Introduction

Comme les plans factoriels complets, les plans factoriels fractionnaires possèdent des facteurs ayant chacun deux niveaux, un niveau bas et un niveau haut. Mais, on ne réalise pas toutes les combinaisons de niveaux. En effet, le nombre d'essais des plans factoriels complets augmente rapidement avec le nombre de facteurs. Il n'est pas rare de rencontrer des études faisant intervenir 7 ou 8 facteurs. Il est bien sûr déraisonnable de vouloir exécuter $2^7 = 128$ ou $2^8 = 256$ essais. On sélectionne une fraction des essais d'un plan complet pour construire un plan fractionnaire. Cette sélection est basée sur des considérations mathématiques qui seront mises en application grâce au calcul de Box.

Plans fractionnaires (2^{k-q}) :

Ce plan consiste à utiliser pour l'étude de « k » facteurs la matrice d'effet d'un plan factoriel complet 2^{k-1}, 2^{k-2}, 2^{k-3}... Ce qui permet de réduire le nombre d'essais par 2q Nous remarquons que pour un plan factoriel complet les interactions d'ordre deux et plus sont le plus souvent négligeables. L'astuce est que les interactions les moins influentes sont remplacées par les facteurs « k - q»,…«k», en suivant leurs mêmes alternances de signes. Le plan obtenu est dit fractionnaire 2^{k-q}.

2 : Nombre de niveaux
k : Nombre de facteurs à étudier.
q : Nombre de facteurs supplémentaires

Calcul de Box

Le calcul de Box permet de retrouver rapidement comment les effets et les interactions sont aliasés dans les contrastes. Comme nous l'avons déjà signalé, il s'applique aux plans fractionnaires à deux niveaux fixés à –1 et +1.

Notation de Box :

Dans la notation de Box, on désigne par le chiffre **1** (en gras) la colonne des signes du facteur 1, signes ordonnés selon la présentation de Yates. Pour un plan 22, on a :

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

La colonne du facteur 2 sera désignée par :

$$\mathbf{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

On introduit également des colonnes de signes moins et de signes plus :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \qquad -\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les colonnes de signes

Le calcul de Box consiste à faire des opérations sur les colonnes de signes que nous venons de définir. On multiplie les signes terme à terme en appliquant la règle des signes. Par exemple, la multiplication de **1** par **2** est :

$$\mathbf{1} \times \mathbf{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Le signe +1 du premier terme de la colonne-produit est le résultat de la multiplication de –1 (premier terme de **1**) par –1 (premier terme de **2**). Les autres signes de la colonne-produit sont obtenus de la même manière. Voyons dans les paragraphes suivants les opérations les plus utilisées sur les colonnes de signes.

Multiplication d'une colonne par elle-même Par exemple, multiplions la colonne **1** par elle-même :

$$\mathbf{1} \times \mathbf{1} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Multiplication d'une colonne par une colonne de signes plus Multiplions la colonne **2** par **I** :

$$\mathbf{2} \times \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} = \mathbf{2}$$

La multiplication d'une colonne par une colonne de signes plus donne la colonne initiale. On peut dire aussi que la multiplication par une colonne de signes plus ne change pas la colonne multipliée.

Multiplication d'une colonne par une colonne de signes moins Multiplions la colonne **2** par –**I** :

$$\mathbf{2} \times (-\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{2}$$

Multiplication d'une colonne de signes plus par elle-même : On a

$$\mathbf{I} \times \mathbf{I} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

La multiplication d'une colonne de signes plus par elle-même donne une colonne de signes plus.

