et les déformations sont **linéaires**) ;
- **Élasticité** : l'évaluation du comportement du matériau reste dans le **domaine élastique** ;
- **Homogénéité** : **même propriétés physiques** pour tous les points (masse volumique, densité, Inertie.) ;
- **Isotropie** : même **propriétés élastiques** dans toutes les directions (module d'Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\nu$  etc...).

## 2.2. Tenseur de contraintes

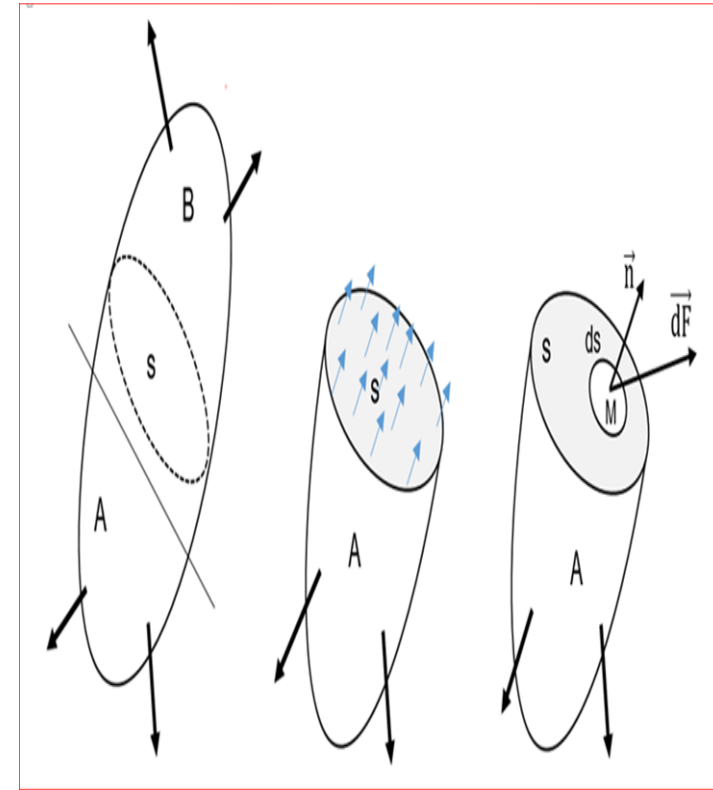
### 2.2.1 Coupure, Facette, vecteur contrainte

-Soit un solide en équilibre sous l'action d'un système de forces extérieures ( $F_1, \dots, F_n$ ) . Forces réparties sur (S).

-Coupons le corps (S) en deux parties (A) et (B), par une surface (S) passant par M.

Soit  $\vec{n}$  vecteur unitaire normal à (S) en M dirigé vers l'extérieur de (A), et  $ds$ , un élément infinitésimal de la surface (S) entourant M.

Nous appellerons cet ensemble facette en M.



Supposons que la force exercée sur cette facette est  $d\vec{F}$ . Nous appelons vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  en M, la quantité :  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{ds}$ .

## 2.2. Tenseur de contraintes

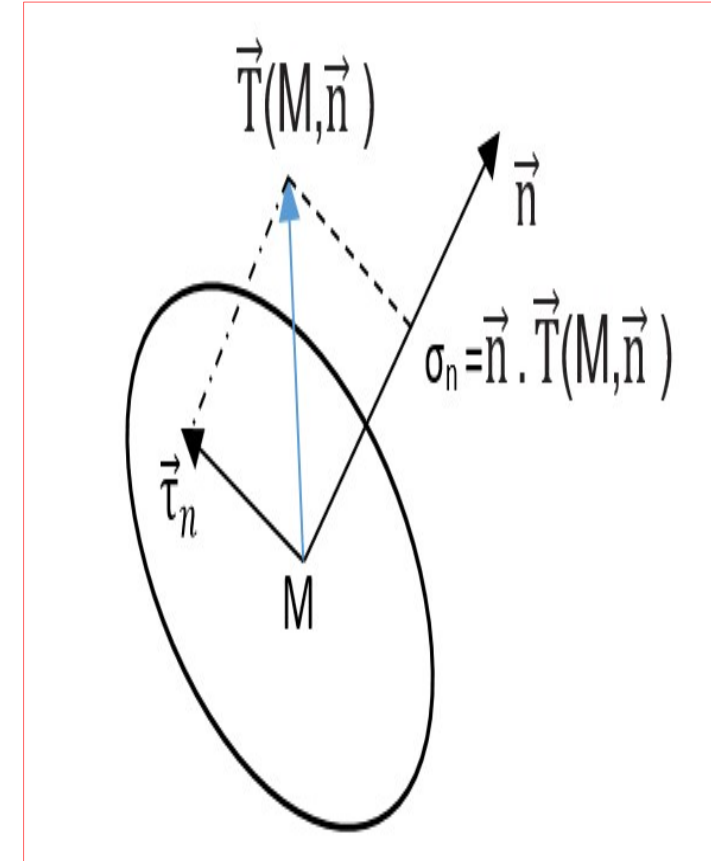
### 2.2.2 Contraintes normales et tangentielles :

La projection  $\vec{T}(M, \vec{n})$  sur l'axe  $\vec{n}$  ; nous donne une **contrainte normale**  $\sigma_n$  , et sa projection sur la **facette**  $\vec{n}$  nous donne la **contrainte tangentielle** ou de **cisaillement**  $\vec{\tau}_n$ .

dont  $\sigma_n$  représente une **valeur algébrique positive** (traction) ou **négative** (compression).

D'où:  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \cdot \vec{n} + \vec{\tau}_n$  ; Avec:  $\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$

Selon le théorème de **Pythagore** on a :  $\|\vec{T}\|^2 = \sigma_n^2 + \|\vec{\tau}_n\|^2$



### Remarque

En fonction de  $\sigma_n$  et  $\vec{\tau}_n$  , on peut connaitre l'état de contrainte d'une facette donnée.

