

Chapitre 3

Notion de stabilité

Contents

3.1	Introduction	62
3.2	Systèmes autonomes linéaires	63
3.3	Systèmes autonomes non linéaires	64
3.4	Preuves des théorèmes de stabilité	68
3.5	Preuve partielle du théorème de stabilité, cas non linéaire	73
3.6	Exemples	76
3.7	Stabilité au sens de Lyapunov	77
3.8	Ensembles ω -limites	80
3.9	Principe d'invariance de LaSalle	81
3.10	Exercices et solutions corrigées	81
3.11	Partiel — Lundi 19 mars 2007	85
3.12	Corrigé du partiel du lundi 19 mars 2007	87

3.1 Introduction

Dans cette section on considère que f ne dépend pas de t et est toujours localement lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On considère alors le système suivant

$$X'(t) = f(X(t)), \tag{3.1}$$

et le problème de Cauchy associé, pour $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} X'(t) &= f(X(t)), \quad 0 < t < +\infty, \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Définition 3.1.1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Le point a est point d'équilibre du système $X'(t) = f(X(t))$ si la fonction constante et égale à a est solution de ce système. Elle est donc solution de (3.2) avec $X_0 = a$. (On dit aussi que la fonction constante et égale à a est une solution stationnaire du système.)

Remarque 5. Bien sûr, une condition nécessaire et suffisante pour que le point a soit point d'équilibre est que $f(a) = 0$.

Définition 3.1.2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre du système (3.1).

1. On dit que a est un point d'équilibre (uniformément) stable de (3.1) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|X_0 - a\| \leq \delta \Rightarrow \begin{cases} \text{Le problème (3.2) a une solution globale notée } X \\ \text{et } \sup_{t \in [0, +\infty[} \|X(t) - a\| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

2. On dit que X_0 est instable si X_0 n'est pas stable.
3. On dit que X_0 est asymptotiquement stable si X_0 est stable et si il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|X_0 - a\| \leq \delta \rightarrow \begin{cases} \text{Le problème (3.2) a une solution globale notée } X \\ \text{et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - a\| = 0. \end{cases}$$

Dire que le point d'équilibre est uniformément stable revient à dire que si l'on part suffisamment proche de ce point d'équilibre, on reste proche de ce point d'équilibre (c'est l'exemple du pendule). Dire que le point d'équilibre est asymptotiquement stable revient à dire que si l'on part suffisamment proche de ce point d'équilibre, on tend vers ce point d'équilibre quand $t \rightarrow +\infty$ (c'est l'exemple du pendule amorti).

Dans la suite, on étudie la stabilité des systèmes autonomes linéaires

3.2 Systèmes autonomes linéaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère le système suivant :

$$X'(t) = AX(t), t > 0 \quad (3.3)$$

La fonction identiquement nulle est solution de (3.3). Autrement dit 0 est un point (de $\mathbb{R}^n$) d'équilibre pour le système (3.3) (on dit aussi que 0 est un point stationnaire). Cette solution est-elle stable ou instable ? La réponse est apportée par le théorème suivant, dont la preuve sera donnée à la fin du chapitre.

Theoreme 3.2.1. (Stabilité d'un système différentiel linéaire)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A . Si λ est une valeur propre de A , on note $\Re(\lambda)$ sa partie réelle. On distingue plusieurs cas :

1. Si $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \Re(\lambda) < 0$, alors 0 est stable et même asymptotiquement stable.
2. Si $\exists \lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $\Re(\lambda) > 0$, alors 0 est instable.
3. Si $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \Re(\lambda) \leq 0$ et il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ avec $\Re(\lambda) = 0$, alors on distingue deux sous-cas (on rappelle que $m_a(\lambda)$ (resp. $m_g(\lambda)$) désigne la multiplicité algébrique (resp. géométrique) d'une valeur propre λ) :
 - a) Si $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $\Re(\lambda) = 0$ on a $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, alors 0 est stable, mais non asymptotiquement stable.
 - b) Si $\exists \lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $\Re(\lambda) = 0$ et $m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$, alors 0 est instable.

Exemple 3.1. (Un cas 2×2). Soit le système

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), t > 0 \\ x_2'(t) = -x_1(t), t > 0, \end{cases}$$

qui s'écrit

$$X' = AX$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique associé à A est $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Les valeurs propres sont donc $\lambda = \pm i$. On est dans le cas 3a du théorème 3.2.1. le point d'équilibre 0 est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.

La prochaine section est consacré à l'étude des systèmes autonomes non linéaires

3.3 Systèmes autonomes non linéaires

Nous allons étudier la stabilité d'un point d'équilibre du système non-linéaire suivant

$$X'(t) = f(X(t)), \quad t > 0. \quad (3.4)$$

On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $f(a) = 0$ pour un point $a \in \mathbb{R}^n$. (A vrai dire, on a simplement besoin dans la suite que f soit de classe C^1 dans un voisinage de a).

Le point d'équilibre a est-il stable ou instable ?

D'après la définition de la dérivée d'une fonction, si $n = 1$,

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + |x - a|\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. Si $n > 1$ on a, de manière similaire,

$$f(X) = f(a) + A(X - a) + \|X - a\|\varepsilon(X),$$

où $\lim_{X \rightarrow a} \varepsilon(X) = 0$ et A est la matrice jacobienne de f au point a .

(On rappelle que l'application $y \mapsto Ay$ est la dérivée de f au point a .)

