

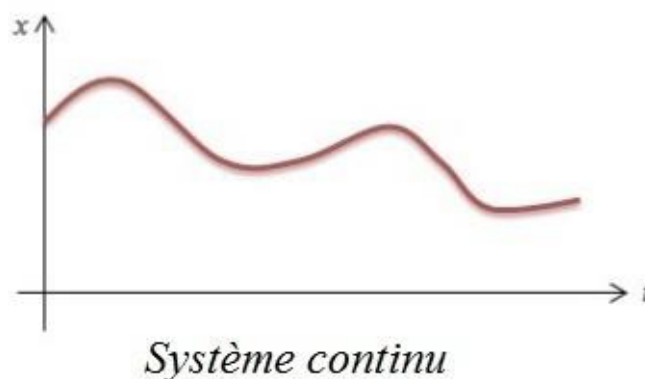
## 1.1 Introduction

Dans de nombreux domaines d'application de l'Automatique (la pneumatique, la mécanique, l'électricité, la chimie, . . .), le système est souvent représenté par un modèle continu ou par un modèle à événements discrets.

### 1.1.1 Systèmes dynamiques continus :

Pour décrire les systèmes continus par des modèles continus, on utilise des outils mathématiques tels que les équations différentielles, les fonctions de transferts, ou encore les équations d'états.

La figure suivante représente un exemple d'évolution d'un état continu qui résume le comportement d'un système continu.



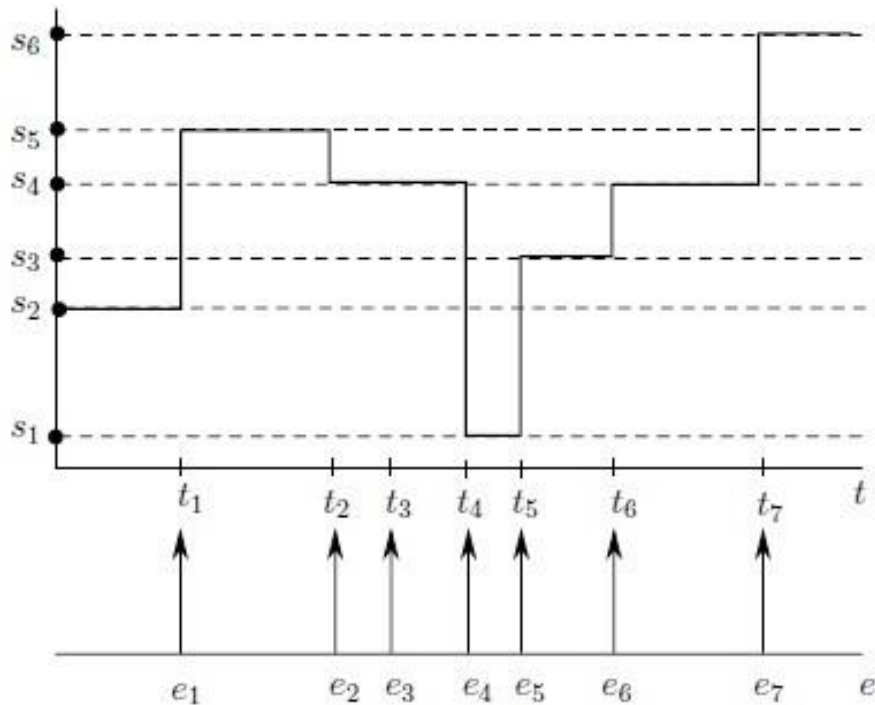
L'état continu représente en générale des grandeurs telles que la position, la vitesse, l'accélération, le niveau, la pression, la température, le débit, la tension, le courant...etc,

### 1.1.2 Systèmes à événements discrets (SED)

Un système à événements discrets est un système dont l'état évolue en fonction de l'occurrence d'événements asynchrones, sur une échelle de temps continue. Ainsi, tant qu'il n'y a pas d'occurrence d'un événement, l'état du système reste inchangé.

Un événement représente indifféremment une action (une personne appuyant sur un bouton d'urgence), un début ou une fin de tâche (fin de cycle de nettoyage d'une machine à laver). Un événement peut être provoqué par un être humain, par une machine, par la nature ou par toute combinaison possible d'actions.

