

Chapitre 4

Algèbre des dioïdes.

On présente dans ce chapitre les résultats élémentaires de la théorie des dioïdes, appliquée à l'étude des systèmes à événements discrets, ainsi que les possibilités de résolution des équations du type $y = Ax$ et $x = ax + b$.

1 Les dioïdes.

1.1 Quelques définitions concernant les dioïdes.

Définition 1.1 (Dioïde) Un ensemble D muni de deux opérations internes, l'une notée additivement \oplus , l'autre notée multiplicativement \otimes , est un dioïde si les axiomes suivants sont vérifiés:

Axiome 1.1 Associativité de \oplus et \otimes

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in D, (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) \text{ et } (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) .$$

Axiome 1.2 Commutativité de \oplus

$$\forall \alpha, \beta \in D, \alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha .$$

Axiome 1.3 Distributivité de \otimes sur \oplus

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in D, (\alpha \oplus \beta) \otimes \gamma = (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma) .$$

Axiome 1.4 Eléments neutres de \oplus ("zéro") et de \otimes ("identité")

$$\exists \varepsilon \in D : \forall \alpha \in D, \alpha \oplus \varepsilon = \alpha ,$$

$$\exists e \in D : \forall \alpha \in D, \alpha \otimes e = e \otimes \alpha = \alpha .$$

Axiome 1.5 Propriété d'absorption du zéro pour \otimes

$$\forall a \in D, \alpha \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \alpha = \varepsilon .$$

Axiome 1.6 Idempotence de l'addition

$$\forall \alpha \in D, \alpha \oplus \alpha = \alpha .$$

Définition 1.2 (Dioïde commutatif) Un dioïde est dit commutatif si et seulement si la multiplication, notée \otimes , est commutative.

Définition 1.3 (Dioïde complet) Un dioïde est complet si et seulement si il est fermé pour les sommes infinies et si l'axiome 1.3 s'étend aux sommes infinies.

Théorème 1.1 Dans un dioïde, la relation suivante, notée \geq , est une relation d'ordre partiel.

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha = \alpha \oplus \beta \Leftrightarrow \exists \gamma : \alpha = \beta \oplus \gamma .$$

L'élément minimal de D est ε . Deux éléments α et β de D ont toujours une borne supérieure, égale à $\alpha \oplus \beta$. De plus l'addition et la multiplication sont isotones pour cet ordre, autrement dit:

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta, \gamma \in D, \alpha \geq \beta &\Leftrightarrow \alpha \oplus \gamma \geq \beta \oplus \gamma, \\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in D, \alpha \geq \beta &\Leftrightarrow \alpha \otimes \gamma \geq \beta \otimes \gamma. \end{aligned}$$

1.2 Exemples.

Exemple 1.1 L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni de l'opération \max , notée \oplus , et de l'addition usuelle, notée \otimes , que nous noterons \mathbb{R}_{\max} est un dioïde (on a alors $\varepsilon = -\infty$) et est communément appelé "algèbre (max, +)".

Exemple 1.2 L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ muni de l'opération \min , notée \oplus , et de l'addition usuelle, notée \otimes , que nous noterons \mathbb{R}_{\min} est un dioïde (on a alors $\varepsilon = +\infty$) et est communément appelé "algèbre (min, +)".

1.3 Extension aux dioïdes matriciels.

Le concept de dioïde peut être étendu aux matrices carrées. A partir d'un dioïde "scalaire", considérons les matrices carrées $n \times n$ à valeurs dans D . Les sommes et les produits de matrices sont définis à partir des sommes et produits usuels de D . L'ensemble des matrices $n \times n$ muni des opérations \oplus et \otimes définies par :

$$A = (A_{ij}), B = (B_{ij}), (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n (A_{ik} \otimes B_{kj}).$$

possède aussi la structure de dioïde et est noté $D^{n \times n}$. L'élément neutre de l'addition est la matrice dont les coefficients sont tous égaux à ε , sauf les termes diagonaux égaux à e .

2 Les treillis.

2.1 Quelques définitions concernant les treillis.

Définition 1.4 (demi-treillis) $(T, +)$ est un demi-treillis si la loi de composition vérifie l'associativité, l'idempotence et la commutativité.

Lemme 1.1 Soit (T, \oplus) un demi-treillis, la relation : $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \oplus \beta = \beta$ définit une relation d'ordre sur T .

Définition 1.5 ((sup) et (inf) demi-treillis) Un ensemble ordonné (E, \leq) pour lequel deux éléments quelconques ont toujours une plus petite borne supérieure (appelée sup) est un (sup) demi-treillis. On peut définir de manière analogue un (inf) demi-treillis en vérifiant l'existence d'une plus grande borne inférieure (appelée inf).