## 2.2. Tenseur de contraintes

### 2.2.2 Tenseur de contraintes (formule de Cauchy)

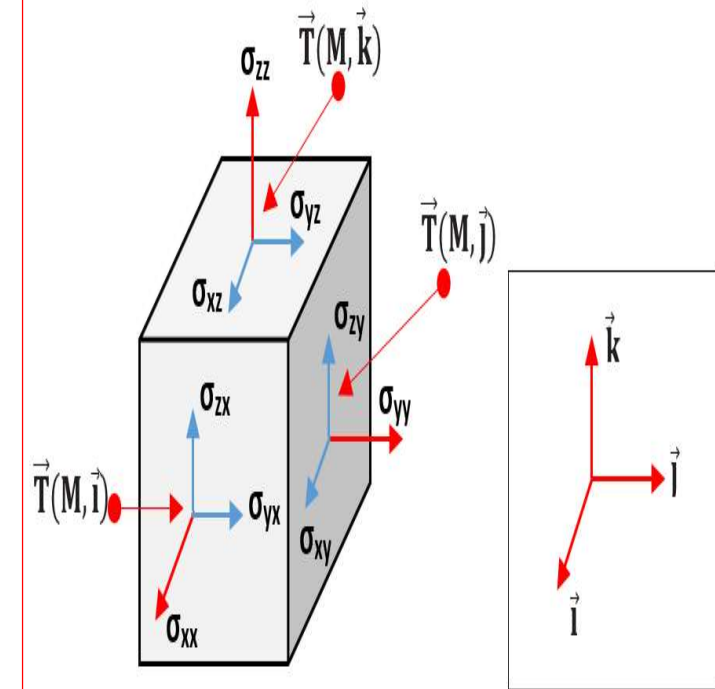
$$\{\vec{T}(M, \vec{n})\} = [\{\vec{T}(M, \vec{i})\} \ \{\vec{T}(M, \vec{j})\} \ \{\vec{T}(M, \vec{k})\}] \{\vec{n}\}$$

$$\{\vec{T}(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)] \{\vec{n}\} \longrightarrow \text{Formule de Cauchy}$$

Où:  $[\sigma(M)]$  : est le **tenseur** des **contraintes** en point  $M$ .

Les composantes du  $[\sigma(M)]$  dans le repère  $\{M; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , sont:

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Les composantes du vecteur  $\{\vec{T}(M, \vec{n})\}$  sont données comme suit :

$$\{\vec{T}(M, \vec{n})\} = (\sigma_{xx} \cdot n_x + \sigma_{xy} \cdot n_y + \sigma_{xz} \cdot n_z) \vec{i} + (\sigma_{yx} \cdot n_x + \sigma_{yy} \cdot n_y + \sigma_{yz} \cdot n_z) \vec{j} + (\sigma_{zx} \cdot n_x + \sigma_{zy} \cdot n_y + \sigma_{zz} \cdot n_z) \vec{k}$$

## 2.2. Tenseur de contraintes

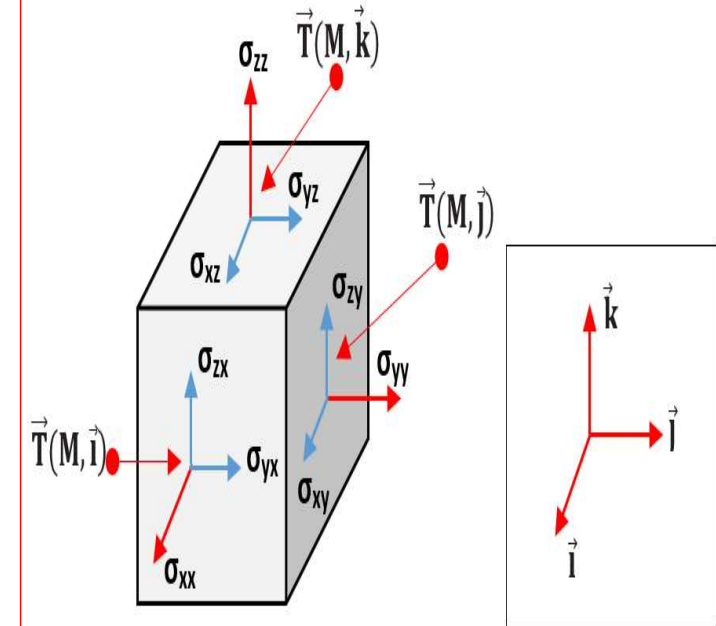
### 2.2.2 Tenseur de contraintes (formule de Cauchy)

La contrainte normale sur la facette  $\vec{n}$  en M, est égale à :

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^t [\sigma(M)] \{n\}$$

On remarque sur la facette  $\vec{i}$ , le vecteur contrainte est :

$$\vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx} \vec{i} + \sigma_{yx} \vec{j} + \sigma_{zx} \vec{k}$$



D'où la contrainte normale, et le vecteur cisaillement sur cette facette sont :

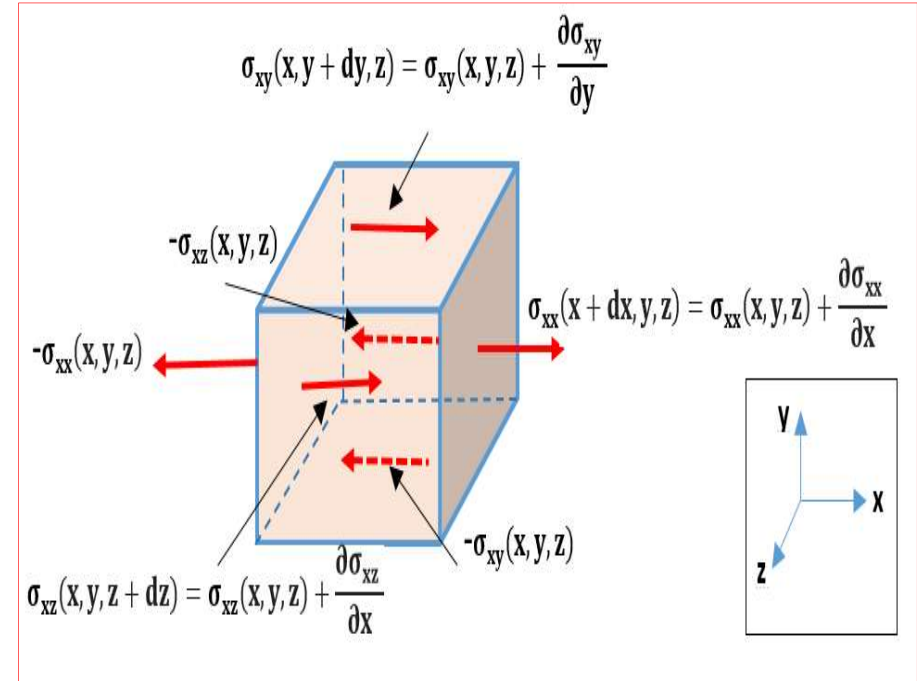
$$\sigma_i = \vec{i} \cdot \vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx}$$

