Introduction

Les réseaux de Petri (RdP) ont été créés entre 1960 et 1962 par le mathématicien Carl Adam Petri (Petri est donc un nom propre qui s'écrit sans accent).

un RdP est un outil graphique et mathématique permettant de modéliser le comporte- ment dynamique des SED. Sa représentation graphique permet de visualiser d'une manière naturelle la synchronisation, le parallélisme et le partage de ressources. Sa représentation mathématique permet d'établir les équations d'états, à partir desquelles il est possible d'apprécier les propriétés du modèle et de le comparer avec le comportement du système modélisé.

2 Notations et définitions de base

2.1 Définition d'un RdP

Un RdP est un graphe orienté comporte deux types de sommets : les places et les tran- sitions.
Une place est représentée par un cercle et une transition par un trait ou par un rectangle. Les places et les transitions sont reliées par des arcs.
Le nombre de places est fini et non nul et le nombre de transitions est également fini et non nul.
Un arc relie soit une transition à une place soit une place à une transition. A chaque arc, on attribut un poids (nombre entier). Par défaut ce nombre est égal à 1.

Exemple 1. *Dans le RdP de la figure (1), l'ensemble des places est $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ et l'ensemble des transitions est $T = \{t_1\}$. Le poids de l'arc reliant p_1 à t_1 est égal à 1 alors que celui reliant p_2 à t_1 est égal à 2.*

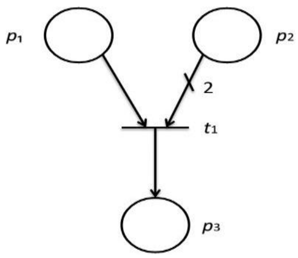


FIGURE.1 – un RdP non marqué

2.2 Marquage d'un RdP

Le marquage d'un RdP est une application de l'ensemble des places P vers N. Chaque place contient un nombre entier (positif ou nul) de marques ou jetons.
La distribution des jetons dans les places détermine le marquage du réseau. Ce marquage M associe un nombre entier $M(p_i)$ (positif ou nul) à chaque place p_i du réseau. Le marquage initial est noté M_0.

Définition 1. *Un RdP marqué est défini par (R, M_0) avec R un RdP non marquer, M_0 est la valeur initiale de la fonction marquage M définie de P dans N où, pour toute place $p_i \in P$ $M(p_i)$ est le nombre de marques contenues par la place p_i.*

Exemple 2 : Soit le RdP suivant :

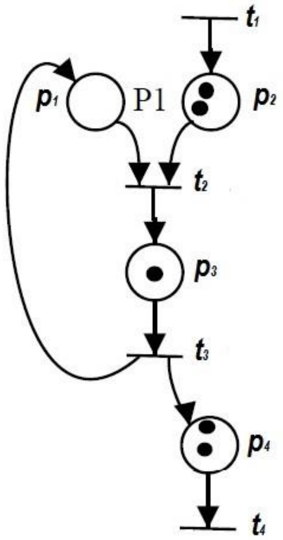


FIGURE 2 – un RdP marqué

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ et $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$.
Les places p_2, p_3 et p_4 sont respectivement marquées par 2, 1, 2 marques, la place p_1 est vide,c-a-d $M_0=(p_1)=0$, $M_0(p_2)=M_0(p_4)=2$,$M_0(p_3)=1$, donc le marquage initial est donné par $M0=[0\ 2\ 1\ 2]^T$

*t_1 est une transition sans place d'entrée : **transition source**.*
*t_4 est une transition sans place de sortie : **transition puit**.*

3 Franchissement de Transition

L'évolution d'un RdP correspond à l'évolution de son marquage (changement de l'état du système). Ce changement d'état se fait par franchissement de transitions.

Une transition t_i est dite **sensibilisée** ou **franchissable** ou **validée** ou **tirable** si et seulement si les places en amont (places d'entrée de t_i) de cette transition contiennent au moins un nombre de jeton égal au poids de l'arc reliant la place à la transition.

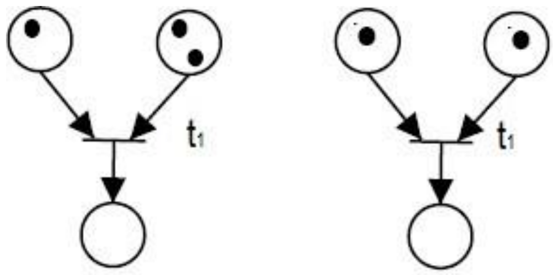


FIGURE 3 – Transition sensibilisée (gauche), non sensibilisée (droite)

Remarque : Une transition source (sans place d'entrée) est toujours franchissable.