Autrement dit, dans un (sup) demi-treillis on a toujours :

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta, \exists \gamma \text{ tel que } : \alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma, \\ \forall \delta, \alpha \leq \delta, \beta \leq \delta \Rightarrow \gamma \leq \delta. \end{aligned}$$

Définition 1.6 (treillis) Un ensemble (T, \leq) est un treillis si toute partie finie de T possède un sup et un inf dans T .

Le sup de deux éléments α et β est noté $\alpha \vee \beta$ et l'inf est noté $\alpha \wedge \beta$.

Propriétés 1.1 Soit T un treillis, pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in T$, on a :

1. $\alpha \vee \alpha = \alpha$ (idempotence),
2. $\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$ (commutativité),
3. $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ (associativité),
4. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = \alpha$ (absorption),
5. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \leq (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$,
6. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \geq (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.

On peut vérifier que, réciproquement, un ensemble T muni de deux opérations \vee et \wedge vérifiant les propriétés 1.1 est un treillis

Définition 1.7 (Top) Dans un treillis le plus grand élément est la somme de tous les éléments du treillis. Il est noté T (Top).

2.2 Exemples.

Exemple 1.3 3 ordonné usuellement est un treillis, on a alors $\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta)$ et $\alpha \wedge \beta = \min(\alpha, \beta)$.

Exemple 1.4 Etant donné un ensemble F , l'ensemble des parties de F ordonnées par l'inclusion est un treillis, où les bornes sup et inf sont données respectivement par :

$$A \wedge B = A \cap B, A \vee B = A \cup B.$$

2.3 Le théorème du point fixe de Knaster-Tarski.

Un des principaux résultats concernant les treillis est le théorème du point fixe, en effet un certain nombre de preuves d'existences d'éléments suprémaux ou de solutions d'équations reposent sur ce théorème.

Théorème 1.2 Une application croissante d'un treillis complet dans lui même admet un point fixe.

Démonstration. On veut démontrer que $x_{inf} = \inf\{t \in T \mid t \geq f(t)\}$ est un point fixe de f (i.e. $f(x_{inf}) = x_{inf}$), pour cela on montre que l'ensemble $A = \{t \in T \mid t \geq f(t)\}$, est non vide car étant complet il admet un plus grand élément T satisfaisant $T \geq f(T)$. De plus par définition de x_{inf} et par monotonie f on a :

$$\forall t \in A, t \geq f(t) \Rightarrow t \geq x_{inf} \Rightarrow f(t) \geq f(x_{inf}),$$

donc $x_{inf} = inf(A) \geq f(x_{inf})$ et par monotonie de f on a : $x_{inf} \geq f(x_{inf}) \Rightarrow f(x_{inf}) \geq f(f(x_{inf}))$ ce qui montre que $f(x_{inf}) \in A$, donc $f(x_{inf}) \geq inf(A) = x_{inf}$, finalement il vient $f(x_{inf}) = x_{inf}$.

3 Application 1 : l'équation $x = ax \oplus b$.

3.1 L'équation $x = ax \oplus b$ dans les dioïdes complets.

On peut d'abord vérifier que T est toujours solution de $x = ax \oplus b$ (pour $a \neq \varepsilon$, sinon b est l'unique solution). C'est le plus grand point fixe de $f(x) = ax \oplus b$. On peut aussi chercher son plus petit point fixe. On pourrait considérer la fonction $f(x) = ax \oplus b$, et appliquer le théorème du point fixe en remarquant que la fonction f est croissante (on rappelle que \oplus désigne le max donc $f(x) = \max(ax, b)$). Mais il est plus intéressant de chercher la plus petite solution, pour cela on introduit un nouvel opérateur l'étoile de Kleene.

Définition 1.8 (L'étoile de Kleene) On définit l'étoile de Kleene par :

$$A^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} a^n.$$

Notation 1.1 (Opérateur « plus ») L'opérateur « plus », qui dérive de l'étoile est défini par :

$$a^+ = a^* a = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} a^n.$$

On a de plus la relation :

$$e \oplus a^+ = a^*.$$

Proposition 1.1 Soit D un dioïde complet, $\alpha, \beta \in D$, et c un entier strictement positif. On a :

1. $(\alpha^*)^* = \alpha^*$,
2. $(\alpha^+)^* = a^*$,
3. $\alpha^* = (\alpha^0 \oplus \dots \oplus \alpha^{c-1})(\alpha^c)^*$,
4. $(\alpha \oplus \beta)^* = (\alpha^* \beta)^* \alpha^*$,
5. $(\alpha \oplus \beta)^* = \beta^* (\alpha \beta^*)^*$,
6. $\alpha^* = \alpha^* \alpha^*$,
7. $(\alpha \beta^+)^+ = \alpha (\alpha \oplus \beta)^*$,
8. $(\alpha \beta^*)^* = e \oplus \alpha (\alpha \oplus \beta)$.