$$\vec{\tau}_i = \sigma_{yx} \cdot \vec{j} + \sigma_{zx} \cdot \vec{k}$$

## 2.3. Équations différentielles d'équilibre

### 2.3.1. Équilibre en translation

Soit le **parallélépipède rectangle** infiniment petit de centre **M** et de cotés **dx**, **dy** et **dz**. La projection sur **x** de **la somme des forces** appliquées au parallélépipède est **nulle**, la figure suivante, présente les **contraintes** qui interviennent.



$$\sum F_{\text{ext}} / x = 0$$

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_{xx}(x, y, z)dy \cdot dz + \sigma_{xx}(x + dx, y, z)dy \cdot dz - \sigma_{xy}(x, y, z)dx \cdot dz + \sigma_{xy}(x, y + dy, z)dx \cdot dz \\
 & -\sigma_{xz}(x, y, z)dx \cdot dy + \sigma_{xz}(x, y, z + dz)dx \cdot dy + f_x dx \cdot dy \cdot dz = 0 \dots\dots\dots(*)
 \end{aligned}$$

## 2.3. Équations différentielles d'équilibre

### 2.3.1. Équilibre en translation

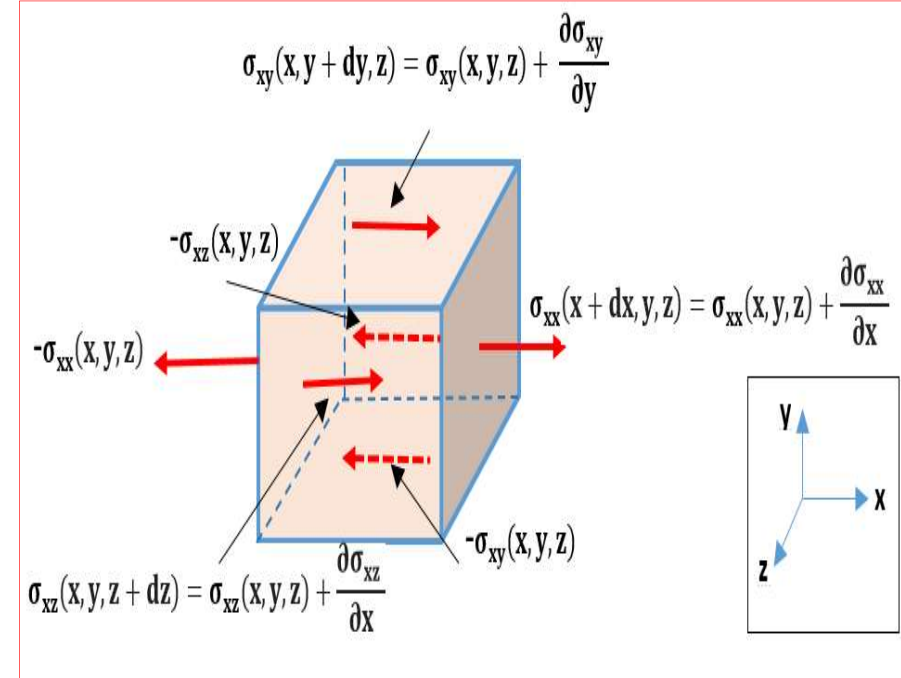
En négligeant les termes d'ordre supérieur, et On a :

$dv = dx \cdot dy \cdot dz$ . (volume du parallélépipède), l'équation (\*) vient après simplification comme suit :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$$



Généralisation

## 2.3. Équations différentielles d'équilibre

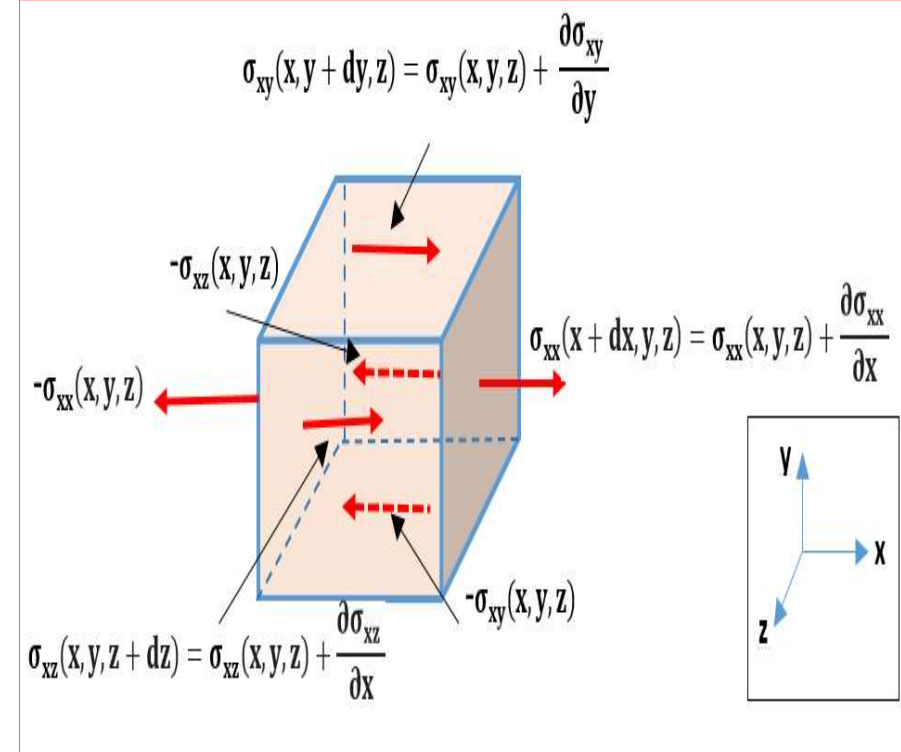
### 2.3.1. Équilibre en translation

Ces équations peuvent s'écrire sous **forme condensée**:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

