

## Des exemples sur Plans Factorielles Fractionnaires

**Exemple 1 :  $2^{3-1}$  avec  $3=1*2$  et Plan de base  $2^2$**

| N          | I         | 1        | 2         | 3=12     |  | Y exp |
|------------|-----------|----------|-----------|----------|--|-------|
| 1          | 1         | -1       | -1        | 1        |  | 45    |
| 2          | 1         | 1        | -1        | -1       |  | 51    |
| 3          | 1         | -1       | 1         | -1       |  | 25    |
| 4          | 1         | 1        | 1         | 1        |  | 43    |
| Contrastes | 10        | 11       | 12        | 13       |  |       |
|            | <b>41</b> | <b>6</b> | <b>-7</b> | <b>3</b> |  |       |

- 1- Donner la relation d'équivalence
- 2- Dédurre le Générateur d'alias I.
- 3- Dédurre les effets aliasés ?
- 4- Calculer tous les contrastes

### **Nouvelles hypothèses d'interprétation**

Pour analyser les résultats d'un plan fractionnaire, l'hypothèse 1 doit être complétée par de nouvelles hypothèses :

- **Hypothèse 1** – Les interactions d'ordre trois et toutes celles d'ordre plus élevé peuvent être négligées.
- **Hypothèse 2** – Tous les coefficients aliasés dans un contraste faible (négligeable) sont eux-mêmes faibles (négligeables).
- **Hypothèse 3** – Si deux contrastes sont forts, on se méfiera de leur interaction qui peut être forte.
- **Hypothèse 4** – Si deux contrastes sont faibles, on suppose que leur interaction l'est aussi.

### **Exemple 2 : $2^{4-1}$**

| N          | I  | 1  | 2  | 3  | 4  | Y exp |
|------------|----|----|----|----|----|-------|
| 1          | 1  | -1 | -1 | -1 | 1  | y1    |
| 2          | 1  | 1  | -1 | -1 | -1 | y2    |
| 3          | 1  | -1 | 1  | -1 | -1 | y3    |
| 4          | 1  | 1  | 1  | -1 | 1  | y4    |
| 5          | 1  | -1 | -1 | 1  | 1  | y5    |
| 6          | 1  | 1  | -1 | 1  | -1 | y6    |
| 7          | 1  | -1 | 1  | 1  | -1 | y7    |
| 8          | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | y8    |
| Contrastes | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |       |

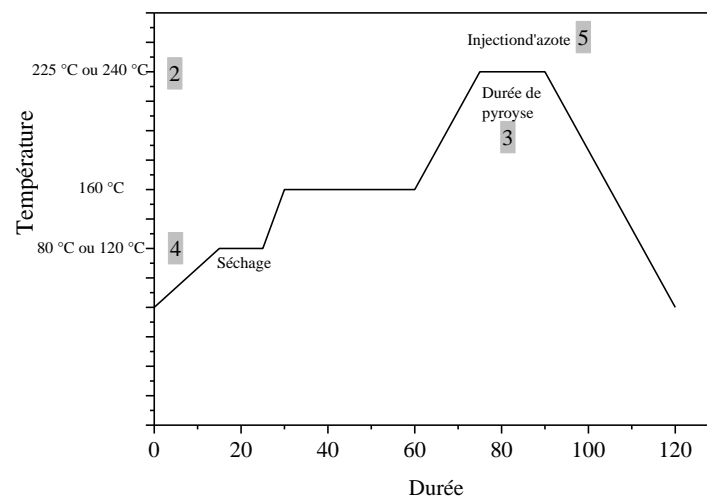
- 1- Donner la relation d'équivalence et le plan de base.
- 2- Dédire le Générateur d'alias I.
- 3- Dédire tous les effets aliasés ?

### Exemple 3 Amélioration du bois : Plan de base 2<sup>3</sup>

#### Description de l'étude

Le bois est un matériau de construction qui présente de nombreux avantages : il est léger, facile à traiter et du plus bel effet. Ses défauts sont généralement combattus par des traitements chimiques qui le rendent imputrescible et qui diminuent sa sensibilité à l'humidité. Des chercheurs ont amélioré les propriétés des bois européens à croissance rapide (sapin, pin maritime, peuplier, hêtre etc.) par un traitement thermique. Le procédé qu'ils ont mis au point s'appelle la *sétification*. C'est un procédé en deux étapes, une première étape de séchage et une seconde de pyrolyse ménagée à faible température. Au cours de ce traitement les hémicelluloses sont craquées, ce qui le rend bois moins sensible à l'humidité. Si les températures sont bien choisies, les produits de ce craquage réagissent avec la ligne du bois et améliorent encore sa stabilité dimensionnelle et sa résistance aux attaques des insectes.