De plus si α et β commutent, on a :

9. $(\alpha \oplus \beta)^* = \alpha^* \beta^*$.

Théorème 1.3 L'inéquation $x \geq ax \oplus b$, dans un dioïde complet admet une plus petite solution, égale à a^*b . De plus $x_0 = a^*b$ réalise l'égalité :

$$x_0 = ax_0 + b.$$

3.2 Equations implicites matricielles : $x = Ax \oplus b$ et notions d'analyse spectrale .

Dans ce paragraphe on considère toujours l'équation implicite $x = Ax \oplus b$, mais A est ici une matrice carrée, x et b sont des vecteurs, tous à coefficients dans un dioïde complet D . En se plaçant dans le dioïde des matrices carrées $D^{n \times n}$, et en complétant b et x en des matrices carrées par des colonnes de ε , on se ramène à appliquer le théorème 1.3, donc la plus petite solution de l'équation matricielle est donnée par $x = A^*b$. En outre, on vérifie l'égalité. Cependant l'expression $x = A^*b = \bigoplus_n A^n b$ n'est pas directement utilisable, on cherche donc un algorithme permettant de calculer les étoiles de matrices quand les étoiles de coefficients sont connues

3.2.1 Résolution de l'équation implicite matricielle $x = Ax \oplus b$.

Lemme 1.2 Pour la matrice suivante, partitionnée en quatre blocs, on a :

$$A^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} a^* \oplus a^*b(ca^*b \oplus d)^*ca^* & a^*b(ca^*b \oplus d)^* \\ (ca^*b \oplus d)^*ca^* & (ca^*b \oplus d)^* \end{bmatrix}.$$

Démonstration. (on reprend ici la démonstration surtout à titre d'exemple de résolution d'équations implicites, plus que pour son intérêt théorique)

Soit X définie par :

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}.$$

A^* est la plus petite solution de $X \geq AX \oplus Id$, autrement dit, on a le système suivant :

$$\begin{aligned} x_{11} &\geq ax_{11} \oplus bx_{21} \oplus e, \\ x_{12} &\geq ax_{12} \oplus bx_{22}, \\ x_{21} &\geq cx_{11} \oplus dx_{21}, \\ x_{22} &\geq cx_{12} \oplus dx_{22} \oplus e. \end{aligned}$$

Les deux premières équations permettent d'éliminer respectivement x_{11} et x_{12} puis de reporter les expressions obtenues dans les deux suivantes, on a alors les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} x_{11} &\geq a^*(bx_{21} \oplus e) \Rightarrow x_{21} \geq (d \oplus ca^*b)x_{21} \oplus ca^*, \\ x_{12} &\geq a^*bx_{22} \Rightarrow x_{22} \geq (d \oplus ca^*b)x_{22} \oplus e. \end{aligned}$$

On a les solutions pour x_{21} et x_{22} , à partir desquelles on obtient celles de x_{11} et x_{12} pour obtenir le système suivant :

$$\begin{aligned} x_{11} &\geq a^* \oplus a^*b(ca^*b \oplus d)^*ca^*, \\ x_{12} &\geq a^*b(d \oplus ca^*b)^*, \\ x_{21} &\geq (ca^*b \oplus d)^*ca^*, \\ x_{22} &\geq (ca^*b \oplus d)^*. \end{aligned}$$

On a montré l'inégalité, pour prouver l'égalité il faut reporter les expressions trouvées dans $AX \oplus Id$ et de vérifier l'égalité $X = AX \oplus Id$, on a alors le résultat souhaité.

3.2.2 Notions d'analyse spectrale.

3.2.2.1 Graphe et matrice associée.

On peut associer une matrice à un graphe orienté. Un certain nombre de propriétés de la matrice (par exemple les valeurs ou vecteurs propres) sont alors associées à des propriétés du graphe. On donne par la suite quelques notions d'analyse spectrale.

Définition 1.9 (Matrice associée à un graphe orienté) On rappelle qu'un graphe orienté est un couple de deux ensembles (S,A) , avec $A \subset S^2$, S est l'ensemble des sommets, A l'ensemble des arêtes. On pourra repérer chaque arête (i,j) par une lettre d'un alphabet Σ . A un graphe à n sommets, on associe la matrice $M \in P(A^*)^{n \times n}$ telle que :

$$M_{ij} = \begin{cases} \text{lettre valant l'arc } j \rightarrow i, \text{ s'il existe} \\ \varepsilon \text{ autrement} \end{cases} .$$

Exemple 1.5 On a ci-dessous un exemple de graphe et de matrice associée :



Fig. Graphe et matrice associée.

