المحور الأول: نظرية صفوف الانتظار

1-تمهيد: تُعد نظرية صفوف الانتظار من النظريات الأساسية في الرياضيات التطبيقية وبحوث العمليات التي تهدف إلى تحليل الأنظمة الخدمية التي تواجه تدفقات طلبات غير منتظمة، نشأت هذه النظرية في بدايات القرن العشرين لحل مشكلات تكدس الطلب في أنظمة الاتصالات، لكنها تطورت لتشمل العديد من المجالات مثل إدارة الأعمال، الصحة، والنقل.

نظرية صفوف الانتظار (Queueing Theory) هي إحدى النظريات الرياضية التي ظهرت لتلبية الحاجة إلى تحليل الأنظمة التي تتعامل مع طلبات متكررة وغير منتظمة، تهدف هذه النظرية إلى تحسين كفاءة الأنظمة الخدمية وتقليل وقت الانتظار وتكاليف التشغيل، من خلال النماذج الرياضية التي تقدمها، يمكن التنبؤ بأداء النظام ووضع استراتيجيات لتحسينه.
يُعد العالم الدنماركي "إرلانج" (Agner Krarup Erlang) الأب المؤسس لنظرية صفوف الانتظار، في عام 1909، أثناء عمله في شركة الاتصالات الدنماركية (Copenhagen Telephone Company) ، لاحظ "إرلانج" وجود مشكلات تتعلق بتكدس المكالمات الهاتفية وعدم كفاية الخطوط لتلبية الطلب.
قدّم "إرلانج" أول نموذج رياضي لتحليل حركة الاتصالات وأوقات الانتظار، مما أدى إلى ظهور مفهوم "نظرية إرلانج". أسس عمله المبادئ الأساسية لتقدير احتمالية انشغال الخطوط وأوقات الانتظار، وهي أسس ما زالت تُستخدم حتى اليوم.

2- أهمية النظرية: بدأت نظرية صفوف الانتظار كنموذج لحل مشكلات الاتصالات الهاتفية، لكنها سرعان ما تطورت لتشمل تطبيقات واسعة في العديد من المجالات، فأصبحت هذه النظرية أداة أساسية لتحليل أداء الأنظمة الخدمية، حيث تهدف إلى دراسة الظواهر التي تنشأ نتيجة لتكدس الطلب على خدمات معينة مقارنة بقدرة النظام على تلبيتها، وبذلك يمكن ان نصيغ أمثلة كثيرة من الحياة اليومية: طوابير الانتظار أمام شباك التذاكر، أو عند عيادات الأطباء، أو حتى في مراكز الاتصالات، ومن خلالها، تسعى هذه النظرية للإجابة عن أسئلة مثل:

- ✓ كم من الوقت سيقضيه العميل في الانتظار؟
- ✓ ما الحد الأقصى الذي يمكن للنظام التعامل معه قبل أن ينهار؟
- ✓ كيف يمكن تحسين كفاءة النظام لتقليل وقت الانتظار والتكاليف؟

3-العناصر الأساسية لنظرية صفوف الانتظار:

- ❖ **العنصر (الوحدة):** عبارة عن أي شيء، سواء كان بشريًا أو ماديًا، يسعى بذاته أو بواسطة للحصول على خدمة معينة.
- ❖ **صف الانتظار:** يتكون من مجموعة الوحدات طالبي الخدمة التي تنتظر دورها لتلقي الخدمة. وتختلف صفوف الانتظار من حيث الطول والعدد:

➢ **طول الصف:** هناك نوعان من الأطوال:

- ✓ صف ذو طول محدود: طابور له حد أقصى لا يمكن تجاوزه.
- ✓ صف غير محدود الطول: صف لا يكون له حد أقصى (لا نهائي).

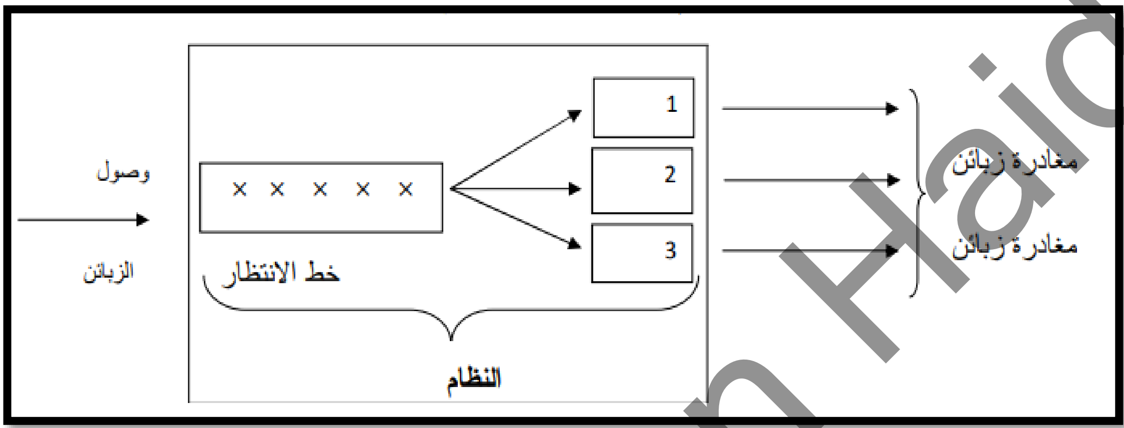
➢ **عدد الصفوف:** يمكن التمييز بين نوعين من الصفوف:

✓ حالة الصف الواحد: يتم تقديم الخدمة عن طريق منفذ واحد.

✓ **حالة الصفوف المتعددة:** تقديم نفس الخدمة عن طريق عدة منافذ.

يُعتبر هذا التمييز أساسيًا في أنه سوف يؤثر على احتمال طلب الخدمة بعد أن يتقدم عنصر أو عدة عناصر بطلب الخدمة والحصول عليها فعليًا.

❖ **النظام:** يقصد به المكان الذي يضم مراكز الخدمة وصفوف الانتظار، من جهة أخرى فإن النظام يتكون من مجموعة الوحدات طالبي الخدمة التي تنتظر دورها لتلقي الخدمة، مضافًا إليهم الوحدات التي دخلت مرحلة تلقي الخدمة فعليًا.



❖ **معدل الوصول:** يشير إلى متوسط عدد الوحدات طالبي الخدمة التي تصل إلى النظام خلال فترة زمنية معينة. مثلًا، وصول 30 سيارة في الساعة، نرمز لمعدل الوصول بـ (λ).

❖ **معدل الخدمة:** يشير إلى متوسط عدد الوحدات طالبي الخدمة التي يتم خدمتها خلال فترة زمنية معينة. مثلًا، تخديم 10 أشخاص في الساعة، نرمز لمعدل الخدمة بـ (μ).