En cas **d'accélération**, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \cdot \ddot{\gamma}$$



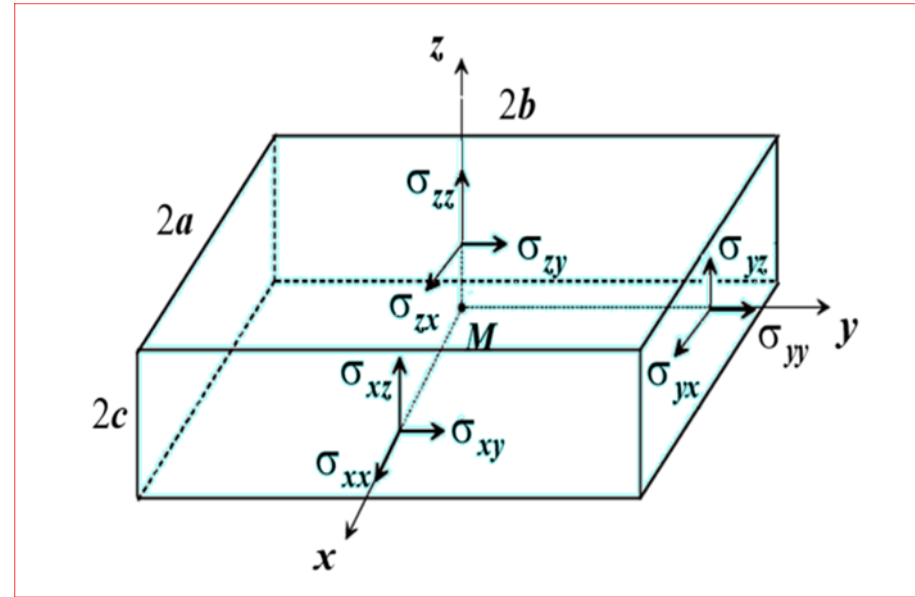
Où :  $\rho$  : est le poids volumique

$\ddot{\gamma}$  : est l'accélération.

## 2.3. Équations différentielles d'équilibre

### 2.3.2 Équilibre en rotation

Supposons un **parallélépipède** élémentaire centré en  $M$  présenté dans la figure suivante, dont les côtés ont pour longueur  $2a$ ,  $2b$  et  $2c$  parallèlement aux axes  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ . En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieurs à 3, il vient ce qui suit :



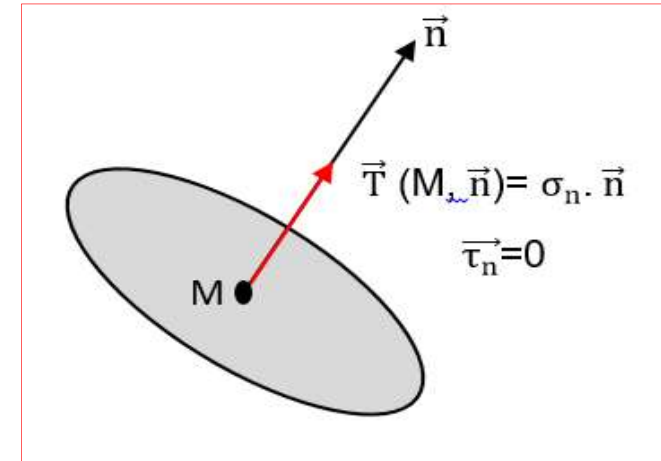
- ✓ Moment suivant  $x$  :  $b \cdot (4.a.c)\sigma_{yz} - c \cdot (4.a.b)\sigma_{zy} = 0. \Rightarrow \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$
- ✓ Moment suivant  $y$  :  $c \cdot (4.a.b)\sigma_{zx} - a \cdot (4.b.c)\sigma_{xz} = 0. \Rightarrow \sigma_{zx} = \sigma_{xz}$
- ✓ Moment suivant  $z$  :  $a \cdot (4.b.c)\sigma_{xy} - b \cdot (4.a.c)\sigma_{yx} = 0. \Rightarrow \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

Selon ces relations (**réciprocité des contraintes tangentielles**), le **tenseur des contraintes** en un point donné, est donc symétrique à six composantes indépendantes.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M})] = [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M})]^T$$

## 2.4. Contraintes et directions principales

La connaissance des valeurs des **contraintes principales** est nécessaire pour faire la **conception des structures ou des machines**.  
Dont en un point  $M$ , il existe une facette  $\vec{n}$ , telle que le **vecteur contrainte** soit **colinéaire** avec  $\vec{n}$ .



Alors dans ce cas, le vecteur **cisaillement** est **nul** sur cette facette et le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  satisfait la relation :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \cdot \vec{n}$$

$$[\sigma(M)]\{\mathbf{n}\} = \sigma_n \{\mathbf{n}\}$$

Puisque le tenseur des contraintes est **symétrique**, ses **valeurs propres** sont réelles et les **directions propres associées** (**vecteurs propres**) sont **orthogonaux deux à deux**.