La figure suivante montre un exemple d'une trajectoire d'un système à événement discret :



$X = \{X_1, X_2, \dots, X_6\}$  ensemble (discret) d'états.

$\Sigma = \{e_1, e_2, \dots, e_7\}$  ensemble des événements.

La trajectoire est constante par morceaux, et le changement d'un état à un autre se fait par l'occurrence d'un événement.

Dans cette trajectoire, on peut remarquer que :

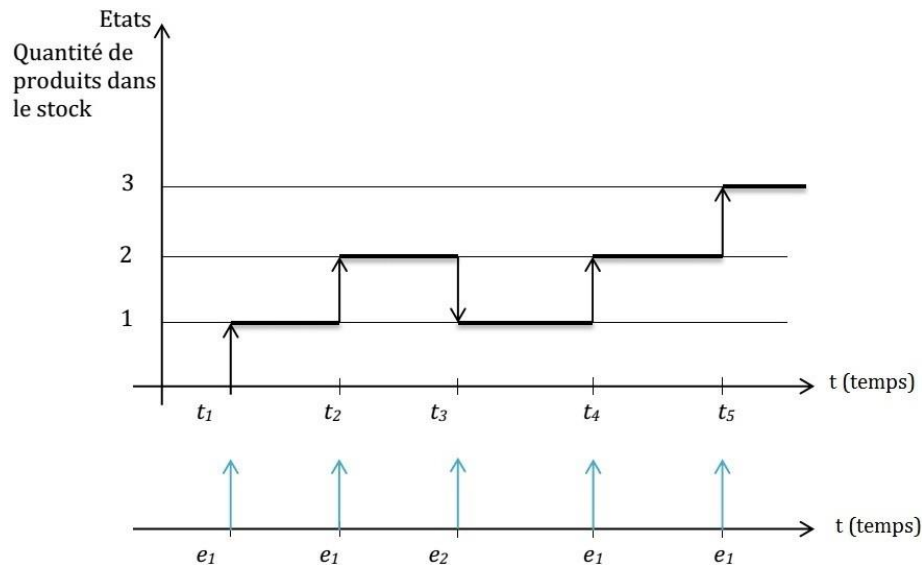
- Un même événement ( $e_2$ ) peut conduire à des états différents.
- Des événements différents ( $e_1$  et  $e_5$ ) peuvent conduire à un même état.
- Des événements ( $e_3$ ) peuvent se produire et être inactifs pour le système

**Exemple 1.** On considère l'exemple du stockage de produits finis au sein d'un système de production. Quand un nouveau produit est fini, il arrive à la section de stockage. L'arrivée d'un camion entraîne le chargement d'un produit dans le camion pour sa distribution. Ces deux actions qui respectivement incrémentent et décrémentent le nombre de produits stockés sont considérées comme des événements et sont étiquetées par :

$e_1$  : arrivée au stockage d'un produit terminé.

$e_2$  : départ d'un produit terminé de la section de stockage.

La trajectoire dans la figure suivante représente l'évolution du nombre de produits stockés par rapport à l'occurrence d'événements ( $e_1, e_2$ ).



L'état du système représente la quantité de produits dans le stock, il est incrémenté de 1 à chaque évènement  $e_1$  et il est décrémenté de 1 à l'occurrence de l'évènement  $e_2$ . La quantité initiale est supposée être nulle.

De nombreuses applications industrielles (systèmes de production, les chaînes logistiques, les systèmes de transport, les réseaux de communication, l'informatique, ...) peuvent être spécifiées par des modèles à événements discrets.

L'étude des SED peut être menée avec différents outils tels que : les langages de programmation parallèle/temps réel, les modèles dynamiques algébriques, comme l'algèbre Max Plus, Grafcet, les automates à états finis et les RdP. Ces deux derniers seront présentés en détail dans la suite de ce cours.

## 1.2 Quelques notions de base de la théorie des langages

Dans le contexte de ce cours, les langages sont vus uniquement comme un moyen formel de représenter des successions d'événements. Les notions présentées dans cette partie ne représentent qu'une partie de la théorie des langages.