Le franchissement de la transition consiste à retirer des places amont, une quantité de jetons égale au poids de l'arc entrant dans la transition, et à ajouter un nombre égal au poids de l'arc sortant de la transition dans les places en aval de la transition.

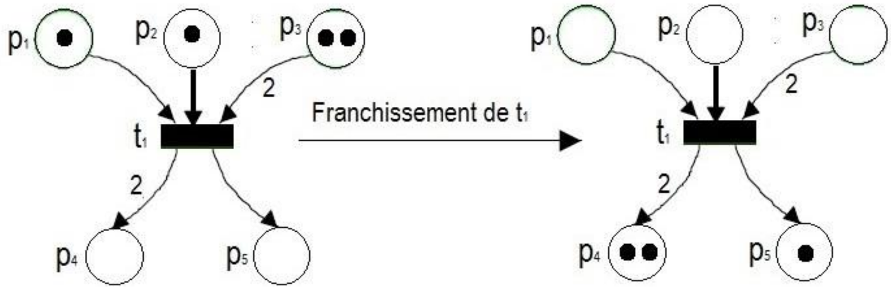


FIGURE 4 – Franchissement d'une transition

3-1 Séquence de franchissement et marquages accessibles

Une séquence de franchissement (sequence de tir) σ est une suite de transitions qui peuvent être franchies successivement à partir d'un marquage donné. On note :
$M \xrightarrow{\sigma} M'$ ou $M[\sigma\rangle M'$: à partir du marquage M, le franchissement de la séquence σ aboutit au marquage M'.

L'ensemble des marquages accessibles est l'ensemble des marquages M_i qui peuvent être atteint par le franchissement d'une séquence σ à partir du marquage initial M_0. On le note M_0^* tel que :

$$M_0^* = \{M_i | M_0[\sigma\rangle M_i\}$$

Exemple 6. *Soit le RdP de la figure (4). Le vecteur du marquage initial est donné par* $M_0 = (1\ 0\ 0\ 0)^T$.

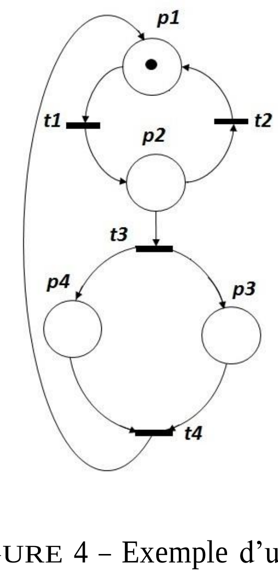


FIGURE 4 – Exemple d'un RdP

L'ensemble des transitions est $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. *A partir de* M_0, *les séquence* $\sigma_1 = (t_1t_3t_4)$ *et* $\sigma_2 = (t_1t_2t_1t_3)$ *sont des séquences de franchissement. Par contre, la séquence*$\sigma = (t_1t_3t_2)$ *n'est pas une séquence de franchissement.*

L'ensemble des marquages accessibles M_0^* *est donné par :*

$M_0{}^* = \{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4\}$ *avec*

$$M_0 = M_2 = M_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

4 Caractéristiques des réseaux de Petri

4-1 Parallélisme

Le parallélisme représente la possibilité que plusieurs processus évoluent simultanément au sein du même système. On peut représenter l'évolution de deux processus en parallèle à l'aide d'une transition ayant plusieurs places de sortie.

Par exemple, dans le RdP suivant, le franchissement de t_1 déclenche deux évolutions en parallèle : de la place p_1 à la place p_3 d'une part et de la place p_2 à la place p_4 d'autre part.

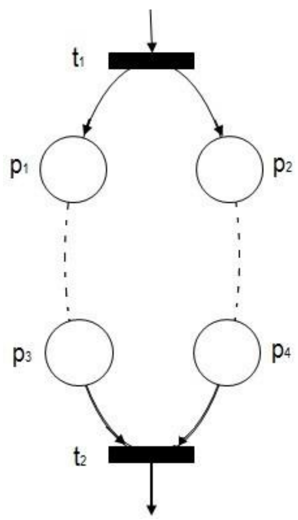


FIGURE 6 – Parallélisme

4-2 Synchronisation

Mutuelle : La synchronisation mutuelle ou rendez-vous permet de synchroniser les opérations de deux processus.

Sémaphore : Les opérations du processus 2 ne peuvent se poursuivre que si le processus 1 a atteint un certain niveau dans la suite de ses opérations. Par contre, l'avancement des opérations du processus 1 ne dépend pas de l'avancement des opérations du processus 2.