Prenons par exemple $n = 2$. On note f_1 et f_2 les deux composantes de f et x_1 et x_2 les deux composantes de X , de sorte que

$$f(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix}.$$

On note $A = J_f(a)$ la matrice jacobienne en a de f . Si a est un point d'équilibre de (3.4), on a $f(a) = 0$ et

$$f(X) = \underbrace{f(a)}_{=0} + A(X - a) + \|X - a\|\varepsilon(X)$$

On pose $X - a = Y$, on a alors :

$$f(Y + a) = AY + Y\varepsilon(Y), \quad \lim_{Y \rightarrow 0} \varepsilon(Y) = 0$$

Le système (3.4) devient, avec $g(Y) = Y\varepsilon(Y)$,

$$Y'(t) = AY(t) + g(Y(t)) \quad (3.5)$$

Ceci permet de ramener l'étude de la stabilité du point a pour le système (3.4) à l'étude de la stabilité de 0 pour le système (3.5).

Theoreme 3.3.1. (Stabilité du système non linéaire par l'étude du système linéarisé)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = 0$. On considère le système différentiel non linéaire autonome (3.4). On note $A = J_f(a)$ la matrice jacobienne de f en a .

1. Si $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \Re(\lambda) < 0$, alors a est asymptotiquement stable.
2. Si $\exists \lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $\Re(\lambda) > 0$, alors a est instable.
3. Si $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \Re(\lambda) \leq 0$ et il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ avec $\Re(\lambda) = 0$, on ne peut pas conclure par l'étude de $J_f(a)$.

Démonstration. Nous donnons ici seulement la démonstration pour $n = 1$. Elle est beaucoup plus simple que celle du cas $n > 1$. Supposons donc $n = 1$, la matrice jacobienne de f au point a est alors le nombre réel $f'(a)$ (identifié à un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$).

1. Premier cas : $f'(a) < 0$. Le premier cas du théorème 3.2.1 correspond à $f'(a) < 0$. Dans ce cas, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $f'(z) < 0$ pour tout z tel $|a - z| \leq \delta_0$. Par le théorème des accroissements finis, il existe θ entre a et z tel que $f(z) - f(a) = f'(\theta)(z - a)$. Comme $f(a) = 0$, on en déduit

$$f(z) = f(z) - f(a) > 0 \text{ si } a - \delta_0 \leq z < a, \quad (3.6)$$

$$f(z) = f(z) - f(a) < 0 \text{ si } a < z < a + \delta_0. \quad (3.7)$$

Soit x la solution maximale de (3.4) correspondant à la condition initiale $x(0)$. Si $a - \delta_0 \leq x(0) < a$, la fonction x commencera par être strictement croissante, grâce à (3.6) (et $x'(t) = f(x(t))$), et restera strictement croissante tant que $x(t) < a$. Mais comme la fonction constante égale à a est solution de (3.4), il est impossible qu'il existe t tel que $x(t) = a$. On en déduit que la solution x est globale et que $a - \delta_0 \leq x(0) < x(t) < a$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. Si $a < x(0) \leq a + \delta_0$, un raisonnement analogue, utilisant ((3.7)), donne que x est strictement décroissante et $a < x(t) < x(0) \leq a + \delta_0$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.

Ceci montre la stabilité de a . En effet pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = \min \{\varepsilon, \delta_0\}$ et on obtient

$$|x(0) - a| \leq \delta \Rightarrow |x(t) - a| \leq \varepsilon \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Pour montrer la stabilité asymptotique de a , on remarque que si $|x(0) - a| \leq \delta_0$, la fonction $x(t)$ est monotone bornée. Elle a donc une limite en $+\infty$ notée c . Cette limite appartient à l'intervalle $]a - \delta_0, a + \delta_0[$. En remarquant que pour tout $t > 0$, il existe $\theta_t \in [t, t + 1]$ tel que $x(t + 1) - x(t) = x'(\theta_t) = f(x(\theta_t))$, on en déduit que $f(c) = 0$, ce qui prouve que $c = a$ (en effet, grâce à (3.6), (3.7) a est le seul point de l'intervalle $]a - \delta_0, a + \delta_0[$ où f s'annule). Ceci montre bien la stabilité asymptotique de a .

2. Second cas : $f'(a) > 0$. Un raisonnement analogue au précédent nous donne l'existence de $\delta_0 > 0$ tel que

$$f(z) = f(z) - f(a) < 0 \text{ si } a - \delta_0 \leq z < a, \quad (3.8)$$

$$f(z) = f(z) - f(a) > 0 \text{ si } a < z < a + \delta_0. \quad (3.9)$$

Soit x la solution maximale de (3.4) correspondant à la condition initiale $x(0)$. Cette solution est définie sur l'intervalle $[0, T_m[$. On va montrer que si $x(0) \neq a$,

$$\sup_{t \in [0, T_m[} |x(t) - a| \geq \delta_0.$$

(Ceci montre bien l'instabilité de a .)

Il suffit, bien sûr, de considérer le cas où $|x(0) - a| < \delta_0$. (Car $|x(0) - a| \leq \sup_{t \in [0, T_m[} |x(t) - a|$.)

Si $a - \delta_0 < x(0) < a$, la fonction x commencera par être strictement décroissante grâce à (3.8) (et $x'(t) = f(x(t))$) et restera strictement décroissante tant que $a - \delta_0 \leq x(t)$. Il est impossible que $a - \delta_0 \leq x(t)$ pour tout $t \in [0, T_m[$ car on aurait alors $T_m = +\infty$ (car il n'y aurait pas explosion en T_m) et (comme dans le premier cas) on aurait $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = c$ avec $a - \delta_0 \leq c < a$ et $f(c) = 0$ en contradiction avec (3.8). Ceci montre qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $x(t_1) < a - \delta_0$ et donc $\sup_{t \in [0, T_m]} |x(t) - a| \geq |x(t_1) - a| > \delta_0$.