### 1.2.1 Alphabet-Mot-Langage

#### Alphabet

Un alphabet, souvent désigné par  $\Sigma$ , est un ensemble fini et non vide de symboles appelés "lettres", "étiquettes" ou "événements".

Un alphabet peut être donné sous forme :

- Alphabet latin  $\{a, b, c, \dots, y, z\}$
- Chiffres  $\{1, 2, \dots, 9\}$
- binaire  $\{0, 1\}$
- ...

C'est à partir de ces symboles qu'il est possible de construire des mots.

#### Mot

Un mot (chaîne), noté  $s$ , sur l'alphabet  $\Sigma$ , est une suite finie, fabriquée par concaténation, de symboles

inclus dans  $\Sigma$ . Le mot vide est un mot particulier noté  $\varepsilon$ .

**Exemple 2.** Pour  $\Sigma = \{a, b, c\}$  alors,  $\varepsilon, a, b, abc, aac, \dots$  sont des mots construits sur l'alphabet  $\Sigma$ .

L'ensemble de tous les mots qu'il est possible de créer avec les symboles de l'alphabet  $\Sigma$  est appelé  $\Sigma^*$  ( $\varepsilon$  est inclus dans  $\Sigma^*$ ).

**Exemple 3.** Pour  $\Sigma = a, b, c : \Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, c, ab, aab, cb, aaa, \dots\}$

La longueur d'un mot est un opérateur noté  $|\cdot|$  (par similitude avec la norme d'un vecteur) représente le nombre de symboles dans un mot. Par convention, la longueur de  $\varepsilon$  égale zéro i.e.  $|\varepsilon| = 0$ .

## Langage

Un langage, noté  $L$ , est un ensemble de mots (chaînes) constitués avec les symboles de l'alphabet  $\Sigma$ .

**Exemple 4.** Pour  $\Sigma = \{a, b, c\}$  : On peut définir les langages :

$L_1(\Sigma) = \{\varepsilon, abb, aaba\}$  composé de trois chaînes seulement.

$L_2(\Sigma) = \{\text{toutes les chaînes possibles de longueur 3 commençant par l'événement } a\}$  dans ce cas  $L_2(\Sigma)$  contient neuf chaînes.

$L_3(\Sigma) = \{\text{les chaînes possibles de longueur fini commençant par l'événement } a\}$  et dans ce cas  $L_3(\Sigma)$  contient un nombre infini de chaînes.

Par conséquent, un langage  $L$  est inclus ou égal à l'ensemble  $\Sigma^*$  constitué par tous les mots réalisables sur l'alphabet  $\Sigma$ .

**Remarque :** le langage vide, noté  $\emptyset$ , est différent du langage  $\{\varepsilon\}$ .

## 1.2.2 Opérations sur les Mots

### Concaténation

La concaténation de deux mots  $s_1$  et  $s_2$  tels que  $a_1a_2\dots a_i$  et  $b_1b_2\dots b_j$  est le mot noté  $s_1s_2$ , égal à  $a_1a_2\dots a_ib_1b_2\dots b_j$  obtenu par simple juxtaposition.

### Propriétés

- élément neutre  $\varepsilon : \varepsilon.s = s.\varepsilon$
- non commutatif :  $s_1.s_2 \neq s_2.s_1$
- associatif :  $(s_1.s_2).s_3 = s_1.(s_2.s_3)$

### Disjonction

C'est une opération notée "++" qui un mot à partir de l'union deux mots. Cette opération est définie par :

soit :

$$\begin{array}{l}
 s_1 = a_1a_2\dots a_i \\
 s_2 = b_1b_2\dots b_j
 \end{array}
 \implies
 s + s = \{s_1, s_2\} = \{a_1a_2\dots a_i, b_1b_2\dots b_j\}$$

**Propriétés :**

- Idempotent :  $m1 + m1 = m1$  ( idempotent une opération a le même effet qu'on l'ap- plique une ou plusieurs fois).
- Commutatif :  $m1 + m2 = m2 + m1$
- Associatif :  $(m1 + m2) + m3 = m1 + (m2 + m3)$
- La concaténation est distributive sur la disjonction :

$$m1.(m2 + m3) = m1.m2 + m1.m3$$

### Facteur, préfixe, suffixe

Lorsqu'un mot  $s \in \Sigma^*$  constitué par concaténation de trois autres mots  $t, u, v \in \Sigma^*$  que  $s = tuv$ , la terminologie est la suivante :  $t$  est appelé le préfixe de  $s$ ,  $u$  est appelé le facteur de  $s$ , et  $v$  est appelé le suffixe de  $s$ .