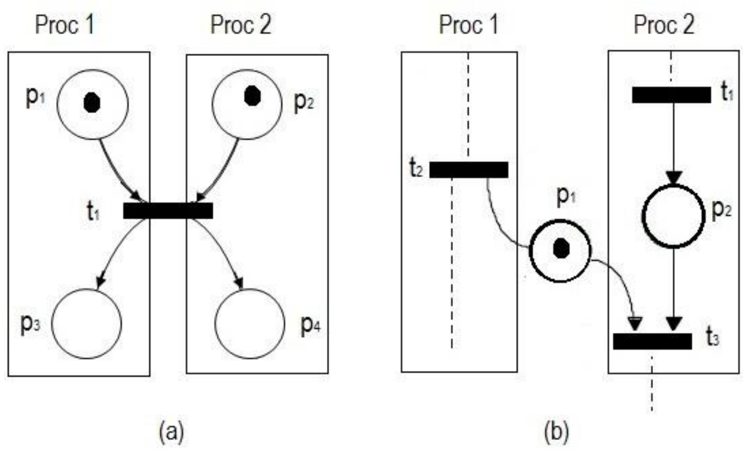


FIGURE 7 – Synchronisation : (a) mutuelle (b) sémaphore

4-3 Partage de ressources

Cette structure est modélisé le fait qu'au sein du même système plusieurs processus partagent une même ressource. par exemple, dans la figure suivante,

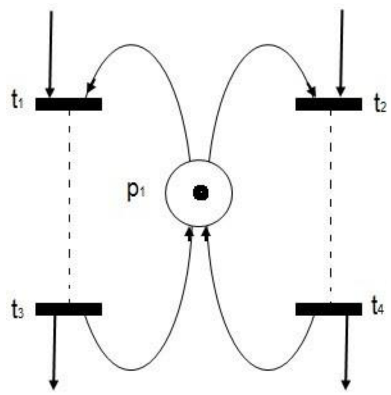


FIGURE 8 – Partage de ressources

la place p_1 modélise la disponibilité d'une ressource qui peut être utilisée par la partie gauche à partir du franchissement de t_1 ou par la partie gauche mais pas par les deux simultanément.

5 Propriétés des réseaux de Petri :

5-1.1 Bornage :

– Une place p_i est dite bornée pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible à partir de M_0, le nombre de marques dans p reste borné. Elle est dite k_i-bornée si le nombre de marques dans p_i est toujours inférieur ou égal à k_i i.e :

$$\forall M \in M_0^*, \exists k_i \in \mathbb{N} \ \ tel\ que \ \ M(p_i) \leq k_i$$

- Un RdP marqué est k_i-borné si toutes ses places sont k_i-bornées. La borne k du RdP est le max des bornes de ses places i.e $k = Max(k_i)$.
  Cas particulier : $k = 1$, le réseau est alors dit "sauf" ou "binaire".

Exemple 7. *Le RdP (a) représente un RdP borné et sauf mais le RdP (b) n'est pas borné car le nombre de jetons dans p_2 augmente pour chaque franchissement de t_1.*

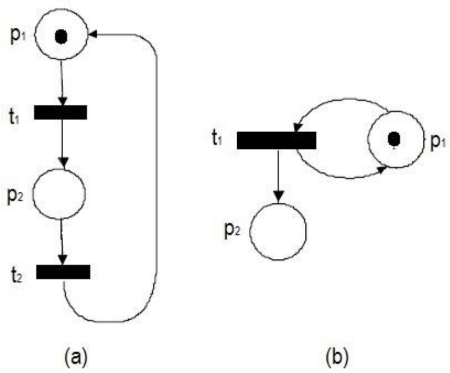


FIGURE 9 – (a) borné et sauf (b) non borné

Intérêt physique de la notion de bornage :

la notion de réseau borné et de places bornées pour un marquage initial M_0 assure au concepteur la "non explosion" des marques dans une ou plusieurs places. Dans le monde de la Productique, une place non bornée peut correspondre à un stock qui, du fait d'un fonctionnement de l'atelier différent du fonctionnement nominal (cas très fréquent dans la réalité industrielle), ne cesse d'augmenter.

5-1.2 Vivacité et blocage :

Vivacité

- Une transition t_j est vivante pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible M^J, il existe une séquence de franchissements à partir de M^J contenant t_j. En d'autres termes, quelque soit l'évolution, il existe toujours une possibilité de franchir t_j à nouveau.
- Un RdP est vivant pour un marquage initial M_0 si toutes ses transition sont vivantes pour M_0.
- Un RdP sauf et vivant est dit Conforme.

Quasi-vivacité

- Une transition t_j est quasi vivante pour un marquage initial M_0, s'il existe une séquence de franchissement qui contient t_j à partir de M_0.
- Un RdP est quasi vivant pour un marquage initial M_0 si toutes ses transition sont quasi vivantes pour M_0.

Blocage

- Un blocage est un marquage tel qu'aucune transition n'est validée.
- Un RdP est bloqué pour M_0 si et seulement s'il existe un marquage accessible M dans lequel plus aucune transition n'est franchissable.