Commutativité de la multiplication

$$\mathbf{1} \times \mathbf{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \mathbf{2} \times \mathbf{1}$$

Le résultat de la multiplication de **1** par **2** est le même que celui de la multiplication de **2** par **1**. Cette propriété s'appelle la *commutativité*

Règles à retenir

Il faut simplement retenir les règles suivantes du calcul de Box. Pour simplifier, les signes multipliés ont été éliminés des formules :

– **Règle 1** - Commutativité :

$\mathbf{1\ 2 = 2\ 1}$

– **Règle 2** - Multiplication d'une colonne par elle-même :

$\mathbf{1\ 1 = I}$ $\mathbf{2\ 2 = I}$

– **Règle 3** - Multiplication d'une colonne par **I** ou – **I** :

$\mathbf{1\ I = 1}$ $\mathbf{2\ I = 2}$

$\mathbf{1\ (-I) = -1}$ $\mathbf{2\ (-I) = -2}$

$\mathbf{I\ I = I}$

Relation d'équivalence

Plan de base Considérons un plan 23 et son modèle postulé :

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{123}x_1x_2x_3$$

Le terme *x* 1*x*2 est le produit des niveaux des facteurs 1 et 2. Ce terme est celui de l'interaction 12. On peut donc construire une colonne de signes correspondant à l'interaction 12 en multipliant, selon le calcul de Box, les colonnes du facteur 1 et du facteur 2. On peut faire de même pour les interactions 13, 23 et 123. On peut aussi ajouter une colonne de signes plus pour introduire la constante dans les calculs. On obtient ainsi un tableau, appelé *matrice de base* ou *plan de base*, qui comporte 8 lignes et 8 colonnes.

Tableau 1– Matrice de base d'un plana 2^3.

Essai n°	I	1	2	3	12	13	23	123
1	+	–	–	–	+	+	+	–
2	+	+	–	–	–	–	+	+
3	+	–	+	–	–	+	–	+
4	+	+	+	–	+	–	–	–
5	+	–	–	+	+	–	–	+
6	+	+	–	+	–	+	–	–
7	+	–	+	+	–	–	+	–
8	+	+	+	+	+	+	+	+

Cette matrice de base correspond à la matrice qui est utilisée pour calculer les effets et les interactions d'un plan complet. Mais pour un plan fractionnaire, on n'utilise que la moitié des essais de cette matrice. Divisons cette matrice de base en deux fractions : un demi-plan constitué des essais n° 5, 2, 3 et 8 (lignes plus foncées du tableau 2) et un demi-plan constitué des essais n° 1, 6, 7 et 4.

Tableau 2 – Matrice de base coupée en deux plans fractionnaires.

Essai n°	I	1	2	3	12	13	23	123
5	+	–	–	+	+	–	–	+
2	+	+	–	–	–	–	+	+
3	+	–	+	–	–	+	–	+
8	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	–	–	–	+	+	+	–
6	+	+	–	+	–	+	–	–
7	+	–	+	+	–	–	+	–
4	+	+	+	–	+	–	–	–

Dans un premier temps, intéressons-nous au demi-plan supérieur, le plan plus foncé. Il contient huit colonnes de quatre signes qui sont égales deux à deux. En notation de Box, on peut écrire, par exemple, que la colonne des quatre signes du facteur 1 est égale à celle de l'interaction 23, soit :

1 = **23**

Nous avons vu que, dans ce demi-plan, le facteur 1 était confondu avec l'interaction 23 et que le contraste l_1 calculé avec la colonne 1 (ou avec la colonne 23) était la somme des coefficients $a1$ et $a23$: $l_1 = l_{23} = a1 + a23$.

Relation d'équivalence On remarque que les coefficients aliasés dans un contraste sont ceux qui ont les mêmes colonnes de signes dans le demi-plan considéré. C'est une règle générale : un contraste est la somme algébrique des coefficients qui ont les mêmes colonnes de signes. C'est-à-dire que si l'on a **1** = **23** en calcul de Box, le contraste calculé avec la colonne l_1 sera la somme $l_1 = a1 + a23$ et le contraste calculé avec la colonne **23** sera la somme $l_{23} = a1 + a23$.

On a donc : **1** = **23** est équivalent à $l_1 = l_{23} = a1 + a23$

C'est la relation d'équivalence. Elle est valable dans les deux sens et elle constitue la base de la théorie des aliases.