Si de plus  $t = \varepsilon$  (i.e  $s = uv$ )  $u$  est dit préfixe de  $s$ . Si  $v = \varepsilon$  (i.e  $s = tu$ ),  $u$  est dit suffixe de  $s$ .

**Exemple 5.** Soit  $s = abccaab$ . Alors :

- $cca$  est un facteur de  $s$  et  $ab$  est à la fois préfixe et suffixe de  $s$ .
- $abcc$  est un préfixe de  $s$  et  $aab$  est un suffixe de  $s$ .
- Pour tout mot  $s$ ,  $\varepsilon$  et  $s$  sont à la fois préfixe et suffixe de  $s$ .

## 1.2.3 Opérations sur les langages

### Concaténation

La concaténation de deux langages  $L_1, L_2$  est le langage  $L$  contenant tous les mots formés d'un mot de  $L_1$  suivi d'un mot de  $L_2$ .

$$L_1.L_2 = \{s | s = s_1.s_2, s_1 \in L_1 \quad \text{et} \quad s_2 \in L_2\}$$

### Union

L'union de deux langages  $L_1 \cup L_2$  est le langage  $L$  contenant tous les mots de  $L_1$  et de  $L_2$ .

$$L_1 \cup L_2 = \{s | s \in L_1 \quad \text{ou} \quad s \in L_2\}$$

### Intersection

L'intersection de deux langages  $L_1 \cap L_2$  est le langage  $L$  contenant tous les mots existant dans  $L_1$  et dans  $L_2$ .

$$L_1 \cap L_2 = \{s | s \in L_1 \quad \text{et} \quad s \in L_2\}$$

## L'étoile de Kleene

L'étoile de Kleene (parfois appelée fermeture de Kleene ou encore fermeture itérative) pour un langage est une opération notée " \* " définie comme suite : soit  $L \in \Sigma^*$  :

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup L \cup LL \cup LLL \cup \dots$$

Un élément de  $L^*$  est formé par la concaténation d'un nombre fini des éléments de  $L$  (cela inclut la concaténation de  $\varepsilon$ ).

**Exemple 6.** Soit  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ . On considère deux langages :  $L_1 = \{a, ab, ac\}$  et  $L_2 = \{\varepsilon, d\}$ , alors :

- $L_1 L_2 = \{a, ab, ac, abd, acd\}$
- $L_1 \cup L_2 = \{\varepsilon, a, ab, ac, d\}$
- $L_1 \cap L_2 = \emptyset$
- $L_1^* = \{\varepsilon, a, b, c, ab, ac, aab, abb, acb, \dots\}$
- $L_2^* = \{\varepsilon, d, dd, ddd, \dots\}$
- $L_1 \cap L_2 = \{\varepsilon\} \implies \{\varepsilon\} \notin \emptyset$ .

### 1.2.4 Langages réguliers :

Le langage régulier peut être représenté par une expression régulière définie à partir d'expressions élémentaires et des opérations d'enchaînement.

Une expression régulière sur un alphabet  $\Sigma$  est une expression dont les opérandes sont des symboles de  $\Sigma$ , et dont les opérateurs sont pris dans l'ensemble  $\{+, \cdot, \{, \}^*\}$ .

Par exemple, soit  $\Sigma = \{a, b, c\}$ , l'expression régulière  $(a + b).c$  définit le langage  $L = \{a, b, ac, bc\}$ .

Le langage régulier n'est pas nécessairement un langage fini, mais en revanche, tout langage fini est un langage régulier car il peut être décrit par une expression régulière.