Exemple 8. *Dans le RdP de la figure (10 (a)) , les transitions t_1 et t_2 sont vivantes, donc le RdP est vivant et conforme. Par contre, dans la figure (10 (b)), la transitions t_1 n'est pas vivante, mais elle est quasi vivante car elle est franchissable uniquement au démarrage (à partir de M_0). Donc, le RdP suivant est quasi vivant.*

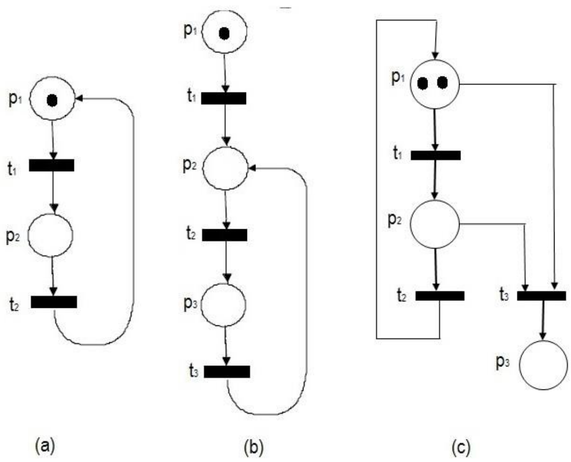


FIGURE 3– (a) RdP vivant sans blocage (b) RdP quasi vivant sans blocage (c) RdP avec blocage

Dans la figure (10 (c)) , les transitions t_1, t_2 ne sont pas vivantes et t_3 est quasi vivante. Le franchissement de t_3 conduit à un blocage, le RdP est donc avec blocage.

Intérêt physique de la notion de vivacité :

Dans un réseau de Petri vivant, toute transition est toujours franchissable (tirable) quel que soit l'état du réseau donc aucune partie du graphe n'est morte ou ne devient morte.

5-1.3 Réinitialisation

- Un RdP a un état d'accueil M pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible $M' \in M_0^*$, il existe une séquence de franchissements σ permettant d'atteindre le marquage M i.e. $M'[\sigma)M$.
- Un RdP est réinitialisable (propre) pour un marquage initial M_0 si M_0 est un état d'accueil.

Exemple 9. *Dans la figure (10 (a)), le RdP n'est pas réinitailisable car le marquage initial $M_0 = (1 \quad 0 \quad 0)^T$ n'est pas un état d'accueil. Par contre le RdP dans la figure (10 (b)) est réinitailisable car $M_0 = (0 \quad 1 \quad 0)^T$ est un état d'accueil.*

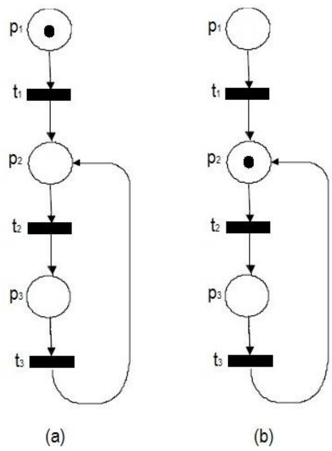


FIGURE 11 – (a) RdP non réinitailisable (b) RdP réinitailisable

Intérêt physique de la notion de réinitialisation :

Beaucoup de systèmes ont un fonctionnement répétitif (ou cyclique). Le modèle réseau de Petri correspondant doit être réinitialisable.

5-1.4 Invariants

Les invariant permettent de caractériser certaines propriétés des marquages accessibles et des transitions franchissables, quelle que soit l'évolution du RdP.

Composantes conservatives et invariants de places

- Soit R un RdP et P l'ensemble de ses places. On est en présence d'un invariant de marquage (simplement appelé invariant) si, pour un ensemble donné de places $P' \subseteq P$, il existe un vecteur d'entiers naturels appelé vecteur de pondérations q tels que :

$$\forall M \in M_0^*, \sum_{p_i \in P'} q_i M(p_i) = constante$$

- L'ensemble des places telles que leur pondération est non nulle est une composante conservative.
- Un RdP est dit conservatif si l'ensemble des places du réseau forme une composante conservative i.e $P' = P$.

Composantes répétitives et invariants de transitions

Il s'agit ici d'étudier le comportement cyclique de l'évolution de certains RdPs.

- On appelle séquence répétitive stationnaire, une séquence de franchissements σ telle que :

$$M_0[\sigma)M_0$$

Si la séquence répétitive contient toutes les transitions du RdP, elle est dite complète.