## 2.4. Contraintes et directions principales

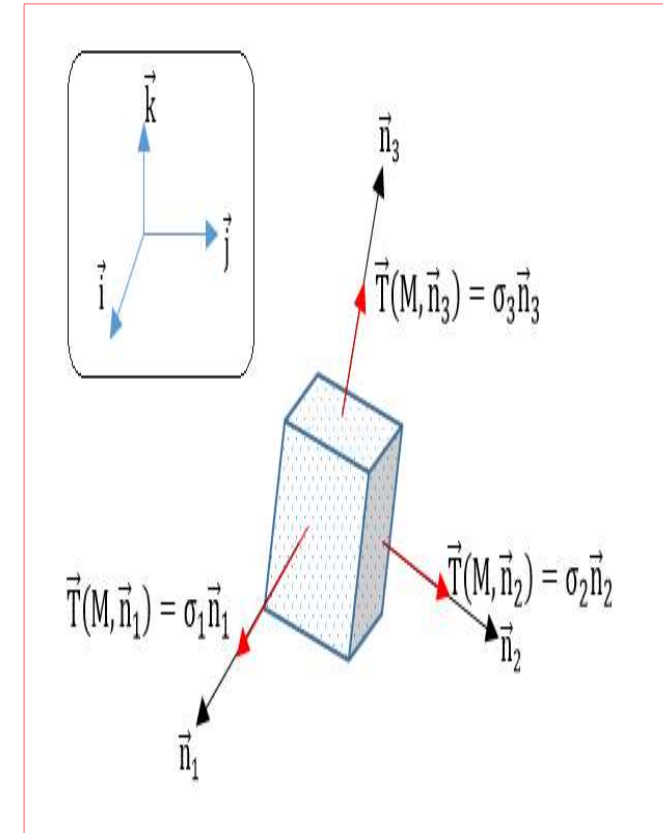
On notera donc :  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2$ ; et  $\sigma_3$  les trois valeurs propres en les appelant contraintes principales.

Les trois vecteurs propres (directions principales) associés, notés,  $\vec{n}_1$ ;  $\vec{n}_2$  et  $\vec{n}_3$ , définissent donc un repère orthonormé  $\{M ; \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$  appelé repère principal.

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Par convention:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$



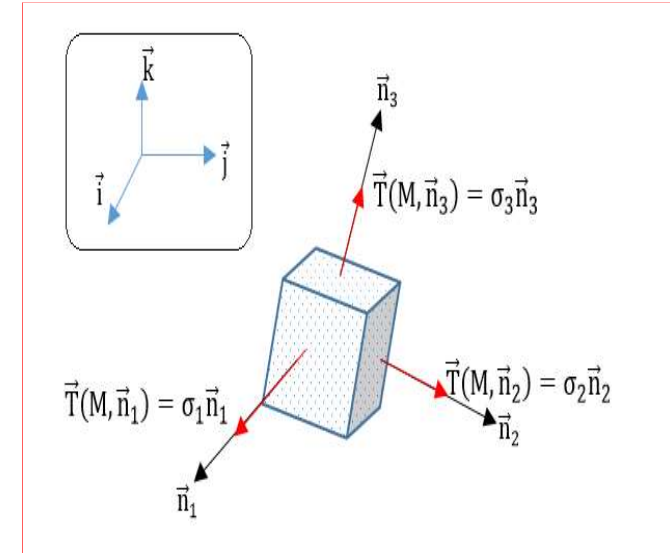
Ces contraintes principales s'obtiennent par résolution de l'équation caractéristique:

$$P(\sigma_n) = \det ( [\sigma(M)] - \sigma_n [I] ) = 0$$

## 2.4. Contraintes et directions principales

Les **directions principales** sont obtenues en **résolvant le système** d'équation suivant, pour chaque **valeur de la contrainte principale** :

$$([\sigma(M)] - \sigma_n [I]) \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Il en résulte que dans le **repère principal** le **tenseur des contraintes** est **diagonal**, et qu'une **contrainte** s'exerçant sur une **facette** de **normale**  $\vec{n}$  s'explique :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot n_1 \\ \sigma_2 \cdot n_2 \\ \sigma_3 \cdot n_3 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1$$

## 2.4.1. Les invariants Scalaires:

Les contraintes principales ( $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ ) sont obtenues en **résolvant** le système d'équation suivant,

$\det([\sigma(M)] - \sigma_n[I]) = 0$ . D'où:  $-\sigma^3 + J_1 \cdot \sigma^2 - J_2 \cdot \sigma + J_3 = 0$  : Où :  $\sigma$  : inconnue.

Les quantités:  $J_1; J_2; J_3$  ou invariants scalaires restent constantes quel que soit le repère choisi.

$$J_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$J_2 = \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \cdot \sigma_{zz} + \sigma_{yy} \cdot \sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 = \sigma_I \cdot \sigma_{II} + \sigma_I \cdot \sigma_{III} + \sigma_{II} \cdot \sigma_{III}$$

$$J_3 = \det(\sigma_{ij}) = \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \sigma_{III}$$

## 2.4.2. Tenseur Déviateur et tenseur sphérique:

Soit la contrainte moyenne :  $\sigma_{moy} = J_1/3$ .

$$\text{Soit } [D] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{moy} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_{moy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_{moy} \end{bmatrix} \text{ Tenseur Déviateur}$$

## 2.4.2. Tenseur Déviateur et tenseur sphérique:

Soit la contrainte moyenne :  $\sigma_{moy} = J_1/3$ .

$$\text{Soit } [D] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{moy} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_{moy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_{moy} \end{bmatrix} \text{ Tenseur Déviateur}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_{moy} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{moy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{moy} \end{bmatrix} \text{ tenseur sphérique ou isotrope}$$

$$\text{Résultats : } [\sigma_{ij}] = [D] + [S]$$

Quelques soit le repère un tenseur de contraintes est la somme d'un tenseur Déviateur et un tenseur sphérique (ou isotrope).