### 1.2.5 Lien entre langage et SED

- Un alphabet peut être vu comme un ensemble d'informations sur l'état d'un système réel vue au travers d'un ensemble d'événements ( capteurs et actionneurs par exemple).
- Un mot correspond alors à une séquence d'événements issus des capteurs/actionneurs et constitue la partie visible de ce comportement. Par exemple, si  $a$  est un poussoir du système considéré, avec l'interprétation  $\Sigma$ , le mot  $aa$  correspondra à deux appuis successifs sur le poussoir.
- un langage formé sur un tel alphabet correspond à un ensemble de traces visibles d'un ensemble d'évolutions suivies par le procédé. Tous ces éléments fournissent des bases formelles et solides pour exprimer les concepts de la commande à événements discrets.

## 1. 3. Notions de Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH) :

Les systèmes dans lesquels interagissent des composantes continues et discrètes sont appelés Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH).

**Définition des Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH) :**

On peut mettre sous ce titre plusieurs définitions d'après la littérature trouvée. Mais avant de proposer ces définitions, on va citer quelques notions préliminaires nécessaires pour mettre l'image claire

A) Les SDH sont des systèmes dans lesquels les dynamiques discrètes et continues interagissent et où leur interaction détermine le comportement qualitatif et quantitatif de ses systèmes.

B) Les SDH sont des systèmes dynamiques faisant intervenir explicitement et simultanément des phénomènes ou des modèles de type dynamique continue et événementielle.

#### Définition de base :

- Un système discret est tel que toutes ses variables d'état sont **discrètes**.
- Un système continu est tel que toutes ses variables d'état sont **continues**.
- Un système hybride comprend au moins : une variable d'état **discrète** et une d'état **continue**.

#### Principales classes de phénomènes hybrides :

La nature hybride d'un système peut être inhérente aux phénomènes physiques qui le régissent. Un certain nombre de phénomènes physiques considérés comme hybrides ont été regroupés en deux catégories principales traduisant leur influence sur les modèles mathématiques utilisés pour décrire les différentes classes des systèmes. Rappelons brièvement que l'évolution d'un système continu est défini par un ensemble d'équations différentielles de la forme :  $\dot{x} = f(x, t)$ , où  $f(x, t)$  est appelé champ de vecteurs d'état,  $x$  l'état du système, et  $t$  le temps.

#### SDH à Commutation autonome "Switching" :

Une commutation autonome caractérise un phénomène où le champ de vecteur  $f(x, t)$  change de façon discontinue lorsque l'état  $x$  atteint certains seuils comme schématisé dans la figure II.1.a pour une seule variable d'état. Le saut autonome "Jump" est un phénomène similaire rencontré dans les systèmes mécaniques, il s'agit d'un saut discontinu de l'état continu  $x$  lorsqu'il atteint une région donnée de l'espace d'état, c'est-à-dire que l'état passe de façon discontinue de sa valeur courante à une autre. Comme le montre schématiquement la figure A.1.b pour une variable d'état.

Un exemple de ce phénomène est donné par la collision de deux corps où la vitesse change brutalement et subit un saut.