- On appelle séquence répétitive croissante, une séquence de franchissements σ telle que :

$$M_0[\sigma)M_0' \quad avec \quad M_0' > M_0$$

- On appelle séquence répétitive décroissante, une séquence de franchissements σ telle que :

$$M_0[\sigma)M_0^{''} \quad avec \quad M_0^{''} < M_0$$

- On appelle composante répétitive l'ensemble T' des transitions de T apparaissant dans la séquence σ. Le RdP est dit répétitif si $T = T'$.

Exemple 10. *Soit le RdP suivant :*

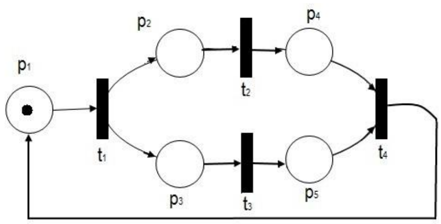


FIGURE 12 – Exemple d'un RdP

1. *On peut trouver deux invariants de marquages :*

$$M(p_1) + M(p_2) + M(p_4) = 1$$
$$M(p_1) + M(p_3) + M(p_5) = 1$$

En faisant la somme des deux equations, on obtient :

$$2M(p_1) + M(p_2) + M(p_3) + M(p_4) + M(p_5) = 2$$

C'est un nouvel invariant qui signifier que la sommes des jetons dans le RdP est constante et dans ce cas le RdP forme une composante conservative.

2. *On peut trouver deux séquences répétitives* $\sigma_1 = (t_1t_2t_3t_4)$ *et* $\sigma_2 = (t_1t_3t_2t_4)$. *Donc, l'ensemble de transition T est une composante répétitive et le RdP est alors répétitif.*

5-2Etude des propriétés des Réseaux de Petri par graphe du marquages et arborescence de couverture

5-2.1 Graphe de marquages

Le graphe de marquages est composé de nœuds qui correspondent au marquages ac- cessibles et d'arc correspondent aux franchissement de transitions. On utilise le graphe de marquages quand le nombre de marquages accessibles est fini.

Exemple 11. *On considère les RdPs dans la figure suivante :*

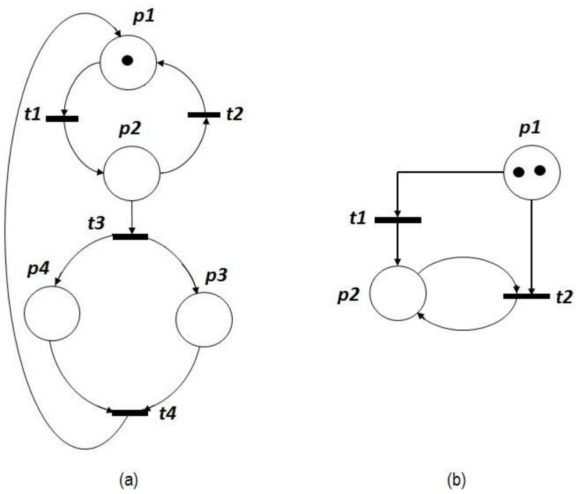


FIGURE 13 – Exemple de deux RdP

les graphes de marquages correspondants sont :

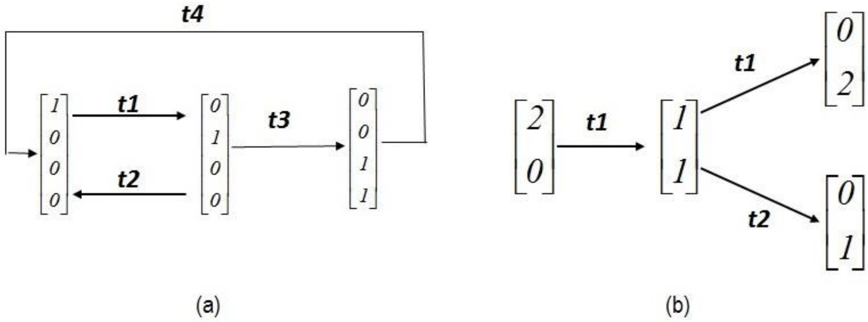


FIGURE 14 – graphes des marquages

A partir du graphe de marquage (a) , on peut voir que le RdP (a) est sauf, vivant, réinitialisable et à partir du graphe de marquage (b) , on peut voir que le RdP (b) est borné, est quasi vivant (il est possible de franchir t_1, t_2 au moins une fois à partir de M_0), est avec blocage (deux états de blocage), et est non réinitialisable.

5-2.2 Arborescence et graphe de couverture

Un graphe de marquage ne peut plus être construit quand le réseau est non borné c-à-d quand le nombre de marquages accessibles est infini. Donc, on construit une arborescence de couverture qui possède un nombre de marquages fini. Puis, on déduit le graphe de couverture.