On peut d'ailleurs aussi remarquer que $x(t) < a - \delta_0$ pour tout $t > t_1$ (ceci peut se montrer par l'absurde, si t_2 est le premier point après t_1 pour lequel $x(t_2) = a - \delta_0$, on a alors $x'(t_2) \geq 0$, mais $x'(t_2) = f(x(t_2)) = f(a - \delta_0) < 0$ grâce à (3.8). C'est donc impossible).

Un raisonnement analogue peut être fait si $a < x(0) < a + \delta_0$.

Il donne aussi $\sup_{t \in [0, T_m]} |x(t) - a| > \delta_0$. On a bien montré l'instabilité de a .

Ceci termine la démonstration du théorème 3.2.1 dans le cas $n = 1$

□

3.4 Preuves des théorèmes de stabilité

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $a = 0$. Le système considéré est alors le système (3.3). On étudie la stabilité de la solution d'équilibre $X \equiv 0$. On rappelle que par définition,

1. 0 est stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|X^{(0)}\| \leq \delta \Rightarrow \sup_{t \in [0, +\infty[} \|X(t)\| \leq \varepsilon$$

2. 0 est asymptotiquement stable si 0 est stable et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$

3.4.1 Preuve du théorème de stabilité linéaire

On étudie ici le problème (3.3). L'objet de cette section est de donner la démonstration du théorème 112 dans le cas $n = 1$ et $n = 2$. Nous utiliserons les notations suivantes :

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\|X\| = \max \{|x_i|, i \in \{1, \dots, n\}\}, \quad \|A\| = \max \{|A_{i,j}|, i, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Nous allons d'abord traiter le cas $n = 1$ (qui est simple) puis le cas $n = 2$ (qui contient l'essentiel des difficultés du cas $n > 1$).

Cas linéaire, une seule équation ($n = 1$)

Supposons dans un premier temps que $n = 1$. Le problème s'écrit (pour a et $x^{(0)}$ donnés) :

$$\begin{cases} x'(t) = ax, t > 0 \\ x(0) = x^{(0)} \end{cases} \quad (3.10)$$

La solution de (3.10) est $x(t) = x_0 e^{at}$.

1. Si $a \leq 0$, alors $|x(t)| \leq |x_0|$ et 0 est donc solution stable (uniformément).

2. Si $a < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ et 0 est donc solution asymptotiquement stable.
3. Si $a > 0$, $x_0 \neq 0$ alors $\sup_{t \in [0, +\infty[} |x(t)| = +\infty$, l'équilibre 0 est donc instable.

Cas linéaire, système : $n = 2$

On considère le problème de Cauchy associé au problème (3.3), qui s'écrit :

$$\begin{cases} X'(t) = AX, & t > 0 \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.11)$$

À partir de maintenant, on suppose $n = 2$ et on note λ_1, λ_2 les deux racines du polynôme caractéristique de A (avec éventuellement $\lambda_1 = \lambda_2$). On étudie successivement les trois cas du théorème 3.2.1.

Cas 1, $\Re(\lambda_1) < 0, \Re(\lambda_2) < 0$.

Nous allons démontrer ici, en distinguant trois sous-cas, que 0 est asymptotiquement stable.

1. Cas où A diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Il existe donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ et $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ base de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \quad A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2.$$

La solution générale du système (3.11) est

$$X(t) = c_1 X^{(1)}(t) + c_2 X^{(2)}(t) \text{ avec } X^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \varphi_1, \quad X^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 t} \varphi_2$$

On a donc

La solution de (3.11) est $X(t) = M(t)M(0)^{-1}X(0)$. (Noter que la matrice $M(0)$ est bien inversible car φ_1, φ_2 sont linéairement indépendantes).

Lemme 3.1. (Bornes sur la solution). Avec les notations précédentes, on a

- (a) $\|M(t)\| \leq ce^{\lambda_2 t}$, et $c > 0$ ne dépend que de φ_1 et φ_2
- (b) $\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|e^{\lambda_2 t}$ et $b > 0$ ne dépend que φ_1 et φ_2

En posant $\delta = \varepsilon/b$ on obtient la stabilité (comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$, on obtient même la stabilité asymptotique).

2. Cas où A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et non dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ avec $\beta \neq 0$. Soit $\varphi = \psi + i\chi$ tel que $A\varphi = \lambda_1\varphi$. On a déjà vu que $\{\psi, \chi\}$ est une base

de $\mathbb{R}^2$. La solution générale du système (3.11) est

$$X(t) = c_1 X^{(1)}(t) + c_2 X^{(2)}(t)$$

avec

$$X^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\psi - \sin(\beta t)\chi), \quad X^{(2)}(t) = e^{\alpha t}(\sin(\beta t)\psi + \cos(\beta t)\chi)$$

On a donc $X(t) = M(t)C$ avec

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad M(t) = \begin{bmatrix} X^{(1)}(t) & X^{(2)}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

La solution de (3.11) est $X(t) = M(t)M(0)^{-1}X(0)$. (Ici encore, on peut noter que la matrice $M(0)$ est bien inversible car ψ, χ sont linéairement indépendantes).

Un lemme analogue au lemme 3.1 est peut être démontré de manière similaire.

Lemme 3.2. (Bornes sur la solution). Avec les notations précédentes, on a

- (a) $\|M(t)\| \leq ce^{\alpha t}$, et $c > 0$ ne dépend que de φ_1 et φ_2
- (b) $\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|e^{\alpha t}$ et $b > 0$ ne dépend que φ_1 et φ_2

Comme $\alpha \leq 0$, on obtient la stabilité en posant $\delta = \varepsilon/b$. Puis, Grâce à $\alpha < 0$, on obtient même la stabilité asymptotique.