On appelle chemin de longueur k de j à i une suite $p = (i_k, i_{k-1}, \dots, i_1)$, avec $i_1=j$ et $i_k=i$ telle que pour tout $l = 1, \dots, k-1, i_l \rightarrow i_{l+1}$ soit un arc. Si $i = j$, on parle de circuit. Le poids d'un chemin p est défini par :

$$w(p) = M_{i_k i_{k-1}} \otimes \dots \otimes M_{i_2 i_1} .$$

Quitte à identifier le mot $w(p)$ et le singleton $\{w(p)\}$, on pourra voir M comme une matrice à coefficients dans $P(A^*)$. Le théorème suivant établit l'équivalence entre la multiplication de matrices et la concaténation de chemins.

Théorème 1.4 M_{ij}^k est égal à la somme des poids des chemins de longueur k allant de j à i . M_{ij}^* est égale à la somme des poids des chemins du graphe de j à i (de longueur arbitraire).

Démonstration. La propriété pour les M^k entraîne la propriété pour M^* . On se limitera à M^2 , le cas général est analogue. Pour M^2 on a :

$$M_{ij}^2 = \bigoplus_k M_{ik} M_{kj}.$$

$M_{ik} M_{kj}$ est non nul ssi il y a un arc de j à k et de k à i , c'est à dire ssi (i, k, j) est un chemin de longueur 2 de j à i , auquel cas $w(i, j, k) = M_{ik} M_{kj}$ est le poids de ce chemin.

Une des conséquences du théorème précédent est qu'on obtient les poids extrémaux en considérant uniquement les coefficients de M^* . En effet prendre la somme c'est prendre le minimum (ou le maximum si on se place dans $(3 \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ et non dans $(3 \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$).

Théorème 1.5 M_{ij}^* est égal au poids minimum (3_{\min}) d'un chemin de j à i .

Si on se place dans 3 et non dans $3 \cup \{-\infty, +\infty\}$, on peut se demander quand M^* converge. M^* converge à la condition qu'il n'y ait pas de chemin de poids négatif (on peut retrouver la preuve à la page 37 de [9]).

3.2.2 Matrices irréductibles.

Il est intéressant d'étudier les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice, pour cela définissons préalablement le concept de matrice irréductible.

Soit (S, \oplus, \otimes) un semianneau positif, c'est à dire vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta = \varepsilon &\Rightarrow \alpha = \varepsilon \text{ et } \beta = \varepsilon, \\ \alpha \otimes \beta = \varepsilon &\Rightarrow \alpha = \varepsilon \text{ ou } \beta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dans un graphe orienté, on définit la relation de forte connexité : $i \mathfrak{R} j$ s'il existe un chemin de i à j et aussi un chemin de j à i . Par convention, il existe toujours un chemin (de longueur nulle) de i à i . Les classes d'équivalence sont appelées les composantes fortement connexes. Un graphe est dit fortement connexe s'il y a une seule classe d'équivalence pour la relation \mathfrak{R} .

Proposition 1.2 Soit S un semianneau positif et $M \in (S^+)^{n \times n}$. les propositions suivantes sont équivalentes :

1. le graphe associé à la matrice M est fortement connexe;
2. on ne peut pas partitionner la matrice M sous la forme triangulaire par blocs :

$$A = P \begin{bmatrix} B & C \\ \varepsilon & D \end{bmatrix} P^{-1}, \text{ où } P \text{ est une matrice de permutation;}$$

3. $(I \oplus A)^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.

Définition 1.10 (Matrice irréductible) La matrice M est dite irréductible lorsqu'elle vérifie les conditions de la proposition 1.2.

L'intérêt de l'irréductibilité tient, entre autre, à ce qu'un vecteur propre d'une matrice irréductible a toutes ses composantes non nulles.

Lemme 1.3 (Solidarité des matrices irréductibles) Soit S un semi-anneau positif, $M \in S^{n \times n}$ irréductible et $u \in (S^+)^n \setminus \{\varepsilon\}$ tel que $Au = ru$. Alors $u_i \neq \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Démonstration. Soit j un indice tel que $u_j \neq \varepsilon$. De $ru_i = (Au)_i = \bigoplus_k A_{ik} u_k$, on déduit que tout i accessible en un coup depuis j (i.e. tel que $A_{ij} \neq \varepsilon$) vérifie $u_i \neq \varepsilon$. En raisonnant de proche en proche, tout i étant accessible en un nombre fini de coups depuis j , on a que $u_i \neq \varepsilon$.