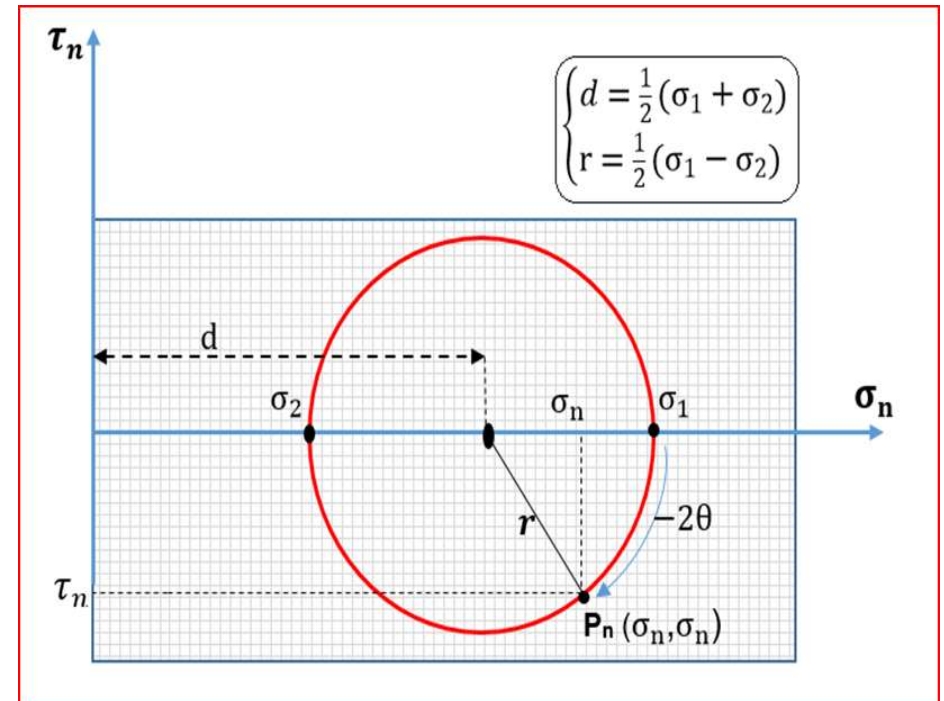
## 2.5. Représentation géométrique des contraintes (Cercle de Mohr)

Le cercle de Mohr est une représentation graphique des états de contrainte à deux dimensions, proposée par Christian Otto Mohr en 1882. Cette représentation universellement utilisée permet de visualiser les relations existant entre les contraintes.

### 2.5.1. (Cercle de Mohr) pour contraintes planes

$$\begin{cases} \sigma_n = d + r \cos(-2\theta) \\ \tau_n = r \sin(-2\theta) \end{cases}$$

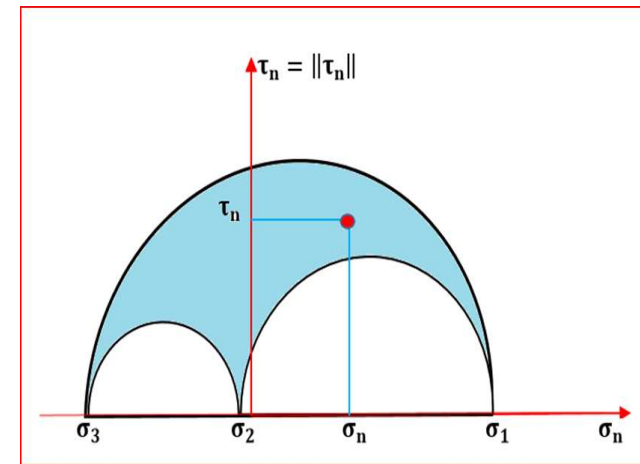
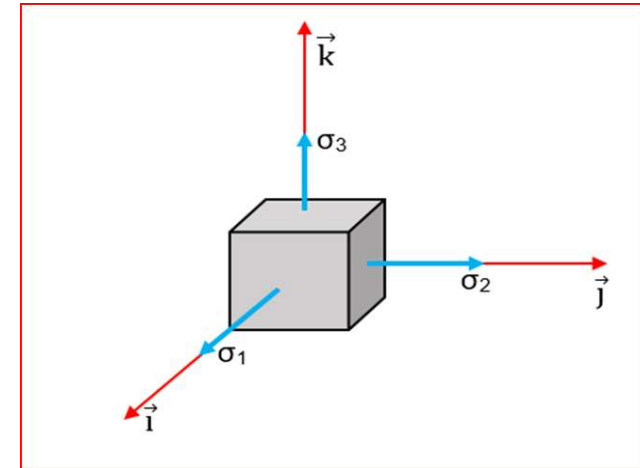
$$\text{Avec } \begin{cases} d = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \end{cases}$$



## 2.5.2 Cercle de Mohr dans trois dimensions (Tri-cercle de Mohr)

Un élément soumis à un état général de contrainte dans l'espace peut être orienté de telle sorte que ces facettes seront soumises aux contraintes principales :  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

$$\begin{cases} (\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2 + \tau_n^2 \geq (\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2})^2 \\ (\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2})^2 + \tau_n^2 \geq (\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2})^2 \\ (\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2})^2 + \tau_n^2 \geq (\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2})^2 \end{cases}$$