4-متطلبات تطبيق نظرية صفوف الانتظار

1-4 .تحديد عناصر النظام:

✓ **مركز الخدمة:** تحديد أماكن تقديم الخدمة (مثل شباك صرف، مركز اتصالات، أو خطوط إنتاج) وعدد المنافذ المتاحة.

✓ **صف الانتظار:** وصف طبيعة الطابور، مثل طوله (محدود أو غير محدود) وعدد الصفوف (صف واحد أو صفوف متعددة).

✓ **الوحدات طالبة الخدمة:** تحديد طبيعة العملاء أو الطلبات (بشرية أو مادية) التي تتطلب الخدمة وهل هي من مجتمع محدود (مثل: التسجيل الجامعي لطلاب قسم العلوم الاقتصادية) او غير محدود (مثل: محل الحلاقة)

2-4. سياسة تقديم الخدمة:

✓الواصل أولا إلى مركز الخدمة يخدم أولا (FIFO) (خدمة العملاء، السفن، الطائرات)؛

✓الواصل إلى مركز الخدمة أخيرا يخدم أولا (LIFO) (يطبق في المستودعات حيث المستودعات تفيد في تخفيض من عملية النقل والمناولة)؛

✓الأولوية لفئات معينة (LCFS) (مثلا: المعوقين في الصعود لوسائل النقل أو تقديم الخدمة).

✓العشوائية الاختيار في تقديم الخدمة (FCFS) (عادة في النقل البضائع)

3-4. جمع البيانات الأساسية:

- ✓ **معدل الوصول** :(λ) متوسط عدد الوحدات التي تصل إلى النظام خلال فترة زمنية محددة.
- ✓ **معدل الخدمة** :(μ) متوسط عدد الوحدات التي يمكن خدمتها خلال فترة زمنية محددة.
- ✓ **زمن الخدمة:** الوقت المطلوب لتقديم الخدمة لكل وحدة.
- ✓ **زمن الانتظار:** الوقت الذي تقضيه الوحدة في الطابور قبل تلقي الخدمة.

4-4. تحديد سلوك الوحدات طالبة الخدمة:

✓ **نمط الوصول:** هل يتم الوصول إلى النظام بشكل منتظم أم عشوائي (غالبًا ما يتم تمثيله بتوزيع احتمالي، مثل التوزيع الأسي أو البواسوني).

✓ **احتمالية الانسحاب:** إمكانية مغادرة بعض الوحدات صف الانتظار دون تلقي الخدمة بسبب طول الطابور أو وقت الانتظار.

✓ **تغيير صف الخدمة:** طالب الخدمة الذي يغير صف انتظاره لينتقل إلى صف آخر تقدم فيه نفس الخدمة: وذلك لأنه أقل عددا من الصف الذي كان فيه، وذلك لأن زمن الانتظار سيكون أقل أيضا من أجل الحصول على الخدمة.

5-4. تحديد خصائص مركز الخدمة:

- ✓ **عدد الخوادم:** هل هناك خادم واحد أو خوادم متعددة تقدم الخدمة؟
- ✓ **كفاءة الخدمة:** مدى سرعة الخادم في معالجة الطلبات.
- ✓ **توزيع زمن الخدمة:** هل زمن الخدمة ثابت أم عشوائي؟

5- صفوف الانتظار بقناة خدمية واحدة: "نموذج (M/M/1): (GD/∞/∞) "

1-5. شرح الرموز:

❖ **شرح الرموز في :GD/∞/∞**

(General Distribution) يشير إلى أن عملية الوصول والخدمة تتبع توزيعًا عامًّا يمكن أن يكون توزيع بواسون أو توزيع أسي، التوزيع الطبيعي، التوزيع المنتظم، أو غيره.

∞ **الأولى:** سعة غير محدودة للنظام :يعني أن النظام يمكنه استقبال عدد غير محدود من العملاء في أي لحظة، أي أنه لا توجد قيود على عدد الوحدات داخل النظام.

∞ **الثانية:** سعة غير محدودة للمجتمع الذي تأتي منه الوحدات الطالبة للخدمة.

❖ **معنى الرموز في:M/M/1**

(M) الأولى:(Markovian) تشير إلى أن عملية الوصول إلى النظام تتبع توزيع بواسون(Poisson Process) ، هذا يعني أن الفترات الزمنية بين وصول الوحدات (مثل العملاء أو الطلبات) إلى النظام تكون مستقلة وتتبع توزيعًا أسيًا (Exponential Distribution)

(M) الثانية:(Markovian) تشير إلى أن عملية الخدمة أيضًا تتبع توزيعًا أسيًا، أي أن زمن الخدمة للوحدات يكون عشوائيًا ومستقلًا، ويتبع نفس خصائص العملية البواسونية.

1:(Single Server) تعني أن النظام يحتوي على قناة خدمية واحدة فقط، أي أن هناك خادم واحد يقدم الخدمة (مثل شباك صرف واحد أو مضخة وقود واحدة).

2-5 .الافتراضات الأساسية للنموذج:

✓**عملية وصول العملاء:** العملاء يصلون بشكل عشوائي، وفقًا لتوزيع بواسوني بمعدل وصول (λ) يمثل متوسط عدد العملاء الذين يصلون في وحدة زمنية.

✓**عملية الخدمة:** يتم تقديم الخدمة بطريقة غير ثابتة وفقا للتوزيع الاسي وبمعدل خدمة(μ) ، وهو متوسط عدد العملاء الذين يمكن خدمتهم في وحدة زمنية.

✓**عدد القنوات:** يوجد خادم واحد فقط (قناة واحدة لتقديم الخدمة).

✓**طبيعة صف الانتظار:** الطابور يمكن أن يكون بلا حد أقصى (غير محدود الطول).

✓**يتم تقديم الخدمة وفقًا لمبدأ**(FIFO (First In, First Out

✓**استقرار النظام:** يجب أن يكون معدل الخدمة أكبر من معدل الوصول (λ < μ) لضمان استقرار النظام.

تذكير:

الصيغة العامة لقانون بواسون: $$\boldsymbol{P_n(t) = \frac{{\lambda_t}^{n} * e^{-\lambda_t}}{n!}}$$

الصيغة العامة للتوزيع الأسي: $$\boldsymbol{P_n(t) = \mu_t\, e^{-\mu_t}}$$

3-5. حساب المؤشرات الرئيسية في نموذج M/M/1: اذا رمزنا لـ:

n :عدد الزبائن في النظام (خط الانتظار+ مركز الخدمة)

λ: متوسط معدل الوصول (عدد الزبائن الواصلة لكل وحدة واحدة من الوقت)

μ: متوسط معدل الخدمة لكل مقدم خدمة مشغول (عدد الزبائن التي يتم تقديم الخدمة لها لكل وحدة واحدة من الوقت.)