3.2.2.3 Valeurs propres, vecteurs propres et cyclicité.

Théorème 1.6 Une matrice $M \in (S_{\max})^{n \times n}$ irréductible admet une unique valeur propre, notée $\rho(M)$, donnée par :

$$\rho(M) = \bigoplus_{i=1}^n (tr M^i)^{1/i}.$$

En écrivant la trace comme la somme des poids des circuits de A^i et en remarquant que le poids d'un circuit composé de plusieurs circuits élémentaires est dominé par le plus grand poids moyen de ses circuits élémentaires, le rayon spectral apparaît comme la moyenne géométrique maximale (dans l'algèbre $(\max, +)$, ce qui correspond à la moyenne arithmétique dans l'algèbre usuelle) des poids des circuits élémentaires du graphe.

$$\rho(M) = \bigoplus_c w(c)^{1/l(c)}$$

Exemple 1.6 Graphe critique d'une matrice.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

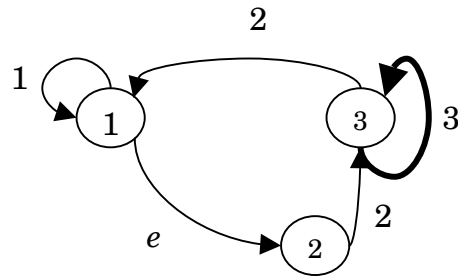


Fig. Graphe critique et matrice.

Pour la matrice M ci-dessus, le graphe associé n'admet que trois circuits élémentaires $(1,1)$, $(3,3)$ et $(1, 2, 3, 1)$, on a donc :

$$\rho(M) = \max(A_{11}, A_{33}, (A_{32} + A_{21} + A_{13})/3) = 3.$$

Définition 1.11 (Graphe critique) Les circuits qui réalisent le maximum dans la formule du rayon spectral sont qualifiés de critiques. On appelle graphe critique, noté $GC(M)$, le sous-graphe de $G(M)$ formé des sommets et arêtes appartenant à un circuit critique. On notera $C^c = (C_1^c, \dots, C_q^c)$, l'ensemble des q composantes fortement connexes du graphe critique.

Notation 1.2 les composantes du graphe critique sont représentées en gras sur le graphe (circuit (3, 3) sur l'exemple).

Définition 1.12 (Cyclicité dans le cas (max, +)) On définit comme suit la cyclicité d'une matrice $M \in (3_{\max})^{n \times n}$:

1. La cyclicité d'une composante connexe du graphe critique est égale au pgcd des longueurs des circuits de cette composante;
2. La cyclicité de la matrice M est égale au ppcm des cyclicités des composantes connexes du graphe critique. On la notera $c(M)$.

Théorème 1.7 (cyclicité) Soit $M \in (3_{\max})^{n \times n}$ irréductible. Il existe un entier N tel que :

$$k \geq N \Rightarrow M^{k+c(M)} = (\rho(M))^{c(M)} M^k.$$

3.2.2.4 Interprétation : régime périodique et taux de production.

Soit un système de production en régime autonome vérifiant l'équation aux dateurs :

$$x(n+1) = Mx(n).$$

On s'intéresse aux valeurs propres et aux vecteurs propres de la matrice M , i.e. les vecteurs $u \in (3_{\max})^n \setminus \{\varepsilon\}$ et scalaires $\lambda \in 3_{\max}$ tels que $Mu = \lambda u$. Si u est un vecteur propre de M , et si on prend la condition initiale $x_0 = u$, on obtient $x(n+1) = \lambda \otimes x(n) = \lambda + x(n)$. Autrement dit une pièce est produite toutes les λ unités de temps : λ est donc l'inverse du taux de production. En outre, le vecteur propre u donne une condition initiale autorisant un fonctionnement périodique du système.

Si M est irréductible, on peut relaxer la condition initiale, en effet le théorème de cyclicité entraîne que le comportement est périodique i.e. :

$$x(k+c) = \rho(M)^c x(k),$$

pour k assez grand. En revenant à l'algèbre usuelle cela s'écrit :

$$x(k+c) = c * \rho(M) + x(k).$$

Autrement dit, c événements se produisent tous les $c\rho(M)$ unités de temps, et $\rho(M)$ est le temps moyen de production d'une pièce (l'inverse du taux de production). On peut donc conclure par le résultat suivant :

un graphe d'événements temporisé fortement connexe fonctionnant en régime autonome atteint, après un régime transitoire fini, un régime périodique. Le taux de production est l'inverse de la valeur propre de la matrice de la dynamique (max, +) du système.