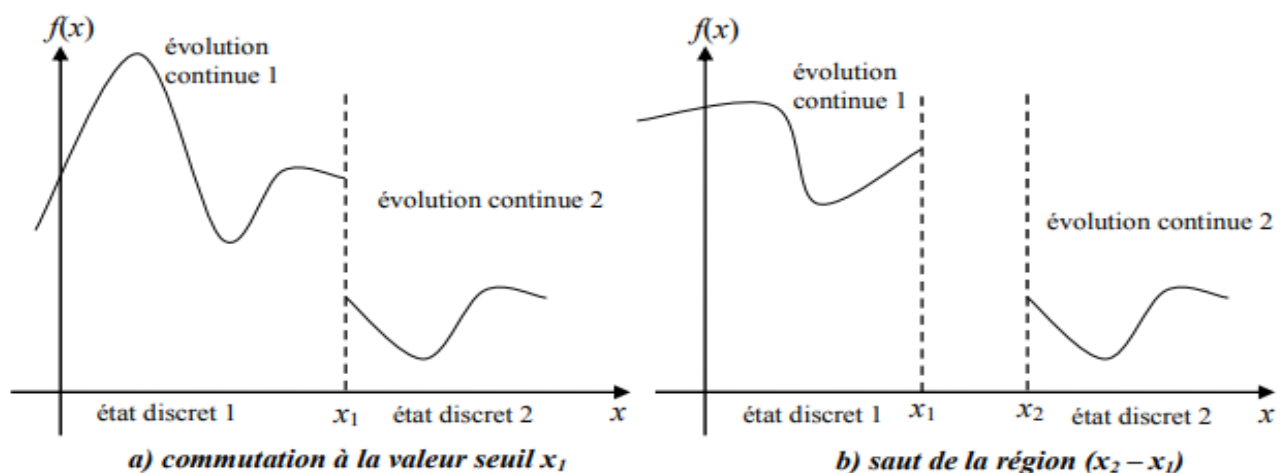


Figure A.1 Commutation autonome

### SDH à Commutation contrôlée :

Une commutation contrôlée traduit un phénomène où le champ de vecteur  $f(x,t)$  change de façon discontinue et instantanée en réponse à une entrée de commande (figure A.2).

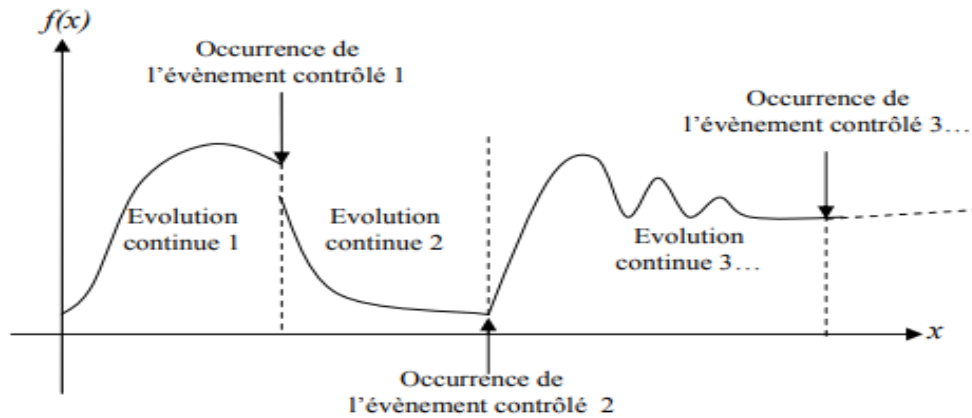


Figure A.2 Système hybride à commutation contrôlée

### 3. Exemples illustratifs :

#### 3.1. Le thermostat :

Considérons l'exemple classique d'un thermostat utilisé pour maintenir la température dans une chambre. Le système étudié est composé par un système de chauffage et un capteur de température.

Les seuils inférieur et supérieur du thermostat sont fixés à des valeurs  $\theta_m$  et  $\theta_M$  respectivement tel que :  $\theta_m < \theta_M$ . Le système de chauffage est en marche tant que la température dans la chambre est inférieure au seuil  $\theta_M$ .

Le chauffage est arrêté lorsque le capteur détecte le seuil supérieur  $\theta_M$  et il reste en arrêt jusqu'au moment où la température chute au-dessous du seuil inférieur  $\theta_m$ .

La température de la chambre et le thermostat peuvent être vus comme un système dynamique hybride (SDH) dont l'évolution continue est définie par la variation de la température  $x$  dans la chambre et l'évolution discrète par le passage de l'état marche du système de chauffage à l'état arrêt. Considérons que l'évolution de la température dans la chambre peut être modélisée par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) = -x + \alpha & \text{si le chauffage est en marche} \\ f_2(x) = -x & \text{si non} \end{cases}$$

Où  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  est une constante réelle positive.

D'une manière graphique le système considéré peut être représenté par un graphe orienté présenté dans la figure A.3, les sommets du graphe correspondent aux dynamiques continues des états discrets du système. Notamment, la dynamique  $f_1$  est associée au sommet modélisant l'état en marche du système de chauffage, et  $f_2$  au sommet modélisant l'état d'arrêt. Le passage d'un état vers l'autre est modélisé par des arcs étiquetés.