P_w: احتمال انتظار الواصلين للخدمة في صف الانتظار(معامل الاستخدام).

P_n: احتمال وجود (n) من الوحدات في النظام.

P_0: احتمال وجود (0) من الوحدات في النظام

Lq: معدل عدد الزبائن في الصف.

Ls: معدل عدد الزبائن في النظام.

Wq: معدل وقت انتظار الزبون في الصف.

Ws: معدل وقت انتظار الزبون في النظام.

يمكن حساب كل ما سبق بالعلاقات التالية بدلالة (μ، λ) :

$$P_w = \lambda/\mu \qquad P_0 = 1 - \lambda/\mu \qquad P_n = \left(\lambda/\mu\right)^n - P_0$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{(\mu*(\mu-\lambda))} \qquad L_s = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)} \qquad W_s = \frac{1}{(\mu-\lambda)}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{(\mu*(\mu-\lambda))}$$

تمرين 01:

يوجد في أحد البنوك التجارية مركز خدمة واحد لتقديم الخدمات للعملاء المنتظرين في هذا المصرف، ويقوم البنك حاليًا بدراسة سبل تحسين مستوى الخدمة المقدمة للعملاء.

بناءً على ملاحظات سابقة، تبين أن معدل وصول العملاء إلى البنك يبلغ 10 عملاء في الساعة، في حين أن متوسط زمن تقديم الخدمة لكل عميل هو 3.75 دقيقة.

المطلوب:

- ✓ حساب احتمالات حالة التوازن للنظام في البنك.
- ✓ حساب متوسط عدد العملاء في النظام وفي الطابور.
- ✓ حساب متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام وفي الطابور.

الحل:

λ :معدل الوصول:10 عملاء/ساعة.

μ : معدل الخدمة: 16 عميل/ساعة.

حساب المؤشرات الأساسية:

$$\rho_W = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{16} = 0.625$$

وبالتالي، فإن النظام مشغول بنسبة 62.5% من الوقت.

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0.625 = 0.375$$

إذن، احتمال عدم وجود عملاء في النظام هو 37.5%.

$$P_n = \left(\lambda/\mu\right)^n - P_0 = \left(\frac{10}{16}\right)^n - 0.375$$

احتمال وجود (n) من الوحدات في النظام.

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{10}{16 - 10} = \frac{10}{6} \approx 1.67$$

إذن، متوسط عدد العملاء في النظام هو 1.67 عميل

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{10^2}{16(16-10)} = \frac{100}{96} \approx 1.04$$

إذن، متوسط عدد العملاء في الطابور هو 1.04 عميل.

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{16-10} = \frac{1}{6} \approx 0.167 \text{ ساعة } = 10 \text{ دقائق}$$

إذن، متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام هو 10 دقائق.

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{10}{16(16-10)} = \frac{10}{96} \approx 0.104 \text{ ساعة } = 6.25 \text{ دقائق}$$

إذن، متوسط وقت الانتظار في الطابور هو 6.25 دقائق.

ملخص النتائج:

المعيار	القيمة المحسوبة
نسبة انشغال النظام (ρ)	62.5%
احتمال أن يكون النظام فارغًا (P_0)	37.5%
متوسط عدد العملاء في النظام (L_s)	1.67 عميل
متوسط عدد العملاء في الطابور (L_q)	1.04 عميل
متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام (W_s)	10 دقائق
متوسط وقت انتظار العميل في الطابور (W_q)	6.25 دقائق

تفسير النتائج:

- ✓ نسبة انشغال النظام 62.5% تعني أن النظام يعمل بكفاءة مع وجود فرصة لاستقبال المزيد من العملاء دون حدوث ازدحام كبير.
- ✓ متوسط عدد العملاء في الطابور 1.04 يعني أن الطابور ليس طويلًا جدًا، مما يشير إلى تجربة مقبولة للعملاء.
- ✓ متوسط وقت الانتظار في الطابور 6.25 دقائق يعتبر قصيرًا نسبيًا، مما يعني أن العملاء لا ينتظرون لفترات طويلة قبل الحصول على الخدمة.
- ✓ البنك يمكنه تحسين الخدمة أكثر عبر زيادة عدد مقدمي الخدمة أو تحسين إجراءات المعالجة لتقليل زمن الخدمة.

تمرين 02: ضمن تقرير تربص حول موضوع نظرية صفوف الانتظار، أراد طالب تطبيق النظرية في مؤسسة بريد الجزائر في وحدة صغير ذات خادم واحد فقط، ومن اجل ذلك تم تحديد المدة الكلية للمشاهدة بأسبوعين من يوم الأحد إلى يوم الخميس من الساعة 8 الى 12 خلال الفترة الصباحية ومن الساعة 13 الى 16 خلال الفترة المسائية، وكانت 7 مشاهدات في اليوم (مشاهدة لكل ساعة، وقدرت المشاهدة الكلية في الأسبوعين 70 مشاهدة وقرر التوقف عند وصول 50 زبون (حجم العينة 50).

الجدول أدناه يوضح العينة التي سوف يتم الاعتماد عليها الذي يتبعه معدل الوصول وهو موضح كالتالي:

عدد N_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	المجموع
تكرار الوصول $\grave{X}_i$	0	0	0	0	1	2	1	3	3	2	5	2	4	5	6	5	3	3	2	1	1	1	n=50
تكرار الخدمة $\grave{\grave{X}}_i$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	12	10	9	3	1	0	0	n=50

المطلوب: علما أن الزبائن يصلون بشكل عشوائي، وفقًا لتوزيع بواسون بمعدل وصول (λ) في وحدة زمنية، وأن عملية الخدمة عشوائية (ليست ثابتة) أيضًا وتتبع توزيعًا أسيًا بمعدل خدمة (μ)، احسب وحلل كل المؤشرات الرئيسية حسب نموذج M/M/1.