Dans un for spécialement conçu pour effectuer les traitements thermiques, on sèche d'abord le bois à 20 à 120 °C, puis on le chauffe à 160 °C pendant 2h. Enfin on réalise la pyrolyse ménagée soit à 225 °C, soit à 240 °C pendant un temps pouvant durée de 5 à 15 minutes pour éviter endommager le bois, on injecte habituellement de l'azote pendant le refroidissement. La présente étude porte sur le 2 types de bois sapin et le pin maritime.



**Figure : Schéma du traitement thermique**

#### L'objectif de l'étude

L'objectif de l'étude est de trouver les conditions de traitement qui rendent le bois le plus solide et moins sensible à l'humidité.

**La réponse** est de mesurer la résistance mécanique de bois pour cela on prépare les éprouvettes parallélépipédiques de bois traité et on mesure le module de rupture en réflexion (Norme NF B51-008). Cette réponse mesure la solidité de bois.

#### Domaine d'étude

Le tableau suivant rassemble les facteurs et les niveaux qui ont été choisis.

| Facteur                    | Niveau -1      | Niveau +1      |
|----------------------------|----------------|----------------|
| Espèce -1                  | Sapin          | Pin            |
| Température de pyrolyse- 2 | 225 °C         | 240 °C         |
| Durée de pyrolyse-3        | 5 min          | 15 min         |
| Température de séchage -4  | 80 °C          | 120 °C         |
| Injection d'azote -5       | Avant pyrolyse | Après pyrolyse |

Le tableau d'expérimentation est le suivant

| N | I | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | Y exp |
|---|---|----|----|----|----|----|-------|
| 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1  | 81,1  |
| 2 | 1 | 1  | -1 | -1 | 1  | -1 | 75,2  |
| 3 | 1 | -1 | 1  | -1 | 1  | 1  | 62,4  |
| 4 | 1 | 1  | 1  | -1 | -1 | -1 | 65,3  |
| 5 | 1 | -1 | -1 | 1  | 1  | -1 | 77,8  |
| 6 | 1 | 1  | -1 | 1  | -1 | 1  | 63,6  |
| 7 | 1 | -1 | 1  | 1  | -1 | -1 | 76,2  |
| 8 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 48,2  |

- 1- Donner les relations d'équivalence
- 2- Dédire les Générateurs d'alias I (indépendants et dépendants).
- 3- Dédire tous les effets aliasés possibles ?
- 4- Calculer tous les contrastes.

### Solution

Selon le tableau d'expérimentation, les relations d'équivalence **4=123** et **5=13**.

Il sera donc essentiel de trouver deux générateurs

**4\*4=4\*123** et **5\*5=5\*13**. —————→ **I=1234** (via de 4) et **I=135** (via de 5).

Sont appelés **générateurs indépendants** et leurs produits **I=I\*I=1234\*135**

**I=245** est appelé **générateur dépendant**

Générateur Global d'Alias (GGA) **I=1234=135=245**

Pour connaître le nombre de Générateurs, on applique la loi suivante :

$$\frac{\text{nombre d'expériences de PFC}}{\text{nombre d'expériences de PFF}} - 1 = \frac{2^k}{2^{k-q}} - 1$$

Dans notre cas k=5 et q=2

$$\frac{\text{nombre d'expériences de PFC}}{\text{nombre d'expériences de PFF}} - 1 = \frac{2^5}{2^{5-2}} - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ Générateurs}$$