L'examen du tableau précédent 2 montre que l'on a aussi :

2 = 13 est équivalent à $\ell_2 = \ell_{13} = a_2 + a_{13}$

3 = 12 est équivalent à $\ell_3 = \ell_{12} = a_3 + a_{12}$

I = 123 est équivalent à $\ell_0 = \ell_{123} = a_0 + a_{123}$

Générateurs d'aliases

Générateur d'aliases du demi-plan supérieur

Considérons le demi-plan supérieur du tableau 2. Les deux colonnes de signes plus permettent d'écrire en notation de Box :

I = 123 *

En multipliant par **1** les deux membres de cette relation et en tenant compte des règles de multiplication de Box, on retrouve les colonnes identiques du demi-plan supérieur :
1. Multiplication par **1** des deux membres de la relation *:
1.I = **1.123**
2. Application de la règle 2 :
1.I = **I.23**
3. Application de la règle 3 :
1 = **23**
En multipliant les deux membres de la relation {*} successivement par **2** et par **3**, on obtient les deux relations :
2 = **13**
3 = **12**
La relation **I** = **123** permet donc de retrouver toutes les colonnes qui sont égales dans le demi-plan supérieur. Connaissant ces égalités et en appliquant la relation d'équivalence, on retrouve comment les coefficients sont aliasés dans les contrastes. La relation **I** = **123** s'appelle le *générateur d'aliases*.

Générateur d'aliases du demi-plan inférieur

En considérant le demi-plan inférieur (Tableau 2), on vérifie que les colonnes se correspondent deux à deux, mais avec des signes opposés. À la colonne de signes plus correspond la colonne de signes moins de l'interaction 123. On peut écrire, en notation de Box :
I = **-123** {**} C'est le générateur d'aliases du demi-plan inférieur. En multipliant par **1** les deux membres de la relation {*} et en tenant compte des règles de multiplication de Box, on a : **1.I** = **1.-123** **1** = **-I 23** **1** = **-23**
La colonne de l'interaction 23 a bien des signes opposés à ceux de la colonne 1.On trouve la structure du contraste de la colonne 1 en appliquant la relation d'équivalence

$$\ell'_1 = -\ell'_{23} = a_1 - a_{23}$$

Les contrastes calculés avec le demi-plan inférieur sont des différences de coefficients. On calcule que l'on a de même : **2** = –**13** soit

$$\mathbf{2} = -\mathbf{13} \text{ soit } \ell'_2 = -\ell'_{13} = a_2 - a_{13}$$
$$\mathbf{3} = -\mathbf{12} \text{ soit } \ell'_3 = -\ell'_{12} = a_3 - a_{12}$$
$$\mathbf{I} = -\mathbf{123} \text{ soit } \ell'_0 = -\ell'_{123} = a_0 - a_{123}$$

Construction pratique d'un plan fractionnaire

Tableau 3 – Plan de base 2^2

Essai n°	I	1	2	12
1	+	–	–	+
2	+	+	–	–
3	+	–	+	–
4	+	+	+	+

L'interaction **12** peut servir à étudier un facteur supplémentaire, le facteur 3. En effet, les niveaux d'étude du facteur supplémentaire sont semblables aux signes de la colonne de signes de l'interaction 12 (Tableau 4). On profite de cette similitude pour construire facilement les plans fractionnaires. En notation de Box, on écrit que le facteur 3 est étudié sur les signes de l'interaction 12 :

3 = 12

Multiplions chaque membre de cette relation par **3**, on retrouve le générateur du plan fractionnaire :

I = 123

Ce générateur permet, grâce au calcul de Box et à la relation d'équivalence, de retrouver comment les coefficients sont aliasés dans les contrastes.

Tableau 4 – Plan d'expériences 23-1 bâti avec le générateur **I = 123**

Essai n°	1	2	3
1	–	–	+
2	+	–	–
3	–	+	–
4	+	+	+

Au lieu de prendre le générateur **I = 123**, on peut prendre le générateur : **I = -123**

Dans ce cas, le troisième facteur est étudié sur les signes de l'interaction –12 (Tableau 5)

Tableau 6.8 – Plan d'expériences 23–1 bâti avec le générateur **I = –123**.

Essai n°	1	2	3
1	–	–	–
2	+	–	+
3	–	+	+
4	+	+	–