$$\lambda = \frac{\sum_{i=0}^{21} \grave{X}_i * N_i}{n} = \frac{622}{50} = 12.44$$

$$\mu = \frac{\sum_{i=0}^{21} \grave{\grave{X}}_i * N_i}{n} = \frac{622}{50} = 12.44$$

$$P_w = {}^{\lambda}/_{\mu} = \frac{12.44}{15.52} = 0,8015 = 80.15\%$$

$$P_0 = 1 - {}^{\lambda}/_{\mu} = 1 - 0,8015 = 0.1985 = 19.85\%$$

$$P_n = \left({}^{\lambda}/_{\mu}\right)^n - P_0 = \left(\frac{12.44}{15.52}\right)^n - 0.1985$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{(\mu * (\mu - \lambda))} = \frac{12.44^2}{15.52 * (15.52 - 12.44)} = 3.23_{\text{زبون}}$$

$$L_s = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)} = \frac{12.44}{(15.52 - 12.44)} = 4.03_{\text{زبون}}$$

$$W_s = \frac{1}{(\mu - \lambda)} = \frac{1}{(15.52 - 12.44)} = 0.32_{\text{ساعة}} \cong 19.2_{\text{دقيقة}}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{(\mu * (\mu - \lambda))} = \frac{12.44}{(15.52 * (15.52 - 12.44))} = 0.26_{\text{ساعة}} \cong 15.6_{\text{دقيقة}}$$

✓هناك ازدحام واضح في المؤسسة، حيث أن 80% من الزبائن يجدون الخادم مشغولًا عند وصولهم.

✓الزبائن ينتظرون 15.6دقيقة في المتوسط قبل بدء الخدمة، وهو زمن مرتفع نسبيًا، مما قد يؤدي إلى عدم رضا العملاء.

✓إجمالي الزمن الذي يقضيه الزبون في المؤسسة (19.2 دقيقة) قد يكون غير ملائم، خاصة إذا كان العملاء بحاجة إلى خدمة سريعة.

6- صفوف الانتظار بقناة خدمية واحدة: "نموذج (M/M/1): (GD/N/∞) ": هو نموذج صف انتظار ذو قناة خدمية واحدة (خادم واحد) مع وصول بواسوني وخدمة أُسِّيَّة وسعة نظام محدودة بعدد N، أي أنه لا يمكن أن يزيد عدد الزبائن في النظام (في الصف و قيد الخدمة) عن N، ولذلك فان معدل الوصول الحقيقي والذي نرمز له بالرمز λ_{eff} (يمثل عدد الوحدات الواصلة والتي تشترك فعلا في النظام) يصبح أقل من معدل الوصول المتولد عن المصدر.

1-6. الافتراضات الأساسية للنموذج:

- ✓ عملية وصول الزبائن: تتبع توزيع بواسون بمعدل λ زبونا في الوحدة الزمنية.
- ✓ عملية الخدمة: تتبع توزيع أسي بمعدل لكل زبون.
- ✓ قناة خدمة واحدة: يوجد خادم واحد فقط.
- ✓ قدرة النظام محدودة: الحد الأقصى لعدد الزبائن في النظام (في الصف وقيد الخدمة) هو N، أي أن الزبون القادم إذا وجد النظام ممتلئًا فلن ينضم إلى الصف (يُرفض).

2-6. حساب المؤشرات الرئيسية:

$$\sum_{n=0}^{N} Pn = 1$$

$$P_0 \sum_{n=0}^{N} \frac{\rho^n}{n!} = 1$$

- ➢ **نسبة الكثافة (الاستخدام) (ρ)**

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

تمثل النسبة بين معدل الوصول ومعدل الخدمة.

- ➢ **احتمالات عدد الزبائن في النظام Pn**

$$P_n = \frac{\rho^n P_0}{n!}, \quad \text{for } 0 \le n \le N$$

هو احتمال وجود (n) زبون في النظام، حيث:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{\rho^n}{n!}}$$

أو استخدام العلاقة:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1 - \frac{\rho^{N+1}}{(N+1)!}}$$

يمثل P_0 احتمال أن يكون النظام فارغًا.

- ➢ **متوسط عدد الزبائن في النظام (Ls):**

$$Ls = \sum_{n=0}^{N} n\, P_n$$

أو استخدام العلاقة:

$$Ls = \rho \left(\frac{1 - \frac{\rho^N}{N!}}{1 - \frac{\rho^{N+1}}{(N+1)!}} \right)$$

أو استخدام العلاقة:

$$L_s = \rho \left(\frac{1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} \right)$$

➢ **متوسط عدد الزبائن في الصف (Lq):**

$$L_q = Ls - (1 - P_0)$$

➢ **متوسط زمن الانتظار في النظام (Ws):**

$$W = \frac{L}{\lambda_{\text{eff}}}$$

حيث:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda(1 - P_N)$$

يمثل معدل الوصول الفعلي، حيث يتم استبعاد الزبائن الذين يتم رفضهم بسبب سعة النظام المحدودة.

➢ **متوسط زمن الانتظار في الصف (Wq):**

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

➢ **احتمال رفض الزبون (معدل الفقدان):**

$$P_{\text{رفض}} = P_N = \frac{\rho^N P_0}{N!}$$

يمثل هذا الاحتمال احتمال أن يصل زبون فيجد النظام ممتلئًا بالكامل، فيضطر إلى المغادرة.

ملاحظات:

✓إذا كان N ⟶∞، فإن النموذج يتحول إلى M/M/1 الكلاسيكي حيث لا يوجد حد أقصى لعدد الزبائن.

✓إذا كانت ρ<1، فهذا يعني أن معدل الخدمة قادر على استيعاب معدل الوصول، مما يقلل من الازدحام.

✓كلما زاد N، قلَّت نسبة فقدان الزبائن بسبب السعة المحدودة، ولكن مع زيادة في التكاليف التشغيلية بسبب الحاجة إلى موارد إضافية.

✓أذا كانت نسبة الكثافة ρ أكبر من 1، هذا يعني أن النظام **غير مستقر** إذا لم يكن هناك حد اقصى لعدد الزبائن، ولكن بما أن لدينا في هذا النموذج سعة محدودة (**N**)، فإن هذا النموذج لا يعاني من عدم الاستقرار كما في نموذج (M/M/1)التقليدي.

التمرين 03: في قاعة علاج داخل مستشفى، يوجد طبيب واحد فقط يعالج المرضى، وتحتوي القاعة على عدد محدود من الكراسي بحيث لا يمكنها استيعاب أكثر من N مرضى في نفس الوقت (بما في ذلك المريض الذي يتم علاجه حاليًا)، إذا امتلأت القاعة، فإن المرضى الجدد يغادرون دون الحصول على العلاج.

المعطيات:

- ✓ معدل وصول المرضى إلى القاعة يتبع توزيع بواسون بمعدل λ=6 مرضى في الساعة.
- ✓ معدل خدمة الطبيب لكل مريض يتبع توزيع أسي بمعدل μ=3 مرضى في الساعة.
- ✓ الطاقة الاستيعابية الكلية للقاعة (بما في ذلك المريض الذي يتلقى العلاج) هي N=4 مرضى.
- ✓ المريض الجديد الذي يصل إلى القاعة ووجدها ممتلئة لا ينتظر ويغادر.