### Les calculs des contrastes

| N                 | I             | 1            | 2           | 3             | 4             | 5           | 12            | 14          | Y exp |
|-------------------|---------------|--------------|-------------|---------------|---------------|-------------|---------------|-------------|-------|
| 1                 | 1             | -1           | -1          | -1            | -1            | 1           | 1             | 1           | 81,1  |
| 2                 | 1             | 1            | -1          | -1            | 1             | -1          | -1            | 1           | 75,2  |
| 3                 | 1             | -1           | 1           | -1            | 1             | 1           | -1            | -1          | 62,4  |
| 4                 | 1             | 1            | 1           | -1            | -1            | -1          | 1             | -1          | 65,3  |
| 5                 | 1             | -1           | -1          | 1             | 1             | -1          | 1             | -1          | 77,8  |
| 6                 | 1             | 1            | -1          | 1             | -1            | 1           | -1            | -1          | 63,6  |
| 7                 | 1             | -1           | 1           | 1             | -1            | -1          | -1            | 1           | 76,2  |
| 8                 | 1             | 1            | 1           | 1             | 1             | 1           | 1             | 1           | 48,2  |
| <b>Contrastes</b> | $l_0$         | $l_1$        | $l_2$       | $l_3$         | $l_4$         | $l_5$       | $l_{12}$      | $l_{14}$    |       |
|                   | <b>68,725</b> | <b>-5,65</b> | <b>-5,7</b> | <b>-2,275</b> | <b>-2,825</b> | <b>-4,9</b> | <b>-0,625</b> | <b>1,45</b> |       |

- Selon les hypothèses de PFF pour la simplification des coefficients (a été faite en cours en détaille). On résume les résultats finaux

$$\left[ \begin{array}{l} l_0 = E0 = 68,725 \\ l_1 = E1 + E35 = -5,65 \\ l_2 = E2 + E45 = -5,7 \\ l_3 = E3 + E15 = -2,275 \\ l_4 = E4 + E25 = -2,825 \\ l_5 = E5 + E13 + E24 = -4,9 \\ l_{12} = E12 + E34 = -0,625 \\ l_{14} = E14 + E23 = 1,45 \end{array} \right]$$

#### Exemple 4 : $2^{7-4}$

On désire réaliser que 08 expériences, le plan de base  $2^3$  et le nombre de facteurs supplémentaires =4 facteurs.

**4=123**

**5=12**

**6=23**

**7=13**

- 1- Donner les relations d'équivalence
- 2- Dédire les Générateurs d'alias I (indépendant et dépendant).
- 3- Dédire tous les effets aliasés possibles ?
- 4- Calculer tous les contrastes.

**Tableau – Réponses.**

| Essai n° | Sensibilité |
|----------|-------------|
| 1        | 1,22        |
| 2        | 0,9         |
| 3        | 5,33        |
| 4        | 5,64        |
| 5        | 3,89        |
| 6        | 3,88        |
| 7        | 2,82        |
| 8        | 2,33        |

**Désaliaser les facteurs aliasés**

**Exemple 5 : 2<sup>5-2</sup> (suite de l'exemple 3)**

Ce que l'on veut, ce sont les coefficients seuls, c'est-à-dire non aliasés. Il faut désaliaser les contrastes. Pour cela, on recherche le plan qui va nous fournir des équations permettant de trouver séparément chacun des coefficients. Nous considérons le contraste I<sub>1</sub>. Si nous trouvons un plan nous permettant de connaître la valeur du contraste I<sub>1</sub>'

Lorsqu'on désire savoir les coefficients (E<sub>i</sub> ou E<sub>ij</sub>) de chaque contraste, il faut passer par des essais supplémentaire (plan complémentaire).  $I_1 = E_1 + E_{35}$        $I_1' = E_1 - E_{35}$

**Tableau : résultats des plans initial et complémentaire**

| N  | I | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | Y exp |
|----|---|----|----|----|----|----|-------|
| 9  | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 86,3  |
| 10 | 1 | 1  | -1 | -1 | 1  | 1  | 60,9  |
| 11 | 1 | -1 | 1  | -1 | 1  | -1 | 67,6  |
| 12 | 1 | 1  | 1  | -1 | -1 | 1  | 51    |
| 13 | 1 | -1 | -1 | 1  | 1  | 1  | 72,5  |
| 14 | 1 | 1  | -1 | 1  | -1 | -1 | 78    |
| 15 | 1 | -1 | 1  | 1  | -1 | 1  | 71    |
| 16 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | -1 | 62,5  |

En additionnant le contraste du plan initial et celui du plan complémentaire, nous pourrions obtenir séparément les deux coefficients. En effet, on a :

$$E_1 = \frac{(l_1 + l_1')}{2} \qquad E_{35} = \frac{(l_1 - l_1')}{2}$$

- 1- Donner les nouvelles relations d'équivalence
- 2- Dédire les nouveaux générateurs d'alias I (indépendants et dépendants).
- 3- Dédire tous les effets aliasés possibles ?
- 4- Calculer les nouveaux contrastes.