3. Cas où A est non diagonalisable. Si A est non diagonalisable, cela signifie que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ et que $m_a(\lambda) = 2, m_g(\lambda) = 1$. La solution générale du système (3.11) est alors

$$X(t) = c_1 X^{(1)}(t) + c_2 X^{(2)}(t) \text{ avec } X^{(1)}(t) = e^{\lambda t}\varphi, \quad X^{(2)}(t) = e^{\lambda t}(\psi + t\varphi),$$

où $A\varphi$ est un vecteur propre associé à λ , i.e. $A\varphi = \lambda\varphi$, et ψ est un vecteur tel que φ, ψ forment une base de $\text{Ker}(A - \lambda I)^2$ (et donc ici une base de $\mathbb{R}^2$). On a ici encore $X(t) = M(t)C$ avec

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad M(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t}\varphi & e^{\lambda t}(\psi + t\varphi) \end{bmatrix} = e^{\frac{\lambda t}{2}} \begin{bmatrix} e^{\frac{\lambda t}{2}}\varphi & e^{\frac{\lambda t}{2}}(\psi + t\varphi) \end{bmatrix}$$

La solution de (3.11) est toujours $X(t) = M(t)M(0)^{-1}X(0)$. Comme $\lambda < 0$, les

fonctions $t \mapsto e^{\frac{\lambda t}{2}}$ et $t \mapsto te^{\frac{\lambda t}{2}}$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $\|M(t)\| \leq ae^{\frac{\lambda t}{2}}$ avec a ne dépendant que de φ, ψ et λ . On a également $\|X(t)\| \leq be^{\frac{\lambda t}{2}} \|X(0)\|$ avec b ne dépendant que de φ, ψ et λ . Ceci donne la stabilité asymptotique de 0.

Cas 2 : il existe $\lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) > 0$. On distingue les cas $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Cas $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathbb{R}^2, \varphi \neq 0$ tel que $A\varphi = \lambda\varphi$, de sorte que la fonction définie par $X^{(1)}(t) = e^{\lambda t}\varphi$ est une solution de (3.11).

Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $X(t) = \varepsilon e^{\lambda t}\varphi$ est la solution de (3.11) avec la donnée initiale $X(0) = \varepsilon\varphi$.

Comme $\sup_{t>0} \|\varepsilon X(t)\| = +\infty$ et que $\|X(0)\|$ est arbitrairement petit, ceci montre que 0 est un équilibre instable.

2. Cas $\lambda \in \mathbb{C}$ (et non dans $\mathbb{R}$). Supposons maintenant que λ soit complexe : $\lambda = \alpha + i\beta, \alpha > 0, \beta \neq 0$. Soit φ tel que $A\varphi = \lambda\varphi, \varphi = \psi + i\chi$. La fonction

$$X^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\psi - \sin(\beta t)\chi)$$

est solution de (3.11). On utilise maintenant le fait que $\psi \neq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $X(t) = \varepsilon e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\psi - \sin(\beta t)\chi)$ est la solution de (3.11) avec la donnée initiale $X(0) = \varepsilon\psi$. On a alors :

$$\sup_{t>0} \|\varepsilon X(t)\| = +\infty, \quad \|\varepsilon X(0)\| \leq \varepsilon \|\psi\|$$

Ceci prouve que 0 est un équilibre instable.

Cas 3 : $\Re(\lambda_1) \leq 0, \Re(\lambda_2) \leq 0$ et $\Re(\lambda_1)\Re(\lambda_2) = 0$.

On peut supposer sans perte de généralité que $\Re(\lambda_1) = 0$. (Noter qu'il est possible que $\lambda_1 = \lambda_2$.)

1. Cas 3(a) : $\forall \lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) = 0$ on a $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ on a donc aussi $m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2)$ (plus précisément $m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2) = 1$). Si $\lambda_1 = \lambda_2$ (c'est-à-dire $m_a(\lambda_1) = 2$), on a alors $m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1) = 2$. La matrice est donc toujours diagonalisable (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On a profité ici du fait que $n = 2$ (pour $n > 2$, la situation serait un peu plus complexe). On distingue maintenant les cas A diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et A diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

(a) Cas A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Comme $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la solution générale de (3.11) est donnée par les fonctions $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ (avec $A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i, \varphi_i \neq 0, i = 1, 2$

)

$$X^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \varphi_1 \quad X^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 t} \varphi_2$$

On a donc $M(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \varphi_1 & e^{\lambda_2 t} \varphi_2 \end{bmatrix}$ et, comme $\lambda_i \leq 0$ pour $i = 1, 2$, il existe a et b ne dépendant que de φ_1 et φ_2 tels que $\|M(t)\| \leq a$, et $\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|$ pour tout $t > 0$. Le point 0 est donc un équilibre stable. Mais 0 n'est pas asymptotiquement stable car $\lambda_1 = 0$ et donc, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction constante égale à $\varepsilon \varphi_1$ est solution de (3.11).

(b) Cas A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (et non dans $\mathbb{R}$) Supposons maintenant que $\lambda_1 = \alpha + i\beta = i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta = -i\beta$ (avec $\beta \neq 0$). Avec les notations habituelles, la solution générale de (3.11) est donnée par les fonctions

$$X^{(1)}(t) = \cos(\beta t)\psi - \sin(\beta t)\chi \quad X^{(2)}(t) = \sin(\beta t)\psi + \cos(\beta t)\chi$$

On a donc : $\|M(t)\| \leq a$, avec a ne dépendant que de ψ, χ et $\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|$ avec b ne dépendant que de ψ, χ . Il y a équilibre stable en 0. Par contre, comme dans le cas A diagonalisable dans $\mathbb{R}$, 0 n'est pas asymptotiquement stable.