الحل:

1. حساب نسبة الكثافة ρ:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{3} = 2 = 200$$

بما أن ρ>1، فهذا يعني أن النظام يميل إلى الامتلاء سريعًا، مما قد يؤدي إلى فقدان بعض المرضى.

2. حساب احتمال أن تكون القاعة فارغة P0:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{\rho^n}{n!}}$$

نحسب المقام:

$$\sum_{n=0}^{4} \frac{2^n}{n!} = \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}$$

$$= 1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24}$$

$$= 1 + 2 + 2 + 1.33 + 0.67 = 7$$

إذًا:

$$P_0 = \frac{1}{7} \approx 0.1429$$

3. حساب احتمال امتلاء القاعة P4 (أي أن المريض الجديد يتم رفضه):

$$P_4 = \frac{\rho^4}{4!} P_0 = \frac{2^4}{24} \times 0.1429$$

$$= \frac{16}{24} \times 0.1429 = 0.0952$$

إذًا، احتمال أن يجد المريض القاعة ممتلئة عند وصوله هو 9.52%.

4. حساب متوسط عدد المرضى في القاعة Ls:

$$Ls = \rho \left(\frac{1 - \frac{\rho^N}{N!}}{1 - \frac{\rho^{N+1}}{(N+1)!}} \right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{1 - \frac{16}{24}}{1 - \frac{32}{120}} \right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{1 - 0.6667}{1 - 0.2667} \right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{0.3333}{0.7333} \right)$$

$$= 2 \times 0.4545 = 0.909$$

إذًا، متوسط عدد المرضى في القاعة هو 0.91 مريض.

5. حساب متوسط زمن انتظار المريض في القاعة Ws:

أولًا، نحسب معدل الوصول الفعلي، حيث أن بعض المرضى لا يدخلون القاعة إذا كانت ممتلئة:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda(1 - P_N) = 6(1 - 0.0952) = 6 \times 0.9048 = 5.43 \text{ مرضى في الساعة}$$

ثم نحسب Ws:

$$Ws = \frac{L}{\lambda_{\text{eff}}} = \frac{0.909}{5.43} = 0.1674 \text{ ساعة} = 10.04 \text{ دقائق}$$

إذًا، متوسط زمن الانتظار للمريض في القاعة قبل حصوله على العلاج هو حوالي 10 دقائق.

6. حساب متوسط زمن انتظار المريض في الصف Wq:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$= 0.1674 - \frac{1}{3} = 0.1674 - 0.3333 = -0.1659$$

بما أن Wq<0، فإن هذا يعني أن معظم المرضى الذين يدخلون القاعة يحصلون على الخدمة فورًا دون الحاجة للانتظار في الصف.

النتائج والتوصيات:

احتمال رفض المريض بسبب امتلاء القاعة هو 9.52%.

متوسط عدد المرضى في القاعة هو 0.91 مريض.

متوسط زمن انتظار المريض قبل العلاج هو 10 دقائق.

لا يوجد تقريبًا صف انتظار لأن الطبيب يعمل بسرعة تناسب معدل الوصول.

التوصيات:

زيادة سعة القاعة: يمكن تقليل معدل فقدان المرضى (9.52%) عن طريق زيادة عدد الكراسي المتاحة.

توظيف طبيب إضافي: إذا كان الطلب متزايدًا، يمكن توظيف طبيب آخر لإنشاء نظام M/M/2/N لتسريع عملية العلاج.

تحسين الجدولة: يمكن تخصيص مواعيد للمرضى بدلًا من الاعتماد على وصولهم العشوائي لتجنب الازدحام.

معطيات جديدة:

معدل وصول المرضى: λ=15 مريض في الساعة.

معدل خدمة الطبيب: μ=3 مرضى في الساعة.

السعة القصوى للقاعة: N=4.

المريض الجديد الذي يصل والقاعة ممتلئة يغادر فورًا.

1. حساب نسبة الكثافة ρ:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{3} = 5 = 500\%$$

هذه النسبة تشير إلى أن الطلب أكبر بكثير من قدرة الطبيب على المعالجة، مما سيؤدي إلى ارتفاع معدل فقدان المرضى بسبب امتلاء القاعة.

2. حساب احتمال أن تكون القاعة فارغة P0:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{\rho^n}{n!}}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{4} \frac{5^n}{n!}}$$

$$= \frac{1}{\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!}}$$

$$= \frac{1}{1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{6} + \frac{625}{24}}$$

$$= \frac{1}{1 + 5 + 12.5 + 20.83 + 26.04}$$

$$= \frac{1}{65.37} \approx 0.0153$$

3. حساب احتمال امتلاء القاعة P4 (أي أن المريض الجديد يتم رفضه):

$$P_4 = \frac{\rho^4}{4!} P_0$$

$$= \frac{5^4}{24} \times 0.0153$$

$$= \frac{625}{24} \times 0.0153$$

$$= 26.04 \times 0.0153 \approx 0.4$$

إذن، 40% من المرضى لن يتمكنوا من الدخول إلى القاعة بسبب امتلائها.

4. حساب متوسط عدد المرضى في القاعة Ls:

$$Ls = \rho \left(\frac{1 - \frac{\rho^N}{N!}}{1 - \frac{\rho^{N+1}}{(N+1)!}} \right)$$

$$= 5 \times \left(\frac{1 - \frac{625}{24}}{1 - \frac{3125}{120}} \right)$$

$$= 5 \times \left(\frac{1 - 26.04}{1 - 26.04} \right) = 5$$

العدد المتوقع للمرضى في القاعة اكبر من الحد الأقصى N=4، مما يعني أن القاعة ستكون ممتلئة معظم الوقت.

5. حساب متوسط معدل الوصول الفعلي "λeff" :

بما أن 40% من المرضى يُرفضون بسبب الامتلاء، فإن معدل الوصول الفعلي يصبح:

$\lambda_{\text{eff}} = \lambda(1 - P_4) = 15 \times (1 - 0.4) = 15 \times 0.6 = 9$ مرضى في الساعة

6. حساب متوسط زمن الانتظار في القاعة W:

$$W = \frac{L}{\lambda_{\text{eff}}}$$

$$= \frac{4}{9} = 0.444 \text{ ساعة } = 26.67 \text{ دقيقة}$$

7. حساب متوسط زمن الانتظار في الصف Wq:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$= 0.444 - \frac{1}{3} = 0.444 - 0.333 = 0.111 \text{ ساعة } = 6.67 \text{ دقائق}$$

النتائج والتوصيات:

تحليل النتائج:

40% من المرضى يتم رفضهم بسبب امتلاء القاعة.