3.2.2.5 Exemple.

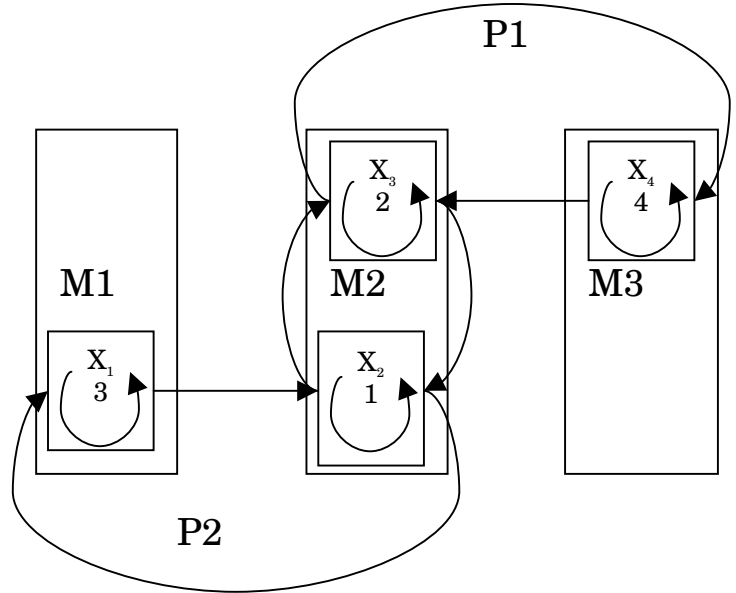
On considère un atelier flexible composé de trois machines M1, M2 et M3, qui usinent deux types de pièces P1 et P2. les temps d'usinage en fonction de la pièce et de la machine sont donnés dans le tableau suivant :

Algèbre des diodes

| | | |
|----|----|----|
| | P1 | P2 |
| M1 | / | 3 |
| M2 | 2 | 1 |
| M3 | 4 | / |

Le fonctionnement de l'atelier respecte les cycles suivants :

- M2 traite P1 puis P2 ;
- P1 est usiné par M3 puis M2 ;
- P2 est usiné par M1 puis M2.



Mise en équation sous forme d'un système max-linéaire :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k).3 \oplus x_2(k).1 \\ x_2(k+1) = x_1(k+1).3 \oplus x_3(k+1).2 \\ x_3(k+1) = x_2(k).1 \oplus x_4(k+1).4 \\ x_4(k+1) = x_3(k).2 \oplus x_4(k).4 \end{cases} ,$$

on met ce système sous forme matricielle $x(k+1) = A.x(k+1) \oplus Bx(k)$:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} x(k+1) \oplus \begin{bmatrix} 3 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 4 \end{bmatrix} x(k).$$

En appliquant la résolution des équations implicites on a une solution du type $x = Ax+B$, on a une solution $x(k+1) = A^*B.x(k)$. Reste à calculer A^* , pour cela on remarque que A^* est solution de $x = A.x \oplus I_q$, on peut donc calculer toutes les composantes de la matrice en explicitant le système :

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{41} & \cdots & & x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{41} & \cdots & & x_{44} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}.$$

En respectant les règles de calcul de l'algèbre (max,+) et en résolvant variable par variable on obtient les résultats suivants :

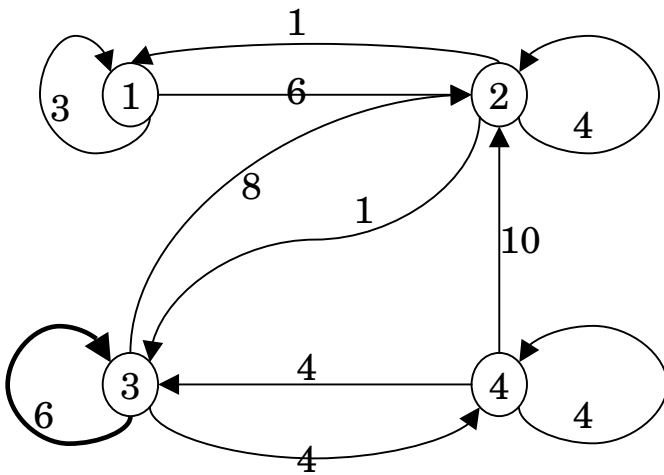
$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} = e, \\ x_{12} = x_{13} = x_{14} = \varepsilon \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x_{44} = e \\ x_{41} = x_{42} = x_{43} = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{31} = 4.x_{41} = \varepsilon \\ x_{32} = 4.x_{42} = \varepsilon \\ x_{33} = e \oplus 4.x_{43} = e \\ x_{34} = 4.x_{44} = 4. \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x_{21} = 3.x_{11} \oplus 2.x_{31} = 3.x_{11} = 3 \\ x_{22} = e \oplus 3.x_{12} \oplus 2.x_{32} = e, \\ x_{23} = 3.x_{13} \oplus 2.x_{33} = 2.x_{33} = 2, \\ x_{24} = 3.x_{14} \oplus 2.x_{34} = 2.x_{34} = 6. \end{array} \right.$$