2. Cas (3B) : $\exists \lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) = 0$ et $m_a(\lambda) > m_g(\lambda)$. Dans le cas $n = 2$ considéré ici, ce cas correspond à $0 \in Sp(A)$ et $m_a(0) = 2, m_g(0) = 1$. La solution générale de (3.11) est donnée par les fonctions

$$X^{(1)}(t) = \varphi \quad X^{(2)}(t) = \psi + t\varphi,$$

avec $\varphi, \psi \in \mathbb{R}^2$, non nuls. La fonction $X^{(1)}$ est bornée mais $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|X^{(2)}(t)\| = +\infty$. Il y a donc équilibre instable en 0, car $\|\varepsilon X^{(2)}(0)\| = |\varepsilon| \|\psi\|$ est aussi petit que l'on veut (et non nul) alors que $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|\varepsilon X^{(2)}(t)\| = +\infty$ pour $\varepsilon \neq 0$.

Exemple 3.2. (Pendule pesant linéarisé).

Considérons à nouveau l'exemple du pendule pesant linéarisé. On rappelle que l'équation est

$$x''(t) + x(t) = 0, t > 0. \quad (3.12)$$

On pose $x_1(t) = x(t), x_2(t) = x'(t), X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. L'équation (du second ordre) (3.12) se ramène donc au système $X'(t) = AX$. Les valeurs propres de la

matrice A sont $\pm i$. On peut retrouver ce résultat directement, les solutions du système sont

$$x_1(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t \quad x_2(t) = -\alpha \sin t + \beta \cos t, \quad \alpha = x_1(0), \beta = x_2(0)$$

On a alors : $\|X(t)\| \leq |\alpha| + |\beta| \leq 2\|X(0)\|$ pour tout t . Ce qui prouve la stabilité de 0 .

On passe maintenant à la théorème de stabilité dans le cas non linéaire.

3.5 Preuve partielle du théorème de stabilité, cas non linéaire

On se place maintenant sous les hypothèses du théorème 3.2.1 et on considère le système différentiel non linéaire (3.4), et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = 0$. Le cas $n = 1$ a été démontré dans le cas précédent. On va s'intéresser ici au cas $n = 2$ (qui contient l'essentiel des difficultés du cas $n > 1$) et on ne démontre que l'item 1 du théorème, c.à.d. que si $\Re(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$, alors a est asymptotiquement stable. En posant $Y = X - a$ l'équation sur Y est $Y'(t) = f(Y(t) + a) = h(Y(t))$ avec h définie par $h(z) = f(z + a)$. (Noter que $h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ car $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.) On rappelle que l'on note $J_f(a)$ la matrice jacobienne en a de f et $J_h(0)$ la matrice jacobienne en 0 de h . Comme $J_h(0) = J_f(a)$, il suffit de démontrer le théorème 13 pour une fonction f telle que $f(0) = 0$, avec $a = 0$. Comme on suppose que $n = 2$, on note x_1, x_2 les composantes de X , et le système (3.4) s'écrit

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) & t > 0, \\ x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) & t > 0. \end{cases}$$

La dérivabilité de f au point 0 donne, pour tout $Z \in \mathbb{R}^2$,

$$f(Z) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{J_f(0)}_A Z + \underbrace{\|Z\|\varepsilon(Z)}_{g(Z)} = AZ + g(Z),$$

$$\text{avec } A = J_f(0) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{bmatrix}, g(Z) = \|Z\|\varepsilon(Z) \text{ et } \lim_{Z \rightarrow 0} \varepsilon(Z) = 0.$$

Le système (3.4) s'écrit donc $X'(t) = AX(t) + g(X(t))$. Noter aussi que $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Par hypothèse, on a $\Re(\lambda_1) < 0$ et $\Re(\lambda_2) < 0$ pour $\lambda_1, \lambda_2 \in Sp(A)$, et on veut montrer que 0 est asymptotiquement stable. On commence par un calcul semblable à celui que l'on fait avec la technique "variation de la constante". Soit X la solution maximale de 9.13 avec donnée

initiale $X(0)$ (cette solution est donc définie sur $[0, T_m[$). On pose $C(t) = e^{-At}X(t)$ et on a donc $X(t) = e^{At}C(t)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} X'(t) &= Ae^{At}C(t) + e^{At}C'(t) \\ &= AX(t) + g(X(t)) = Ae^{At}C(t) + g(X(t)) \end{aligned}$$

Ceci donne que $C'(t) = e^{-At}g(X(t))$. Comme

$$C(t) = \int_0^t C'(s)ds + C(0) \text{ et } C(0) = X(0)$$

on obtient

$$C(t) = X(0) + \int_0^t e^{-As}g(X(s))ds.$$

On en déduit la formule suivante, dite formule de Duhamel :

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(X(s))ds, \text{ pour tout } t \in [0, T_m[.$$