### Solution

Les nouvelles relations d'équivalence :

Selon le tableau d'expérimentation, les relations d'équivalence **4=123** et **5=-13**.

Deux générateurs indépendants **I=1234 (via de 4)** et **I=-135 (via de 5)**.

Leurs produits **I=I\*I=1234\*-135=-245** (générateur dépendant)

GGA **I=1234=-135=-245**.

| N          | I             | 1             | 2           | 3            | 4            | 5=-13         | 12           | 14          | Y exp |
|------------|---------------|---------------|-------------|--------------|--------------|---------------|--------------|-------------|-------|
| 9          | 1             | -1            | -1          | -1           | -1           | -1            | 1            | 1           | 86,3  |
| 10         | 1             | 1             | -1          | -1           | 1            | 1             | -1           | 1           | 60,9  |
| 11         | 1             | -1            | 1           | -1           | 1            | -1            | -1           | -1          | 67,6  |
| 12         | 1             | 1             | 1           | -1           | -1           | 1             | 1            | -1          | 51    |
| 13         | 1             | -1            | -1          | 1            | 1            | 1             | 1            | -1          | 72,5  |
| 14         | 1             | 1             | -1          | 1            | -1           | -1            | -1           | -1          | 78    |
| 15         | 1             | -1            | 1           | 1            | -1           | 1             | -1           | 1           | 71    |
| 16         | 1             | 1             | 1           | 1            | 1            | -1            | 1            | 1           | 62,5  |
| Contrastes | $l'_0$        | $l'_1$        | $l'_2$      | $l'_3$       | $l'_4$       | $l'_5$        | $l'_{12}$    | $l'_{14}$   |       |
|            | <b>68,725</b> | <b>-5,625</b> | <b>-5,7</b> | <b>2,275</b> | <b>-2,85</b> | <b>-4,875</b> | <b>-0,65</b> | <b>1,45</b> |       |

De même manière précédente, on obtient les contrastes en fonction des coefficients.

$$\left[ \begin{array}{l} l'_0 = E0 = 68,725 \\ l'_1 = E1 - E35 = -5,625 \\ l'_2 = E2 - E45 = -5,7 \\ l'_3 = E3 - E15 = 2,275 \\ l'_4 = E4 - E25 = -2,85 \\ l'_5 = E5 - E13 - E24 = -4,875 \\ l'_{12} = E12 + E34 = -0,65 \\ l'_{14} = E14 + E23 = 1,45 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} l_0 = E0 = 68,725 \\ l_1 = E1 + E35 = -5,65 \\ l_2 = E2 + E45 = -5,7 \\ l_3 = E3 + E15 = -2,275 \\ l_4 = E4 + E25 = -2,825 \\ l_5 = E5 + E13 + E24 = -4,9 \\ l_{12} = E12 + E34 = -0,625 \\ l_{14} = E14 + E23 = 1,45 \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{l} l'_0 = E0 = 68,725 \\ l'_1 = E1 - E35 = -5,625 \\ l'_2 = E2 - E45 = -5,7 \\ l'_3 = E3 - E15 = 2,275 \\ l'_4 = E4 - E25 = -2,85 \\ l'_5 = E5 - E13 - E24 = -4,875 \\ l'_{12} = E12 + E34 = -0,65 \\ l'_{14} = E14 + E23 = 1,45 \end{array} \right]$$

$$l_0 = 68,725$$

$$E_1 = \frac{(l_1 + l'_1)}{2} = -5,6375$$

$$E_{35} = \frac{(l_1 - l'_1)}{2} = -0,0125$$

$$E_2 = \frac{(l_2 + l'_2)}{2} = -5,7000$$

$$E_{45} = \frac{(l_2 - l'_2)}{2} = 0$$

$$E_3 = \frac{(l_3 + l'_3)}{2} = 0$$

$$E_{15} = \frac{(l_3 - l'_3)}{2} = -2,2750$$

$$E_4 = \frac{(l_4 + l'_4)}{2} = -2,8375$$

$$E_{25} = \frac{(l_4 - l'_4)}{2} = 0,0125$$

$$E_5 = \frac{(l_5 + l'_5)}{2} = -4,8875$$

,  $E_{13}$  et  $E_{24}$  impossibles

$E_{12}$ ,  $E_{34}$ ,  $E_{14}$  et  $E_{23}$  c'est impossible de trouver ces valeurs. Si on considère selon les hypothèses de PFF (hypothèse 2), la valeur plus faible est -0,625 /ou -0,65, donc  $E_{12}$  et  $E_{34}$  sont négligeables.