Algorithme de construction de l'arborescence de couverture

- A partir du marquage initial M_0, indiquer toutes les transitions validées et les mar- quages successeurs correspondants. Si un des marquages est strictement supérieur à M_0, on met la variable "*w*" pour chacune des composantes supérieures aux composantes de M_0 (*w* est un marquage qui représente une infinité de marquages possibles).

- Pour chaque nouveau marquage M_i, on applique une des deux étapes suivantes :

- S'il existe sur le chemin de M_0 jusqu'à M_i (ce dernier exclut) un marquage $M_j = M_i$ alors M_i n'a pas de successeurs.

- Sinon, on prolonge arborescence avec les successeurs M_i tel que pour chaque suc- cesseur M_k de M_i:
- Une composante "w" de M_i reste une composante "w" de M_k .
- S'il existe un marquage M_j sur le chemin de M_0 à M_k tel que $M_k > M_j$, alors on met "w" pour chacune des composantes supérieures aux composantes de M_i.

Exemple 12. *Soit le RdP suivant :*

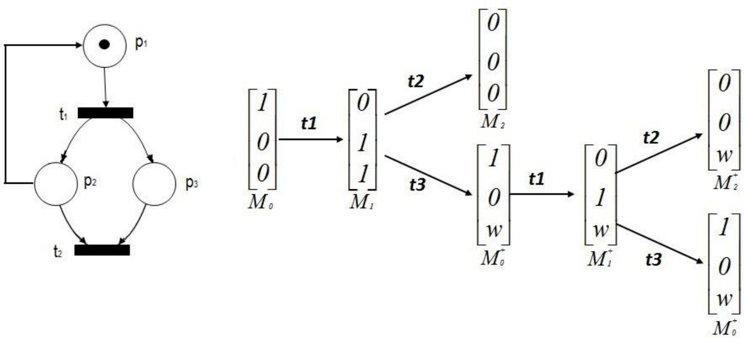


FIGURE 15 – Un RdP et sa arborescence de couverture

On applique l'algorithme précédant afin de construire l'arborescence de couverture :
1-$M_0[t_1\rangle M_1$
2- (b) pour M_1 :

$M_1[t_2\rangle M_2$

$M_1[t_3\rangle(1\ \ 0\ \ 1)^T$ *comme* $(1\ \ 0\ \ 1)^T > (1\ \ 0\ \ 0)^T = M_0$, *on écrit*
$M_1[t_3\rangle(1\ 0\ w)^T = M_0^+$

2- (b) pour M_2 : aucune transition validée, donc c'est un blocage.
2- (b) pour M_0^+

$$M_0^+[t_1\rangle(0\ \ 1\ \ w)^T = M_1^+$$
2- (b) pour M_1^+
$$M_1^+[t_2\rangle(0\ \ 0\ \ w)^T = M_2^+$$
$$M_1^+[t_3\rangle(1\ \ 0\ \ w)^T = M_0^+$$

2- (b) pour M^+_2: aucune transition validée, donc c'est un blocage.
2- (a) pour M^+_0: Sur le chemin correspondant au séquence $t_1t_3t_1t_3$ depuis M_0, on a déjà rencontré le même marquage M_0^+

Le graphe de couverture, est obtenu de l'arborescence de couverture en fusionnant les sommets qui correspondent au même marquage. Sur la figure précédente, il y a deux sommets correspondant à M^+_0. Si on les fusionnent, on obtient le graphe suivant :

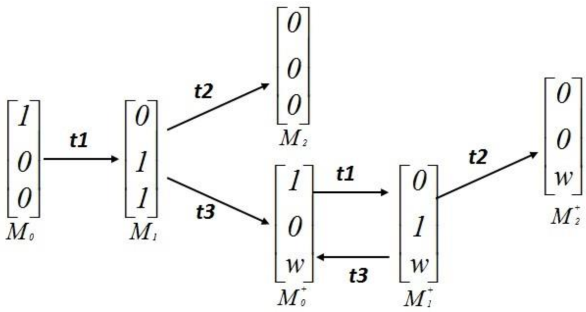


FIGURE 16 – Graphe de couverture

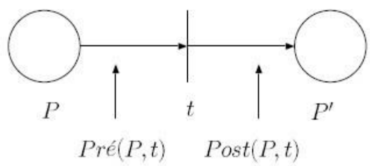
5-3 Représentation matricielle

5-3.1 Définition formelle

Un RdP ordinaire marqué est défini par un quadruplet $R = \{P, T, Pré, Post, M_0\}$ tel que :

- $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ un ensemble fini non vide de places où $|P|$ est le nombre fini de places du réseau.
- $T = \{t_1, t_2, \ldots\ldots t_m\}$ un ensemble fini non vide de transitions où $|T|$ est le nombre fini de transitions du réseau. $P \cap T = \emptyset$ c'est-à-dire que les ensembles P et T sont disjoints (avec $P \cup T \neq \emptyset$).
- $Pré : P \times T \longrightarrow \{0, 1\}$ est l'application places précédentes qui définit les arcs allant des places vers les transitions.
- $Post : P \times T \longrightarrow \{0, 1\}$ est l'application places suivantes qui définit les arcs des transitions vers les places.
- M_0 est le marquage initial.