Pour la suite, on suppose sans perte de généralité, que $\Re(\lambda_1) \leq \Re(\lambda_2) = 2\alpha < 0$. en utilisant le fait que $e^{At} = M(t)M(0)^{-1}$, il existe $\bar{b}$, ne dépendant que de φ_1, φ_2 (vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2) tel que $\|e^{At}\| \leq \bar{b}e^{\alpha t}$ pour

tout $t \geq 0$ (on peut par ailleurs remarquer que $\bar{b} \geq 1$). Compte tenu de la définition de la norme (dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), ceci donne, avec $b = 2\bar{b}$, $\|e^{At}Z\| \leq be^{\alpha t}\|Z\|$ pour tout $Z \in \mathbb{R}^2$. On a donc

$$\|X(t)\| \leq be^{\alpha t}\|X(0)\| + \int_0^t be^{\alpha(t-s)}\|g(X(s))\|ds \text{ pour tout } t \in [0, T_m[.$$

On utilise maintenant le fait que $g(Z) = \|Z\|\varepsilon(Z)$. Comme $\varepsilon(Z) \rightarrow 0$ lorsque $Z \rightarrow 0$, on a

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0, \exists \delta > 0 : \|X\| \leq \delta \Rightarrow \|\varepsilon(X)\| \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Soit donc $\tilde{\varepsilon} > 0$ et $0 < T < T_m$. Si

$$\forall s \in [0, T], \quad \|X(s)\| \leq \delta, \tag{3.13}$$

on a alors, pour tout $s \in [0, T]$, $\|g(X)\| \leq \|X\|\tilde{\varepsilon}$ et donc, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$e^{-\alpha t}\|X(t)\| \leq b\|X(0)\| + \int_0^t be^{-\alpha s}\|X(s)\|\tilde{\varepsilon}ds$$

On applique une technique de Gronwall ; en posant

$$\varphi(t) = b\|X(0)\| + \int_0^t b e^{-\alpha s} \|X(s)\| \bar{\varepsilon} ds,$$

l'inégalité précédente donne

$$\varphi'(t) = b\bar{\varepsilon}\|X(t)\|e^{-\alpha t} \leq b\bar{\varepsilon}\varphi(t).$$

On a donc $\varphi'(t) - b\bar{\varepsilon}\varphi(t) \leq 0$ pour tout $0 \leq t \leq T$. En posant $\psi(t) = \varphi(t)e^{-b\bar{\varepsilon}t}$, on obtient

$$\psi'(t) = (\varphi'(t) - b\bar{\varepsilon}\varphi(t))e^{-b\bar{\varepsilon}t} \leq 0.$$

La fonction ψ est décroissante et donc $\psi(t) \leq \psi(0)$ pour tout $0 \leq t \leq T$. On en déduit

$$\varphi(t)e^{-b\bar{\varepsilon}t} \leq \varphi(0) \text{ et donc } \varphi(t) \leq b\|X(0)\|e^{b\bar{\varepsilon}t}.$$

Comme $\|X(t)\| \leq e^{\alpha t}\varphi(t)$, on a $\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|e^{b\bar{\varepsilon}t}e^{\alpha t}$ pour tout $0 \leq t \leq T$. En choisissant $\bar{\varepsilon} = -\frac{\alpha}{2b}$ (ce qui est possible car $\alpha < 0$), on obtient, à condition que (3.13) soit vérifiée,

$$\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|e^{\frac{\alpha}{2}t} \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T \quad (3.14)$$

On va montrer maintenant que si $\|X(0)\| \leq \frac{\delta}{b}$, alors la condition (3.13) est vérifiée pour tout $T < T_m$, que $T_m = +\infty$ et (3.14) est vraie pour tout $t > 0$ (ce qui donne la stabilité asymptotique de 0). On suppose donc que $\|X(0)\| \leq \frac{\delta}{b}$. Ceci donne, en particulier, $\|X(0)\| < \delta$ (car on a déjà vu que $b > 1$). On montre par l'absurde que $\|X(t)\| < \delta$ pour tout $t < T_m$. En effet, sinon on pose

$$T = \inf \{t \in [0, T_m[, \|X(t)\| = \delta\}.$$

On a $T > 0$ car $\|X(0)\| < \delta$ et (3.13) est vérifié. On a donc (3.14), ce qui donne pour $t = T$, $\|X(T)\| \leq b\|X(0)\|e^{\frac{\alpha}{2}T} < \delta$, en contradiction avec la définition de T . On a donc montré que $\|X(t)\| < \delta$ pour tout $t < T_m$. Ceci donne d'une part que $T_m = +\infty$ (il n'y a pas "explosion" en T_m) et d'autre part que

$$\|X(t)\| \leq b\|X(0)\|e^{\frac{\alpha}{2}t} \text{ pour tout } 0 \leq t < +\infty.$$

On en déduit que 0 est asymptotiquement stable.

3.6 Exemples

3.6.1 Pendule non linéarisé

Revenons maintenant à l'exemple du pendule et considérons le modèle du pendule non linéarisé.

$$x''(t) + \frac{g}{\ell} \sin(x(t)) = 0 \quad (3.15)$$

Dans l'équation (3.15) g correspond à l'intensité de la pesanteur et ℓ la longueur du fil, On suppose que $\frac{g}{\ell} = 1$. On pose $x_1 = x$ et $x_2 = x'$. Alors :

$$X'(t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

On sait que $(0,0)$ ainsi que $(\pi,0)$ sont deux points d'équilibre. La matrice jacobienne s'écrit :

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}.$$

Si $x_1 = x_2 = 0$ alors $J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ dont les valeurs propres sont $\pm i$. On ne peut

donc pas conclure avec le théorème 3.2.1. Si $x_1 = \pi$ et $x_2 = 0$, $J_f(\pi,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, dont les valeurs propres sont ± 1 . L'équilibre est donc instable.