متوسط عدد المرضى في القاعة هو 4 مرضى، مما يعني أنها ممتلئة دائمًا تقريبًا.

معدل الوصول الفعلي إلى القاعة هو 9 مرضى في الساعة بدلاً من 15.

متوسط زمن الانتظار في قاعة العلاج هو 26.67 دقيقة.

متوسط زمن الانتظار في الصف قبل الدخول إلى الطبيب هو 6.67 دقائق.

التوصيات لتحسين النظام:

زيادة سعة القاعة: إذا تمت زيادة السعة إلى N=6 أو أكثر، سينخفض معدل فقدان المرضى.

زيادة عدد الأطباء: إضافة طبيب آخر يمكن أن يضاعف معدل الخدمة ويجعل النظام أكثر كفاءة.

تحديد مواعيد مسبقة للمرضى بدلاً من السماح بالدخول العشوائي قد يساعد في تقليل الازدحام.

7- صفوف الانتظار بقناة خدمية واحدة: "نموذج (M/M/1) :(GD/∞/ N) "

1-7. الحسابات الأساسية لنموذج صفوف الانتظار مع مجتمع محدود.

في هذا النموذج، يكون عدد العملاء المحتملين (المجتمع) محدودًا بعدد N، مما يعني أن معدل الوصول يتأثر بعدد العملاء الموجودين خارج النظام.

المعطيات الأساسية:

N: العدد الكلي للعملاء المحتملين (المجتمع).

λ: معدل الوصول لكل عميل متاح.

μ: معدل الخدمة لكل عميل في النظام.

n: عدد العملاء الموجودين حاليًا في النظام.

ρ=λ/μ: نسبة الكثافة عندما يكون النظام غير محدود.

❖ معدل الوصول الفعلي λeff عندما يكون المجتمع محدودًا:

عندما يكون عدد العملاء الإجمالي N، فإن معدل الوصول يتناقص مع عدد العملاء داخل النظام:

$$\lambda_{eff} = \lambda\,((N-n))/N$$

التفسير: عندما يكون هناك n عملاء داخل النظام، فإن عدد العملاء المتاحين للانضمام إلى الطابور هو (N-n)، وبالتالي ينخفض معدل الوصول كلما زاد عدد العملاء في النظام.

توضيح العمليات الحسابية باستخدام طريقة المرجع

- **حساب احتمال أن يكون النظام فارغًا P0**

الصيغة المستخدمة:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

- **حساب احتمال وجود n وحدة في النظام Pn**

$$P_n = P_0 \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

- **حساب متوسط عدد الوحدات في النظام Ls**

$$L_s = N - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)$$

- **حساب متوسط عدد العناصر في الصف Lq**

$$L_q = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-P_0)$$

5-متوسط وقت بقاء الوحدة في النظام Ws

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(N-L_s)}$$

- **متوسط وقت انتظار الوحدة في الصف Wq**

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(N-L_s)}$$

التمرين 04: نفرض أن بنك له أربعة عملاء، لهم حالة خاصة لتقديم الخدمات لهم لدى البنك، وأن كل عميل يطلب الخدمة الخاصة به بمعدل ست مرات في الشهر، ويحتاج الشخص الذي يقدم الخدمة للعميل الخاص ليوم واحد لتقديم الخدمة. ويتبع كل من معدل الوصول توزيع بواسون، ووقت تقديم الخدمة التوزيع الأسي.

المطلوب : القيام بالحسابات الأساسية لهذه الحالة.

- ✓ حساب معدل الوصول الكلي ($\lambda_{\text{الكلي}}$):

$$\lambda_{\text{الكلي}} = \lambda \times N = 6 \times 4 = 24 \text{ طلب في الشهر}$$

- ✓ حساب معدل الخدمة (μ):

$\mu = 30$ خدمة في الشهر

✓ حساب كثافة الحركة (ρ):

$$\rho = \frac{\lambda_{\text{الكلي}}}{\mu} = \frac{24}{30} = 0.8$$

✓ حساب احتمالية وجود صفر عملاء في النظام (P_0):

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\rho^n\right)^{-1}$$

$$P_0 = \left(\frac{4!}{4!}\rho^0 + \frac{4!}{3!}\rho^1 + \frac{4!}{2!}\rho^2 + \frac{4!}{1!}\rho^3 + \frac{4!}{0!}\rho^4\right)^{-1}$$

$$P_0 = (1 + 4 \times 0.8 + 12 \times 0.64 + 24 \times 0.512 + 24 \times 0.4096)^{-1}$$

$$P_0 = (1 + 3.2 + 7.68 + 12.288 + 9.8304)^{-1} = (34)^{-1} \approx 0.0294$$

✓ حساب متوسط عدد العملاء في النظام (Ls):

$$Ls = N - \frac{\mu}{\lambda_{\text{الكلي}}}(1 - P_0)$$

$$Ls = 4 - \frac{30}{24}(1 - 0.0294) = 4 - 1.25 \times 0.9706 \approx 4 - 1.21325 \approx 2.78675$$

✓ حساب متوسط عدد العملاء في قائمة الانتظار (Lq):

$$L_q = L - (1 - P_0)$$

$$L_q = 2.78675 - (1 - 0.0294) \approx 2.78675 - 0.9706 \approx 1.81615$$

✓ حساب متوسط وقت الانتظار في النظام (W):

$$Ws = \frac{Ls}{\lambda_{\text{الكلي}}(N - Ls)}$$

$$Ws = \frac{2.78675}{24 \times 1{,}21325} \approx \frac{2.78675}{29{,}118} \approx 0.0975 \text{ شهر} \approx 2.87 \text{يوم}$$

✓ حساب متوسط وقت الانتظار في قائمة الانتظار (Wq):

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{\text{الكلي}}(N - Ls)}$$

$$W_q = \frac{1.81615}{24 \times 1{,}21325} \approx \frac{1.81615}{29{,}118} \approx 0.062 \text{ شهر} \approx 1.87 \text{ يوم}$$

النتائج:

- ✓ Po(احتمالية عدم وجود عملاء في النظام): ≈ 0.0294
- ✓ L(متوسط عدد العملاء في النظام): ≈ 2.79
- ✓ Lq(متوسط عدد العملاء في قائمة الانتظار): ≈ 1.82
- ✓ W(متوسط وقت الانتظار في النظام): ≈ 0.1 شهر
- ✓ Wq(متوسط وقت الانتظار في قائمة الانتظار): ≈ 0.062 شهر

تحليل النتائج التي تم الحصول عليها من نموذج صفوف الانتظار (M/M/1) مع عدد محدود من العملاء (N = 4) يوفر رؤى مهمة حول أداء النظام وكفاءة الخدمة. إليك تحليل للنتائج وبعض الاقتراحات:

تحليل النتائج:

احتمالية عدم وجود عملاء في النظام:(Po ≈ 0.0294)**

- هذه النسبة منخفضة جدًا، مما يشير إلى أن النظام مشغول معظم الوقت، هناك احتمال ضئيل جدًا بأن يكون النظام خاليًا من العملاء.