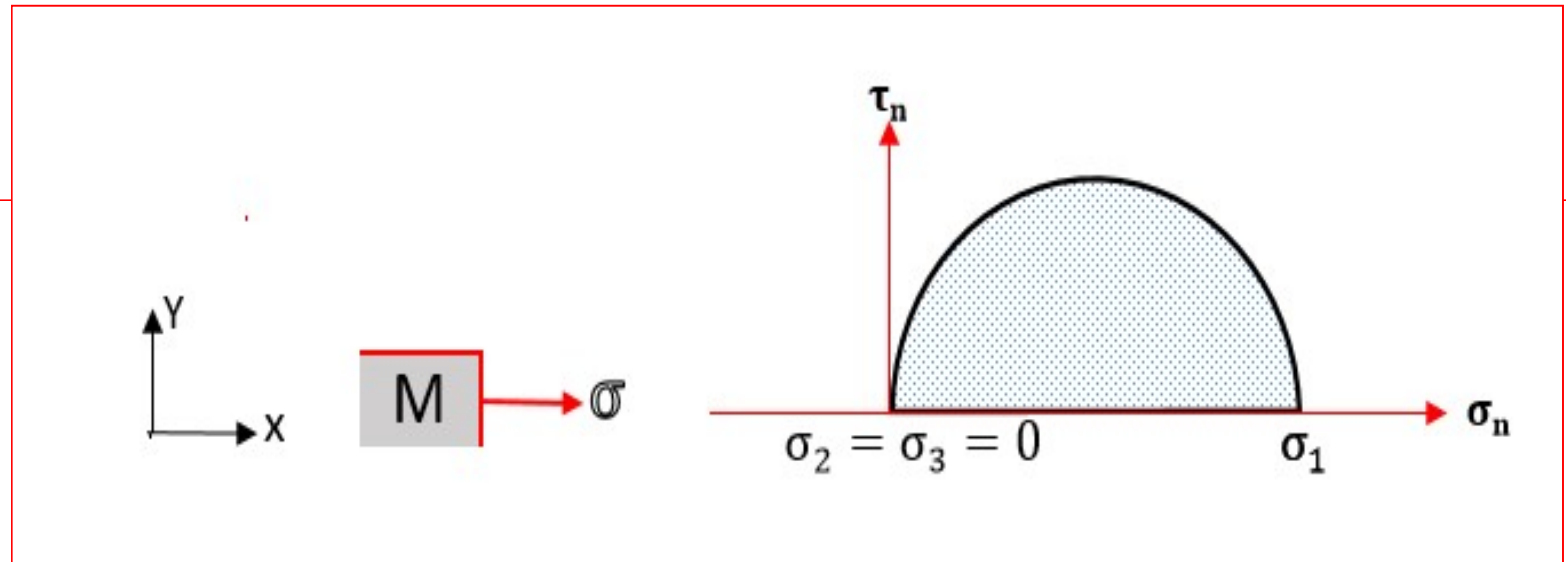


## 2.6. Etats de contraintes particuliers

### 2.6.1 Etat de contrainte uniaxial (Traction ou compression simple)

On dit qu'un état de contrainte en un point  $M$ , est uniaxial par rapport à une direction  $\vec{i}$ , si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## 2.6. Etats de contraintes particuliers

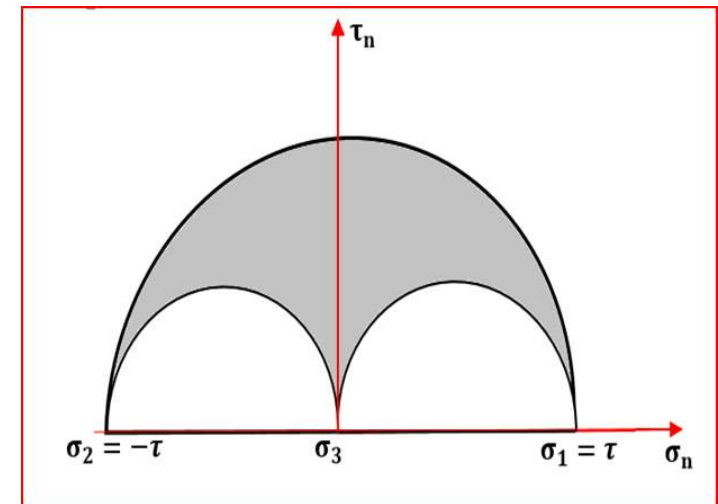
### 2.6.2 Etat de cisaillement simple

Un état de contrainte en un point M est dit **état de cisaillement** par rapport aux deux directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les contraintes principales et les directions principales sont :

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau, \sigma_3 = 0.$$



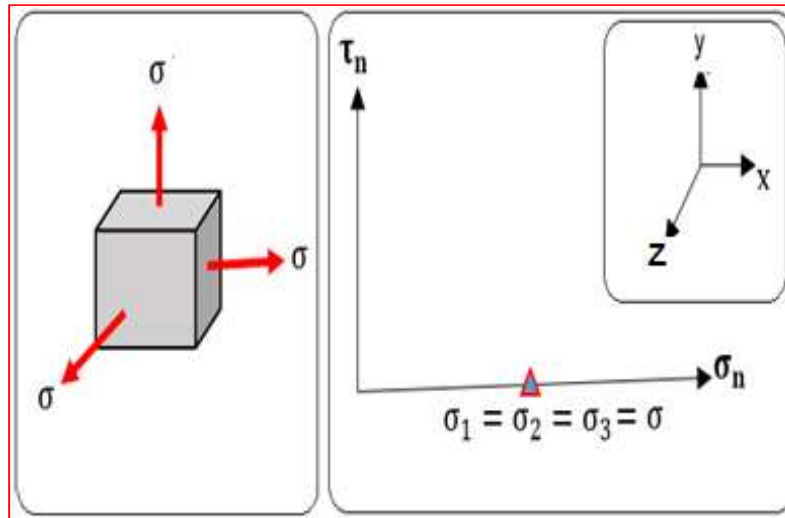
$$\{\vec{n}_1\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \{\vec{n}_2\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \{\vec{n}_3\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

## 2.6. Etats de contraintes particuliers

### 2.7.3 Etat de contrainte isotrope

Si les trois contraintes principales sont égales à  $\sigma$ , l'état de contrainte en un point M est alors isotrope ou sphérique, et toute facette  $\vec{n}$  en M est face principale :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$



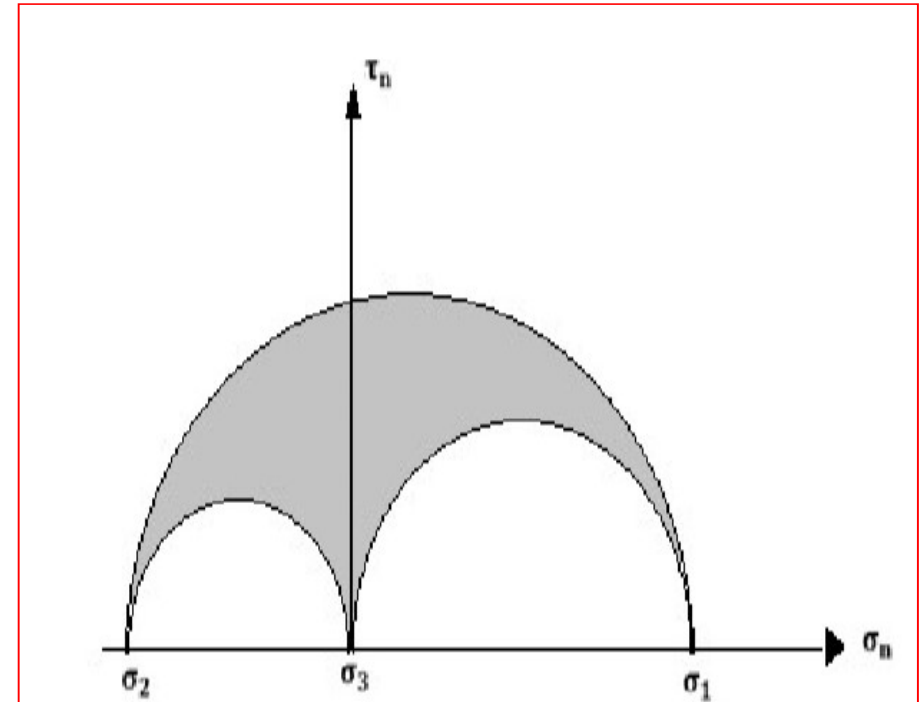
Cet état représente un état de **tension** si :  $\sigma > 0$ , et un état de **compression** si :  $\sigma < 0$ , dont sur toute facette s'exerce une contrainte purement normale. Ce type d'état se rencontre dans les **fluides** « hydrostatique ».