3.6.2 Modèle de Lotka-Volterra

Le système de Lotka-Volterra peut s'écrire :

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) (a - bx_2(t)), \\ x_2'(t) = x_2(t) (-c + dx_1(t)). \end{cases}$$

On rappelle que $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. Les points d'équilibre sont $(0,0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$. La

matrice jacobienne est :

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} a - bx_2 & -bx_1 \\ dx_2 & -c + dx_1 \end{bmatrix},$$

Si $x_1 = x_2 = 0$ alors $J_f(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$, et le point $(0, 0)$ est instable. Si $x_1 = \frac{c}{d}$ $x_2 = \frac{a}{b}$ alors

$$J_f\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est $\lambda^2 + \frac{adbc}{bc} = \lambda^2 + ac$. Les valeurs propres sont $\pm i\sqrt{ac}$. On est dans le cas 3) du théorème 3.2.1 et on ne peut pas conclure.

3.7 Stabilité au sens de Lyapunov

Les solutions stationnaires constituent des états d'équilibres dont la stabilité (ou l'instabilité) est importante du point de vue des applications. En réalité, un système physique est toujours soumis à des perturbations, aussi infimes soient-elles, et lorsqu'on cherche des simulations numériques, on fait nécessairement des erreurs de mesure ou des erreurs d'arrondis.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique des solutions stationnaires (c'est-à-dire les points d'équilibres) pour des données initiales proches d'une solution stationnaire, en faisant intervenir la théorie de Lyapunov. Celle-ci fait appel à des fonctions particulières au voisinage de l'équilibre, permettant de contrôler le comportement asymptotique des solutions stationnaires.

3.7.1 Exemple d'application

On commence par l'exemple suivant qui illustre l'idée générale de la théorie de Lyapunov.

Exemple 1 (Champs de gradient). Soit le système différentiel

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{5.2.1}$$

où f est un champ de vecteurs de gradient, c'est-à-dire :

$$f(x) = -\nabla V(x),$$

où $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω (de façon que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω).

Par définition, le gradient de V vérifie que :

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|V(x+h) - V(x) - D_x V \cdot h|}{\|h\|} = 0,$$

d'où :

$$D_x V \cdot h = \langle \nabla V(x), h \rangle, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Comme la dimension est finie, on a :

$$\nabla V(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Soit x_0 un point d'équilibre pour $x'(t) = f(x(t))$, c'est-à-dire $f(x_0) = 0$, donc $\nabla V(x_0) = 0$, ce qui implique :

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial V}{\partial x_j}(x_0) = 0.$$

C'est-à-dire que x_0 est un point critique de la fonction V .

Comme $x'(t) = f(x(t)) = -\nabla V(x(t))$, la dérivée totale de V par rapport au temps est :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot x'(t) = \langle \nabla V(x(t)), -\nabla V(x(t)) \rangle = -\|\nabla V(x(t))\|^2 \leq 0, \quad \forall t.$$

3.7.2 Fonction de Lyapunov

Définition 5.3.1 (Fonction de Lyapunov). Soit x_0 un point d'équilibre de l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{5.3.1}$$

et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x_0 .

Une fonction $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est appelée une fonction de Lyapunov pour f en

x_0 si :

1. $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$,
2. la dérivée de V le long des solutions de (5.3.1) satisfait

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Théorème 5.3.2. Si une fonction de Lyapunov V existe pour x_0 dans un voisinage Ω et si sa dérivée le long des trajectoires est strictement négative, c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) < 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \{x_0\},$$

alors x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Remarque. La condition $\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq 0$ implique la stabilité (au sens de Lyapunov), mais pas nécessairement la convergence des solutions vers x_0 . Il faut la stricte décroissance pour garantir la convergence.

3.7.3 Bassin d'attraction

Définition 5.3.3. Le bassin d'attraction d'un point d'équilibre stable x_0 est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la solution $x(t)$ du système (5.3.1) vérifiant $x(0) = x$ vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0.$$

Cet ensemble est en général ouvert et peut être strictement inclus dans le domaine de définition de f .

3.7.4 Exemples d'application

Exemple 1. Considérons le système non linéaire :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + x_2^2(t), \\ x_2'(t) = -x_2(t), \end{cases} \quad (5.3.4)$$

On observe que $x_0 = (0, 0)$ est un point d'équilibre.

On définit la fonction $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Alors V est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$V(0, 0) = 0, \quad V(x_1, x_2) > 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

Calculons la dérivée de V le long des solutions :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x_1 x_1' + x_2 x_2' = x_1(-x_1 + x_2^2) + x_2(-x_2) = -x_1^2 + x_1 x_2^2 - x_2^2$$

Ce n'est pas forcément ≤ 0 partout, donc V n'est pas une fonction de Lyapunov stricte. Cependant, on peut encore montrer la stabilité de l'origine dans certaines régions.

Exemple 2. Soit le système linéaire :

$$x'(t) = Ax(t), \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Prenons $V(x) = \frac{1}{2}x^T x = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Alors :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x^T A^T x = x^T (A + A^T)x = -4x_1^2 - 6x_2^2 < 0 \quad \forall x \neq 0$$

Donc $x = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

3.8 Ensembles ω -limites

Définition 5.4.1. Soit $x(t)$ une solution du système :

$$x'(t) = f(x(t)),$$

définie sur $[0, +\infty[$. L'ensemble $\omega(x_0)$ appelé ensemble ω -limite de x_0 est défini par :

$$\omega(x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ tel que } x(t_n) \rightarrow y\}.$$

Autrement dit, $\omega(x_0)$ est l'ensemble des points d'accumulation de la trajectoire $x(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Propriétés :

1. $\omega(x_0)$ est un ensemble fermé et invariant par le flot du système.