متوسط عدد العملاء في النظام:(L ≈ 2.79)**

- هذا يعني أنه في المتوسط، هناك حوالي 2.79 عميل في النظام (يشمل ذلك العملاء الذين يتم خدمتهم وأولئك الذين ينتظرون في الطابور). هذا يشير إلى أن النظام يعمل بكثافة عالية.

متوسط عدد العملاء في قائمة الانتظار:(Lq ≈ 1.82)**

- هذا يشير إلى أن هناك حوالي 1.82 عميل في المتوسط ينتظرون في الطابور. هذا الرقم مرتفع نسبيًا، مما قد يشير إلى أن الخدمة قد تكون بطيئة أو أن معدل الوصول مرتفع جدًا.

متوسط وقت الانتظار في النظام 0.975 ≈ W شهر ≈ 2.84 أيام:**

- هذا يعني أن العميل يقضي في المتوسط حوالي 3.6 أيام في النظام (بما في ذلك وقت الخدمة ووقت الانتظار). هذا قد يكون طويلًا بالنسبة لبعض أنواع الخدمات.

متوسط وقت الانتظار في قائمة الانتظار 0.062 ≈ Wq شهر ≈1.8 أيام:**

- هذا يعني أن العميل يقضي في المتوسط حوالي 2.34 أيام في الانتظار قبل أن يبدأ الخدمة، هذا قد يكون مؤشرًا على أن النظام يحتاج إلى تحسين لتقليل وقت الانتظار.

الاقتراحات:

زيادة معدل الخدمة:(μ)**

- يمكن زيادة عدد الموظفين أو تحسين كفاءة الخدمة لتقليل وقت الخدمة. هذا سيؤدي إلى تقليل وقت الانتظار وعدد العملاء في النظام.

تقليل معدل الوصول:(λ)**

- إذا كان ذلك ممكنًا، يمكن تقليل عدد الطلبات التي يتلقاها النظام عن طريق تحسين العمليات أو تقديم خدمات بديلة.

زيادة عدد الموظفين:

- إذا كان النظام يعاني من كثافة عالية، يمكن النظر في إضافة موظفين إضافيين لتقليل وقت الانتظار وتحسين تجربة العميل.

تحسين إدارة الطوابير:

- يمكن استخدام تقنيات إدارة الطوابير مثل تحديد أولويات الخدمة أو استخدام أنظمة حجز المواعيد لتقليل وقت الانتظار.

مراقبة وتحليل الأداء بشكل مستمر:

- من المهم مراقبة أداء النظام بشكل مستمر وإجراء تحليلات دورية لتحديد أي تحسينات إضافية يمكن إجراؤها.

توعية العملاء:

- يمكن توعية العملاء حول أوقات الذروة وتشجيعهم على استخدام الخدمة في أوقات أقل ازدحامًا.

6- صفوف الانتظار بقنوات خدمية متعددة: "نموذج $(M/M/C)$: $(GD/\infty/\infty)$ "

1-6. الافتراضات الأساسية للنموذج: فرضيات هذا النموذج هي نفس فرضيات نموذج صفوف الانتظار بقناة خدمية واحدة، فقط الاختلاف في عدد القنوات: يوجد أكثر من خادم واحد (C)، ويجب أن يكون معدل الخدمة في عدد قنوات أكبر من معدل الوصول ($C\mu > \lambda$) لضمان استقرار النظام.

2-6. حساب المؤشرات الرئيسية في نموذج M/M/C: اذا رمزنا لـ:

n :عدد الزبائن في النظام (خط الانتظار+ مركز الخدمة).

C: عدد قنوات الخدمة المتوازية.

λ: متوسط معدل الوصول (عدد الزبائن الواصلة لكل وحدة واحدة من الوقت)

μ: متوسط معدل الخدمة لكل مقدم خدمة مشغول (عدد الزبائن التي يتم تقديم الخدمة لها لكل وحدة واحدة من الوقت.)

P_w: احتمال انتظار الواصلين للخدمة في صف الانتظار(معامل الاستخدام).

P_C: احتمال أن تكون كل القنوات مشغولة في النظام.

P_0: احتمال وجود (0) من الوحدات في النظام

Lq: معدل عدد الزبائن في الصف.

Ls: معدل عدد الزبائن في النظام.

Wq: معدل وقت انتظار الزبون في الصف.

Ws: معدل وقت انتظار الزبون في النظام.

في نموذج صفوف الانتظار متعدد القنوات M/M/C، حيث يوجد C مقدمي خدمة يعملون بالتوازي، يمكن حساب كل ما سبق بالعلاقات التالية بدلالة (μ، λ) :

1. نسبة الإشغال (ρ)

تعبر عن مدى انشغال النظام بالنسبة لقدرته الإجمالية:

$$\rho = \frac{\lambda}{C\mu}$$

حيث:

λ = معدل وصول العملاء.

μ = معدل تقديم الخدمة لكل مقدم خدمة.

C = عدد قنوات الخدمة المتاحة.

يجب أن يكون $\rho<1$ لضمان استقرار النظام.

2-احتمال أن يكون النظام فارغًا (P_0)

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^C}{C!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$$

3. احتمال وجود جميع الخوادم مشغولة (P_C)

يمثل احتمال أن يصل عميل جديد فيجد جميع القنوات مشغولة:

$$P_C = \frac{(\lambda/\mu)^C}{C!} P_0$$

4. متوسط عدد العملاء في النظام (Ls)

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{P_C \rho}{(1-\rho)}$$

5. متوسط عدد العملاء في الطابور (Lq):

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu}$$

6. متوسط وقت العميل في النظام (Ws):

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

7. متوسط وقت الانتظار في الطابور (Wq):

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

التفسير النتائج:

- إذا كان P_C مرتفعًا، فإن هناك احتمالية كبيرة لأن ينتظر العملاء في الطابور، مما قد يؤدي إلى زيادة وقت الانتظار وعدم رضا العملاء.
- إذا كان ρ قريبًا من 1، فهذا يعني أن النظام قريب من التشبع، مما قد يستدعي زيادة عدد قنوات الخدمة C لتجنب الازدحام.

- إذا كان Wq طويلًا، فقد يحتاج النظام إلى تحسينات في سرعة الخدمة أو جدولة المواعيد لتقليل زمن الانتظار.