On peut alors écrire A^* et calculer A^*B :

$$A^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & e & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & e & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}, A^*B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & e & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & e & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 4 & 8 & 10 \\ \varepsilon & 1 & 6 & 8 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ce qui s'interprète par le graphe fortement connexe suivant :



La valeur propre du système est donnée par :

$$\rho(A^*B) = \bigoplus_{i=1}^n (\text{tr}(A^*B)^i)^{1/i}.$$

Dans ce cas on a le max pour le circuit (3,3), de longueur 1, autrement dit : $\rho(A^*B) = w(3,3) = 6$. Ce résultat s'interprète comme un **temps de cycle du système égal à 6 u.t.**

4 Application 2 : l'équation $y = A.x$.

4.1 Résolution de l'équation $y = A.x$.

Dans ce chapitre on étudie la résolution, dans l'algèbre (max, +), de l'équation $y = A.x$, où x et $y \in 3^n$ et $A \in 3^{n \times n}$. Les résultats exposés ici ont été établis par J.M. Prou et E. Wagneur dans [16].

On définit les multiplications max et min, respectivement notée « . » (parfois omis) et « . ' » par :

$$(A . x)_i = \bigvee_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

$$(A . ' x)_i = \bigwedge_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

On définit aussi les notations suivantes, A^{\cdot} est appelée la résiduée de A :

$$A^{\cdot} = (a_{ij}^{-1}),$$

$$A^{-T} = (A)^T = (a_{ji}^{-1})^T,$$

$$A^{\star} = (A . A^{-T}).$$

Théorème 1.8 (Résolution de l'équation $y = A.x$) Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est solution de l'équation $y = A.x$ si et seulement si il vérifie les deux propriétés suivantes :

$$x = A^{-T} . ' y,$$

$$A.(A^{-T} . ' y) = y.$$

La dernière propriété peut aussi s'écrire : $A^{\star} . ' y = y$, autrement dit y est un point fixe de A^{\star} .

Théorème 1.9 La matrice A^{\star} vérifie les deux relations suivantes:

$$A^{\star} . ' A = A,$$

$$(A^{\star})^{\wedge \ast} = A^{\star}.$$

Le terme $(A^{\star})^{\wedge \ast}$ représente l'étoile obtenue en prenant les puissances calculées par min-multiplication.

Démonstration. La première relation se démontre par le calcul du premier terme, en décomposant les différents opérateurs min et max et en utilisant la propriété d'absorption.

Pour montrer la deuxième relation, il faut remarquer que $A^{\star} = (A^{\star})^{\wedge \ast}$ est équivalent à $\forall k \quad (A^{\star})^k \leq A^{\star}$, en particulier pour $k = 0$ on a $A^{\star} \geq I$ donc par monotonie il vient $(A^{\star})^2 \geq A^{\star}$, or pour $k = 2$, on a $(A^{\star})^2 \leq A^{\star}$, on donc l'égalité : $(A^{\star})^2 = A^{\star}$. La réciproque est évidente par récurrence ($(A^{\star})^2 = A^{\star} \Rightarrow (A^{\star})^k = A^{\star}$ pour tout entier k). On a établi que la proposition est équivalente à $A^{\star 2} = A^{\star}$, or pour obtenir cette égalité il suffit de max-multiplier à droite les deux membres de la première relation par A^{-T} .

La première propriété montre que les colonnes de A sont des combinaisons min-linéaires des colonnes de A^{\star} , plus précisément A est un point fixe de A^{\star} .

Théorème 1.10 Si on note $Im^{\wedge} A^{\star}$ (resp. $Im^{\vee} A^{\star}$) l'espace engendré par les combinaisons min-linéaires (resp. max-linéaires) des colonnes de A^{\star} , on a :

$$Im^{\vee} A^{\star} \subset Im^{\wedge} A^{\star}.$$

Démonstration. Il suffit de prouver $\text{Im}^\vee A^* \subset \text{Im}^\vee A \subset \text{Im}^\wedge A^*$. La première inclusion vient de la définition de A^* et de $(AB = C \Rightarrow \text{Im } C \in \text{Im } A)$. On a la deuxième car $\forall x \in \text{Im}^\vee A \Rightarrow \exists y$ tel que $A.y = x$, or d'après le théorème 1.8 ce n'est possible que si x est un point fixe de A^* donc $x \in \text{Im } A^*$.