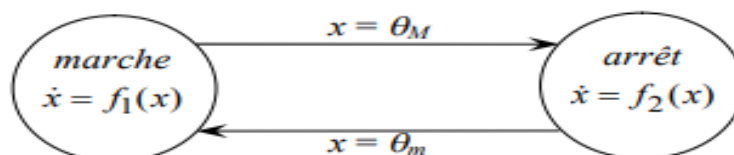


Figure A.3 Modèle du thermostat. :

**Remarque :** Cette représentation graphique est un automate hybride.

Le problème de l'analyse consiste à vérifier que la température dans la chambre reste toujours dans l'intervalle désiré, notamment :  $\theta_m \leq x \leq \theta_M$ .

Pour cet exemple simple, les solutions analytiques des équations différentielles peuvent être facilement trouvées. Ainsi, pour une valeur initiale de la température :  $x_0 = x(0) = \theta_0$ , les solutions analytiques trouvées sont :

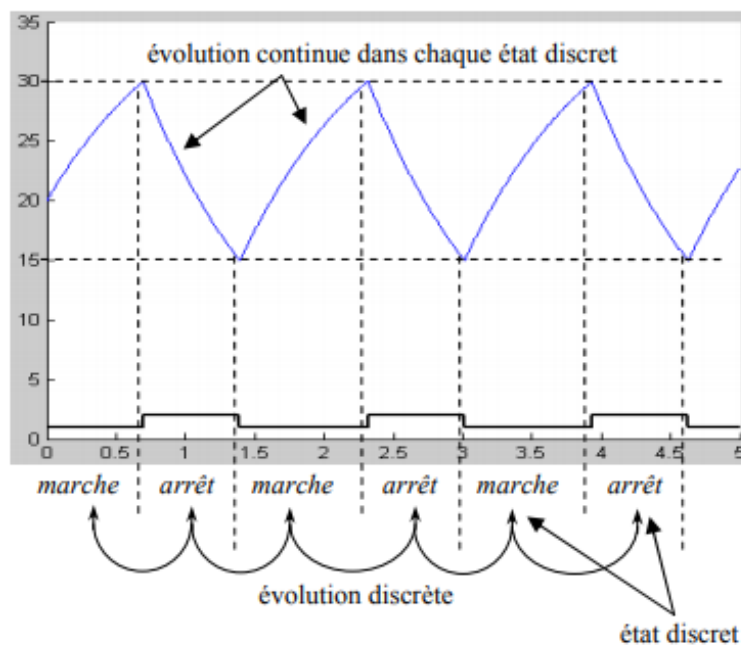
$$x(t) = \theta_0 e^{-t} + \alpha(1 - e^{-t})$$

pour la dynamique correspondant à l'état de marche du système de chauffage, et  $x(t) = \theta_0 e^{-t}$

pour l'autre état. Initialement, supposons que le système est dans l'état en marche et la valeur initiale de la température vérifie la relation  $\theta_0 \in [\theta_m, \theta_M]$ . Dans cet état, l'évolution de la température respectera l'expression :  $x(t) = \theta_0 e^{-t} + \alpha(1 - e^{-t})$

L'évolution croissante fait que, au bout de  $t_1$  unité de temps, le seuil  $\theta_M$  est atteint. Alors, le système de chauffage passera dans l'état arrêt. Suite au changement d'état du système, la dynamique de la température change et la nouvelle évolution est donnée par :  $x(t) = \theta_0 e^{-(t+t_1)}$

Dans cet état, la température aura une évolution décroissante jusqu'au moment où le seuil inférieur  $\theta_m$  est atteint. A cet instant, le chauffage sera remis en *marche* et le système reviendra dans l'état initial.



**Figure A.4** Trajectoire de la température.

D'après l'allure de la température (figure A.4), on constate clairement que ce système représente un système dynamique hybride, il comporte deux types d'évolution, une évolution continue et une évolution discrète (changement d'état discret) interagissant entre eux.