Mais, lorsqu'on s'intéresse les vraies valeurs de ces coefficients, il faut passer une nouvelle méthode de désaliaser l'un des contrastes

**D'autres méthode supplémentaire pour déterminer les coefficients du modèle (Ei, Eij), cette méthode sera discutée lors de la réalisation de TP2 (PFF)**

| N     | I      | 1       | 2    | 3  | 4       | 5       | 12      | 14   | 13      | 15     | 23   | 24      | 25     | 34      | 35      | 45  | Y exp |
|-------|--------|---------|------|----|---------|---------|---------|------|---------|--------|------|---------|--------|---------|---------|-----|-------|
| 1     | 1      | -1      | -1   | -1 | -1      | 1       | 1       | 1    | 1       | -1     | 1    | 1       | -1     | 1       | -1      | -1  | 81,1  |
| 2     | 1      | 1       | -1   | -1 | 1       | -1      | -1      | 1    | -1      | -1     | 1    | -1      | 1      | -1      | 1       | -1  | 75,2  |
| 3     | 1      | -1      | 1    | -1 | 1       | 1       | -1      | -1   | 1       | -1     | -1   | 1       | 1      | -1      | -1      | 1   | 62,4  |
| 4     | 1      | 1       | 1    | -1 | -1      | -1      | 1       | -1   | -1      | -1     | -1   | -1      | -1     | 1       | 1       | 1   | 65,3  |
| 5     | 1      | -1      | -1   | 1  | 1       | -1      | 1       | -1   | -1      | 1      | -1   | -1      | 1      | 1       | -1      | -1  | 77,8  |
| 6     | 1      | 1       | -1   | 1  | -1      | 1       | -1      | -1   | 1       | 1      | -1   | 1       | -1     | -1      | 1       | -1  | 63,6  |
| 7     | 1      | -1      | 1    | 1  | -1      | -1      | -1      | 1    | -1      | 1      | 1    | -1      | -1     | -1      | -1      | 1   | 76,2  |
| 8     | 1      | 1       | 1    | 1  | 1       | 1       | 1       | 1    | 1       | 1      | 1    | 1       | 1      | 1       | 1       | 1   | 48,2  |
| 9     | 1      | -1      | -1   | -1 | -1      | -1      | 1       | 1    | 1       | 1      | 1    | 1       | 1      | 1       | 1       | 1   | 86,3  |
| 10    | 1      | 1       | -1   | -1 | 1       | 1       | -1      | 1    | -1      | 1      | 1    | -1      | -1     | -1      | -1      | 1   | 60,9  |
| 11    | 1      | -1      | 1    | -1 | 1       | -1      | -1      | -1   | 1       | 1      | -1   | 1       | -1     | -1      | 1       | -1  | 67,6  |
| 12    | 1      | 1       | 1    | -1 | -1      | 1       | 1       | -1   | -1      | 1      | -1   | -1      | 1      | 1       | -1      | -1  | 51    |
| 13    | 1      | -1      | -1   | 1  | 1       | 1       | 1       | -1   | -1      | -1     | -1   | -1      | -1     | 1       | 1       | 1   | 72,5  |
| 14    | 1      | 1       | -1   | 1  | -1      | -1      | -1      | -1   | 1       | -1     | -1   | 1       | 1      | -1      | -1      | 1   | 78    |
| 15    | 1      | -1      | 1    | 1  | -1      | 1       | -1      | 1    | -1      | -1     | 1    | -1      | 1      | -1      | 1       | -1  | 71    |
| 16    | 1      | 1       | 1    | 1  | 1       | -1      | 1       | 1    | 1       | -1     | 1    | 1       | -1     | 1       | -1      | -1  | 62,5  |
| coeff | E0     | E1      | E2   | E3 | E4      | E5      | E12     | E14  | E13     | E15    | E23  | E24     | E25    | E34     | E35     | E45 |       |
|       | 68,725 | -5,6375 | -5,7 | 0  | -2,8375 | -4,8875 | -0,6375 | 1,45 | -0,0125 | -2,275 | 1,45 | -0,0125 | 0,0125 | -0,6375 | -0,0125 | 0   |       |