## 2.6. Etats de contraintes particuliers

### 2.7.4 Etat de contrainte plan

Un solide est en état de contrainte plan par rapport aux deux directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  ; si le tenseur des contraintes se réduit à :

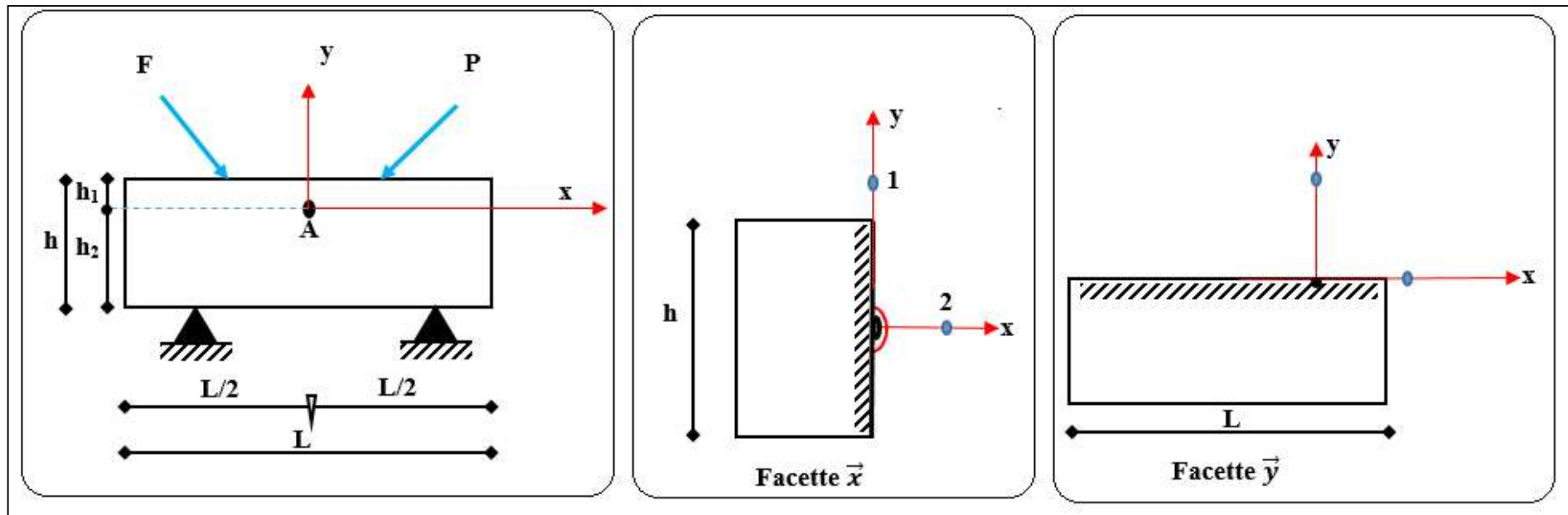
$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## 2.7. Exercices

### Ex :01

Soit une poutre dont l'état de contrainte en un point « A » est représenté sur la figure ci-dessous.



## 2.7. Exercices

### Ex :01

- 1- Déterminer le tenseur des contraintes au point « A », au repère  $(\vec{x}; \vec{y})$ ,
- 2- Déterminer les contraintes (vecteur et module) agissant sur les facettes  $(\vec{x})$ ; et  $(\vec{y})$ ,
- 3- Donner la contrainte résultante (vecteur et module) au point « A » ; agissant sur une facette  $(\vec{n})$  telle que  $(\vec{x}; \vec{n}) = +45^\circ$ .

**Solution proposée :**

$$1. [\sigma_{ij}]_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} MPa$$

$$2. \vec{\sigma}(A, \vec{x}) = 2.\vec{x} + 1.\vec{y}; \vec{\sigma}(A, \vec{y}) = 1.\vec{x} + 4.\vec{y};$$

$$3. \text{Modules : } \|\vec{\sigma}(A, \vec{x})\| = \sqrt{5}\text{mm} ; \|\vec{\sigma}(A, \vec{y})\| = \sqrt{17}\text{mm}.$$

$$4. \vec{\sigma}(A, \vec{n}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \|\vec{\sigma}(A, \vec{n})\| = \sqrt{17}\text{mm}.$$

## 2.7. Exercices

### Ex :02

En un point M d'un solide et dans le repère orthonormé  $\{\vec{i}; \vec{j}, \vec{k}\}$ , le tenseur des contraintes à pour valeur :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 20 \\ -40 & -60 & 50 \\ 20 & 50 & 40 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

- 1) Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes du tenseur des contraintes,
- 2) Soit le vecteur unitaire  $\vec{n}$  de composantes :

$$\vec{n} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## 2.7. Exercices

### Ex :02

Sur la facette  $\vec{n}$ , on demande ce qui suit :

Calculer les composantes du vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$ ,

Calculer la contrainte normale  $\sigma_n$ ,

Calculer les composantes du vecteur cisaillement  $\vec{\tau}_n$ , puis le module  $\|\vec{\tau}_n\|$ .

**Solution proposée :**

Voir la signification physique dans le cours.

$$a) \quad \vec{T}(M, \vec{n}) = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 66.67 \end{pmatrix} MPa.$$

$$b) \quad \underline{b)}- \sigma_n = 37.78 MPa,$$

$$c) \quad \underline{c)}- \vec{\tau}_n = \begin{pmatrix} 7.47 \\ -45.19 \\ 41.48 \end{pmatrix},$$

$$d) \quad \underline{d)}- \|\vec{\tau}_n\| = 61.78 MPa.$$