2. Si la trajectoire $x(t)$ reste bornée sur $[0, +\infty[$, alors $\omega(x_0)$ est non vide.
3. Si x_0 appartient au bassin d'attraction d'un équilibre x_e , alors $\omega(x_0) = \{x_e\}$.

3.8.1 Cas de la dimension $n = 2$

En dimension 2, les trajectoires d'un système différentiel peuvent présenter différents types de comportements asymptotiques :

- convergence vers un point d'équilibre,
- convergence vers un cycle limite (solution périodique stable),
- comportement plus complexe (mais exclu dans certains cas par des résultats de Poincaré-Bendixson).

Théorème de Poincaré-Bendixson. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $x(t)$ une trajectoire bornée du système $x'(t) = f(x(t))$.

Alors si $\omega(x_0)$ ne contient pas de point d'équilibre, c'est une orbite périodique (un cycle limite).

Ce théorème est spécifique à la dimension 2, et ne s'applique pas en dimension supérieure.

3.9 Principe d'invariance de LaSalle

Ce principe permet d'affaiblir l'exigence de décroissance stricte dans les fonctions de Lyapunov pour conclure à la stabilité asymptotique.

Théorème 5.5.1 (Principe d'invariance de LaSalle).

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, et $x'(t) = f(x(t))$ un système autonome. Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

- $V(x) \geq 0$ pour tout x dans un ensemble compact invariant D ,
- $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$ sur D .

Alors toute trajectoire $x(t)$ contenue dans D converge vers l'ensemble maximal invariant contenu dans :

$$E = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

Conséquence. Si l'unique invariant dans E est un point d'équilibre x_0 , alors x_0 est asymptotiquement stable.

3.10 Exercices et solutions corrigées

Exercice 1. Considérons le système :

$$x'(t) = -x^3(t)$$

Solution. Le point d'équilibre est $x = 0$.

Prenons $V(x) = \frac{1}{2}x^2$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive sauf en $x = 0$, et :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x(t) \cdot x'(t) = -x^4(t) \leq 0$$

Donc $x = 0$ est un équilibre asymptotiquement stable. La solution générale est :

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty$$

Exercice 2. Système :

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 + x_2^2 \\ x'_2 = -x_2 \end{cases}$$

Solution. $x = (0, 0)$ est un point d'équilibre.

On choisit $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.

Alors :

$$\dot{V}(x) = x_1(-x_1 + x_2^2) + x_2(-x_2) = -x_1^2 + x_1x_2^2 - x_2^2$$

Cette expression peut être positive pour certains x , donc V n'est pas une fonction de Lyapunov stricte. On en déduit que l'origine est stable mais pas nécessairement asymptotiquement stable.

Exercice 3. $x'(t) = Ax(t)$ avec A une matrice dont les valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives.

Solution. Soit $V(x) = x^T Px$ où P est une matrice symétrique définie positive.

Choisissons $P = I$. On a :

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T + A)x$$

Si $A^T + A$ est définie négative, alors $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$, ce qui montre la stabilité asymptotique de l'origine.

Exercice 4 : Système de Van der Pol

Considérez le système :

$$\begin{cases} x'(t) = x^3 - x + y \\ y'(t) = -x \end{cases}$$

Solution. Le seul point d'équilibre est $(0, 0)$. La jacobienne au point $(0, 0)$ est :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont complexes conjuguées à partie réelle négative $\Rightarrow$ stabilité asymptotique.

Choisissons $V(x, y) = x^2 + y^2$:

$$\frac{dV}{dt} = 2x(x^3 - x + y) + 2y(-x) = 2x^4 - 2x^2$$

Dans le disque $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, on a $x^2 < 1$, donc $x^4 < x^2$ $\dot{V} < 0$ sauf à $x = 0$.

Donc V est une fonction de Lyapunov stricte dans D , ce qui implique que $(0, 0)$ est asymptotiquement stable pour les trajectoires contenues dans D .

—

Exercice 5 : Pendule simple avec amortissement

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -kv(t) - \sin x(t), \quad k > 0 \end{cases}$$

Solution. Prenons $V(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + (1 - \cos x)$. On a :

$$\frac{dV}{dt} = v(-kv - \sin x) + v \sin x = -kv^2 \leq 0$$

Donc V est une fonction de Lyapunov stricte sur l'ouvert $\Omega = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. L'origine $(0, 0)$ est donc asymptotiquement stable.

Exercice 6 : Système non linéaire dissipatif

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -x + (x^2 - 1)y \end{cases}$$

Solution. Prenons $V(x, y) = x^2 + y^2$. Alors :

$$\frac{dV}{dt} = 2xy + 2y(-x + (x^2 - 1)y) = 2y^2(x^2 - 1)$$

Dans $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, on a $x^2 < 1 \Rightarrow \dot{V} < 0$ si $y \neq 0$.

Donc $(0, 0)$ est asymptotiquement stable et D est un domaine invariant.

Exercice 7 : Système général dissipatif

Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = -x - 2y^2 \\ y'(t) = xy - y^3 \end{cases}$$

Solution. Considérons $V(x, y) = x^2 + \alpha y^2$ avec $\alpha > 0$. Alors :

$$\frac{dV}{dt} = 2x(-x - 2y^2) + 2\alpha y(xy - y^3) = -2x^2 - 4xy^2 + 2\alpha xy^2 - 2\alpha y^4$$

Choisissons $\alpha = 2$ pour obtenir :

$$\frac{dV}{dt} = -2(x^2 + 2y^4) < 0$$

Donc V est une fonction de Lyapunov stricte sur $\mathbb{R}^2$, et l'origine est globalement asymptotiquement stable.