Théorème 1.11 $\text{Im}^\vee A^* = \text{Im}^\wedge A^*$ si et seulement si $\text{Im}^\vee A^*$ est un treillis.

On peut de même établir les équations duales en considérant l'équation $x=A./y$ et en définissant $A^\diamond = A./A^{-T}$, il suffit alors de reprendre les résultats de ce chapitre en remplaçant A^* par A^\diamond et en permutant les opérateurs \vee et \wedge .

4.2 Application : atteignabilité et commandabilité.

Une application intéressante de la résolution des équations $y = Ax$ est l'étude de l'atteignabilité et de la commandabilité des systèmes décrits par les équations d'état classiques, où x est l'état du système, u la commande et y la sortie:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k+1), \\ y(k+1) &= Cx(k+1). \end{aligned}$$

En remplaçant successivement $x(i)$ par son expression dans celle de $x(k+1)$ on obtient:

$$x(k+1) = A^{k+1}x(0) + A^k Bu(1) + A^{k-1} Bu(2) + \dots + Bu(k+1),$$

en écrivant cette relation sous forme matricielle on obtient:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \Gamma_k & A^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ x(0) \end{bmatrix}, \text{ où } \Gamma_k = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^k B A^{k+1} \end{bmatrix} \text{ et } u_k = \begin{bmatrix} u(k+1) \\ u(k) \\ \dots \\ u(1) \end{bmatrix}.$$

On est donc ramené au problème précédent car étudier l'atteignabilité ou la commandabilité revient à chercher des solutions en $[u_k \ x(0)]^T$, autrement dit à chercher un état initial, et une commande permettant d'atteindre l'état $x(k+1)$ en $k+1$ étapes. Si le problème a une solution on dit que $x(k+1)$ est atteignable, si de plus on peut prendre $x(0) = [0]$ on dit l'état commandable, dans ce cas le système devient : $x(k+1) = [\Gamma_k][u_k]$. D'après le théorème 1.8 il suffit de vérifier que $x(k+1)$ est une combinaison max-linéaire des colonnes de $[\Gamma_k \ A^{k+1}]^*$.

Exemple.

L'état $X = [11 \ 14]^T$ est-il atteignable, commandable par le système défini par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}?$$

On recherche dans un premier temps si X est atteignable en une étape, on a $[\Gamma_0$

$$A] = [B \ A] \text{ et } [\Gamma_0 \ A]^* = \begin{bmatrix} e & 2^{-1} \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}, \text{ et } \lambda \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} \wedge \mu \begin{bmatrix} 2^{-1} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \end{bmatrix}, \text{ pour } \lambda = 11 \text{ et } \mu = 14, \text{ donc}$$

$$X \text{ est atteignable et } \begin{bmatrix} u(2) \\ x(1) \end{bmatrix} = [\Gamma_0 \ A]^{-T} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \end{bmatrix} = [10 \ 10 \ 12]^T, \text{ autrement dit, } X \text{ est}$$

accessible depuis $X(1) = [10 \ 12]^T$ avec la commande $u(1) = 10$. On peut se demander si X est commandable en deux étapes on prend alors $x(0) = 0 : \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \end{bmatrix} = [\Gamma_1] \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \end{bmatrix}$, or $[\Gamma_1]^* = \begin{bmatrix} e & 2^{-1} \\ 3 & e \end{bmatrix}$ et on vérifie facilement que $X \in \text{Im} \wedge \Gamma_1^*$ on a donc $\begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \end{bmatrix} = [\Gamma_1]^{-T} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^{-1} & 3^{-1} \\ 2^{-1} & 5^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$, X est donc commandable avec $u(1) = 9$ et $u(2) = 10$.

Conclusion.

Outre l'intérêt théorique des structures algébriques de dioïdes et de treillis, le but de ce chapitre est de présenter le cadre mathématique utile aux différentes approches d'étude des SED. Les algèbres $(\min,+)$ et $(\max,+)$ sont surtout dédiées aux RdP temporisés et plus particulièrement aux Graphes d'Evènements Temporisé, mais on retrouve par exemple l'opérateur étoile dans la théorie des automates et des langages, de même que la structure de treillis permet d'assurer l'existence d'éléments suprémaux pour le calcul d'automates superviseurs.