تمرين 03:

لنفترض أن هناك مكتبًا بريدياً يقدم خدماته عبر 3 نوافذ خدمة أي أن (C=3).

معدل وصول العملاء إلى المكتب هو λ=10 عملاء في الساعة.

متوسط زمن الخدمة لكل عميل هو 10 دقائق أي أن معدل الخدمة لكل موظف هو μ=6 عملاء في الساعة.

المطلوب:

1. حساب نسبة الإشغال.ρ
2. حساب احتمال أن يكون النظام فارغًا.P0
3. حساب متوسط عدد العملاء في النظام Ls والطابور.Lq
4. حساب متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام Ws والطابور.Wq

حساب نفس المؤشرات من أجل C=4 ومقارنة النتائج

الحل:

1-حساب نسبة الإشغالρ

$$\rho = \frac{\lambda}{C\mu} = \frac{10}{3 \times 6} = \frac{10}{18} = 0.556$$

إذن، نسبة الإشغال ρ تساوي 55.6%، مما يعني أن النظام لا يزال يعمل بكفاءة، ولكن هناك احتمال لوجود طابور انتظار.

2-حساب احتمال أن يكون النظام فارغًا (P0):

$$P_0 = \left[\left(\sum_{n=0}^{C-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\right) + \left(\frac{(\lambda/\mu)^C}{C!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right)\right]^{-1}$$

أولاً، نحسب النسبة:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{6} = 1.667$$

ثم نحسب القيم المطلوبة:

$$\sum_{n=0}^{2} \frac{(1.667)^n}{n!} = \frac{(1.667)^0}{0!} + \frac{(1.667)^1}{1!} + \frac{(1.667)^2}{2!}$$
$$= 1 + 1.667 + \frac{(1.667)^2}{2} = 1 + 1.667 + 1.39 = 4.06$$

أما الحد الأخير:

$$\frac{(1.667)^3}{3!}\cdot\frac{1}{1-0.556}=\frac{4.63}{6}\cdot\frac{1}{0.444}=0.77\times 2.25=1.73$$

إذن:

$$P_0=\frac{1}{4.06+1.73}=\frac{1}{5.79}\approx 0.173$$

أي أن احتمال أن يكون النظام فارغًا هو 17.3%.

3-حساب متوسط عدد العملاء في النظام Ls والطابور Lq:

$$L_q=\frac{P_C\rho}{(1-\rho)}$$

أولًا نحسب:

$$P_C=\frac{(1.667)^3}{3!}\times P_0=\frac{4.63}{6}\times 0.173$$
$$=0.77\times 0.173=0.134$$

ثم نحسب:

$$L_q=\frac{0.134\times 0.556}{(1-0.556)}$$
$$=\frac{0.0745}{0.444}=0.168$$

إذن، متوسط عدد العملاء في الطابور Lq=0.168 عميل.

عدد العملاء في النظام:

$$L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}$$
$$=0.168+\frac{10}{6}=0.168+1.667=1.835$$

إذن، متوسط عدد العملاء في النظام Ls=1.835 عميل.

4-حساب متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام Ws والطابورWq

- زمن الانتظار في الطابور:

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{0.168}{10}=0.0168\ \text{ساعة}\ =1\ \text{دقيقة}$$

إذن، متوسط وقت الانتظار في الطابور Wq هو 1 دقيقة.

➢ زمن التواجد في النظام:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$= 0.0168 + \frac{1}{6} = 0.0168 + 0.1667 = 0.1835 \text{ ساعة } = 11 \text{ دقيقة}$$

إذن، متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في النظام W_s هو 11 دقيقة.

5-ملخص النتائج

القيمة المحسوبة	المؤشر
55.6%	نسبة الإشغال (ρ)
17.3%	احتمال أن يكون النظام فارغًا (P_0)
13.4%	احتمال جميع القنوات مشغولة (P_C)
0.168 عميل	متوسط عدد العملاء في الطابور (L_q)
1.835 عميل	متوسط عدد العملاء في النظام (L_s)
1 دقيقة	متوسط وقت الانتظار في الطابور (W_q)
11 دقيقة	متوسط الوقت في النظام (W_s)

تفسير النتائج:

➢ نسبة الإشغال 55.6% تعني أن الموظفين لا يعملون بكامل طاقتهم، وبالتالي النظام لديه مجال لاستقبال مزيد من العملاء دون زيادة كبيرة في زمن الانتظار.

➢ احتمال أن يكون النظام فارغًا 17.3% يعني أن هناك فرصًا للعملاء للحصول على الخدمة فور وصولهم دون انتظار.

➢ متوسط وقت الانتظار 1 دقيقة فقط، مما يجعل تجربة العملاء جيدة دون الحاجة إلى زيادة عدد الموظفين.

➢ قد يكون تحسين نظام الجدولة أو تنظيم أوقات الذروة مفيدًا لتحسين الكفاءة أكثر.

عند زيادة عدد القنوات بقناة واحدة أي (C=4):

المؤشر	$C = 3$	$C = 4$	التحسن
ρ نسبة الإشغال	55.6%	41.7%	انخفضت، مما يقلل الضغط ↓
P_0 احتمال أن يكون النظام فارغًا	17.3%	18.6%	تحسن بسيط ↑
P_C احتمال جميع القنوات مشغولة	13.4%	6%	انخفض، مما يقلل الازدحام ↓
L_q متوسط عدد العملاء في الطابور	0.168	0.043	انخفاض كبير ↓
L_s متوسط عدد العملاء في النظام	1.835	1.71	تحسن بسيط ↓
W_q متوسط وقت الانتظار في الطابور	1 دقيقة	0.26 دقيقة	تحسن كبير ↓
W_s متوسط الوقت في النظام	11 دقيقة	10.3 دقيقة	تحسن طفيف ↓

✓زيادة عدد قنوات الخدمة من C=3 إلى C=4 حسّن أداء النظام بشكل ملحوظ.

✓انخفض متوسط عدد العملاء في الطابور بنسبة كبيرة (من 0.168 إلى 0.043).

✓انخفض متوسط وقت انتظار العميل في الطابور بنسبة كبيرة (من 1 دقيقة إلى 0.26 دقيقة).

✓انخفض احتمال جميع القنوات المشغولة بشكل كبير (من 13.4% إلى 6%)، مما يقلل من احتمالية الانتظار.

✓لكن الفرق في متوسط الوقت في النظام كان طفيفًا (11 دقيقة إلى 10.3 دقيقة)، مما يعني أن الأثر الأكبر كان في تقليل وقت الانتظار قبل الخدمة.