Pré(p, t) : est le poids de l'arc (orienté) reliant la place *p* à la transition *t*, ***Post (p, t)*** : est le poids de l'arc reliant la transition *t* à la place *p*.



Si tous les poids sont égaux à un, le réseau est appelé **réseau de Petri ordinaire**. Inversement s'il existe au moins un poids supérieur à un, le réseau est appelé **réseau de Petri généralisé**, c-à-d un RdP généralisé est un RdP ordinaire, sauf que :

$$Pré : P \times T \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$Post : P \times T \longrightarrow \mathbb{N}$$

5-3.2 Sensibilisation (algébrique) d'une transition

Les notations suivantes sont adoptées :

$^*t_j$: l'ensemble des places en amont de la transition t_j (appelées aussi places en entrée de t_j).

t_j^* : l'ensemble des places en aval de la transition t_j (appelées aussi places en sortie de t_j).

$^*p_j$: l'ensemble des transitions en amont de la place p_i(appelées aussi transitions en entrée

de p_i).
p_j^* : l'ensemble des transitions en aval de la place p_i (appelées aussi transitions en sortie de p_i).

Les conditions de franchissement peuvent donner comme suite :
Une transition est validée si et seulement si la pré-condition suivante est satisfaite :

$$\forall p_i \in {}^*t_j \quad M(p_i) \geq Pré(p_i, t_j)$$

5-3.3 Matrice d'incidence

L'application d'incidence avant $Pré$ peut être représentée par une matrice $n \times m$ ($n = |P|$ et $m = |T|$) notée $W^- \in \mathbb{N}^{n\times m}$) comme suit :

$$W^-(p_i,t_j) = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & \cdots & t_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} Pré(p_1,t_1) & \cdots & Pré(p_1,t_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ Pré(p_n,t_1) & \cdots & Pré(p_n,t_m) \end{bmatrix} \end{array}$$

L'application d'incidence arrière $Post$ peut être représentée par une matrice notée $W^+ \in \mathbb{N}^{nxm}$ comme suit :

$$W^+(p_i,t_j) = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & \cdots & t_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} Post(p_1,t_1) & \cdots & Post(p_1,t_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ Post(p_n,t_1) & \cdots & Post(p_n,t_m) \end{bmatrix} \end{array}$$

On peut alors introduire la matrice d'incidence $W \in \mathbb{N}^{n\times m}$ telle que :

$$W(p_i,t_j) = Post\,(t_j,p_i) - Pré(p_i,t_j) \;\; \forall p_i \in P \qquad et \quad \forall t_j \in T$$

$$W = W^+ - W^-$$

Exemple 13 : Soit le Rdp de la figure (17). Le vecteur du marquage initial est donné par

$M_0 = (0\ 1\ 1\ 0)^T$

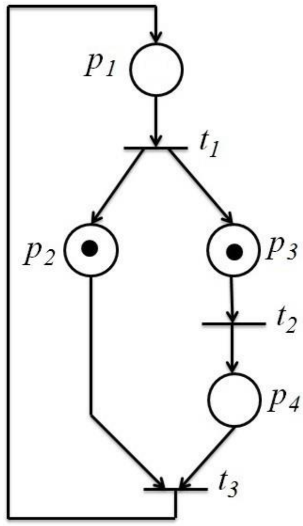


FIGURE 17 – Un exemple d'un RdP

La matrice d'incidence avant de ce RdP est :

$$W^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice d'incidence arrière est :

$$W^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et la matrice d'incidence est :

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5-3.4 Equation fondamentale

Le franchissement de t_j consiste à retirer $Pré(p_i, t_j)$ jetons dans chacune des places direc- tement en amont de t_j et à ajouter $Post(t_j, p_i)$ jetons dans chacune des places directement en aval de t_j. Donc, le franchissement de t_j conduit au nouveau marquage M^J tel que :

$$m'(p_i) = M(p_i) - Pré(p_i, t_j) + Post(t_j, p_i)$$

Soit σ une séquence de franchissement réalisable à partir d'un marquage M : $M[\sigma\rangle M'$.
Soit $\vec{\sigma}$ le vecteur caractéristique de la séquence σ : c'est un vecteur de dimension m, sa composante numéro j correspond au nombre de fois où la transition t_j est franchie dans la séquence σ. Par exemple si

$$\sigma = \langle t_1 t_2 t_3 t_4 t_2 t_3 \rangle \text{ alors } \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Si la séquence de franchissement σ est tel que $M[\sigma)M^J$ alors l'équation fondamentale est :

$$M^J = M + W\overrightarrow{\sigma}$$

Prenons l'exemple précédant :
A partir du marquage initial de ce RdP, on peut avoir les séquences de transitions sui- vantes : $\sigma_1 = (t_2t_3)$ ou $\sigma_2 = (t_2t_3t_1)$. Les vecteurs caractéristiques sont respectivement $\overrightarrow{\sigma}$ =(0 1 1)^T et $\overrightarrow{\sigma}$ = (1 1 1)^T .
Le franchissement de la sequence σ_1 depuis le marquage initial permet d'atteindre le mar- quage :

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et le franchissement de σ_2 depuis marquage initial nous donne :

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5-4 Invariants

5-4-1 Composantes conservatives et invariants de places

$P(f)$ est une composante conservative si et seulement s'il existe un vecteur de pondération f tel que :

$$f^T W = 0$$

avec W est la matrice d'incidence.

Le vecteur $f \neq 0$ tel que $f^T W = 0$ est appelé un **P-semi flot** ou **P-invariant**.

Propriétés :

- Si un RdP possède un p-invariant dont toutes les composantes sont strictement posi- tives alors il est borné.
- Il existe une infinité de p-invariant pour un RdP.
- Il est possible d'exprimer l'ensemble des P-invariant comme une combinaison linéaire d'un nombre minimal de P-semi flots élémentaires $f_1, f_2, \cdots, f_q$:

$$\forall \alpha_i \in \mathbb{N}, f = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i f_i$$

La détermination de p-invariant est illustrée par l'exemple suivant.

Exemple 14. *Soit le RdP suivant :*

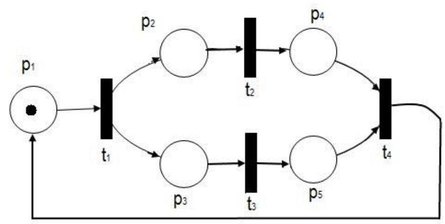


FIGURE 3.18 – Exemple d'un RdP

la matrice d'incidence de ce RdP est :

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous allons déterminer les solutions $f = (f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5)^T$ *de l'équation* $f^T W = 0$.

$$\begin{cases} -f_1 + f_2 + f_3 = 0 \\ -f_2 + f_4 = 0 \\ -f_3 + f_5 = 0 \\ f_1 - f_4 - f_5 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f_1 = f_2 + f_3 \\ f_2 = f_4 \\ f_3 = f_5 \\ f_1 = f_4 + f_5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &Si \;\; f_2 = 0 \;\; et \;\; f_3 = 0 \Longrightarrow f = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)^T \\ &Si \;\; f_2 = 1 \;\; et \;\; f_3 = 0 \Longrightarrow f^1 = (1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0)^T \\ &Si \;\; f_2 = 0 \;\; et \;\; f_3 = 1 \Longrightarrow f^2 = (1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1)^T \\ &Si \;\; f_2 = 1 \;\; et \;\; f_3 = 1 \Longrightarrow f^3 = (2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)^T \end{aligned}$$

5-4.1Composantes répétitives et invariants de transitions

$T(\vec{\sigma})$ est une composante répétitive (stationnaire) si et seulement s'il existe une séquence de franchissement σ telle que :

$$W\vec{\sigma} = 0$$

Le vecteur $\vec{\sigma}$ ʃ= 0 tel que $W\vec{\sigma} = 0$ est appelé un **T-semi flot** ou **T-invariant**.

Remarque : Tout T-semi flot ne correspond pas forcement à une composante répétitive stationnaire. En effet, pour l'être, il est nécessaire qu'il corresponde à une séquence franchissable.

Exemple 15. *On considère le RdP dans la figure (18), on calcule les T-semi flots à partit de l'équation* $W\vec{\sigma} = 0$ *avec*

$$\vec{\sigma} = (t_1 \; t_2 \; t_3 \; t_4)^T$$

$$\begin{cases} -t_1 + t_4 = 0 \\ t_1 - t_2 = 0 \\ t_1 - t_3 = 0 \\ t_2 - t_4 = 0 \\ t_3 - t_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t_1 = t_4 \\ t_1 = t_2 \\ t_1 = t_3 \\ t_2 = t_4 \\ t_3 = t_4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &Si \;\; t_1 = 0 \Longrightarrow \vec{\sigma} = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)^T \\ &Si \;\; t_1 = 1 \Longrightarrow \vec{\sigma} = (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)^T \end{aligned}$$

La séquence répétitive $\vec{\sigma}$ *contient toutes les transitions du RdP, donc elle est complète.*