

Chapitre 2

EDO's sous contrainte

2.1 Cônes Tangents

Dans ce chapitre, nous considérons certaines approximations d'ensembles qui sont très utiles pour la formulation de conditions d'optimalité. Nous étudions les soi-disant cônes tangents qui approchent un ensemble donné dans un sens local. Nous discutons d'abord de plusieurs propriétés de base des cônes tangents, puis nous présentons des conditions d'optimalité à l'aide de ces cônes. Enfin, nous formulons un théorème de Lyusternik.

2.1.1 Définition et propriétés

Dans cette section, nous portons notre attention sur le cône tangent de Bouligand séquentiel, également appelé cône contingent. Pour ce cône tangent, nous démontrons plusieurs propriétés de base.

Nous introduisons d'abord le concept de cône.

Définition 4.1. Soit C une partie non vide d'un espace linéaire réel X .

(a) L'ensemble C est appelé un cône si

$$x \in C, \lambda \geq 0 \implies \lambda x \in C.$$

(b) Un cône C est dit pointé si

$$x \in C, -x \in C \implies x = 0_X.$$

Exemple 2.1. (a) L'ensemble

$$\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

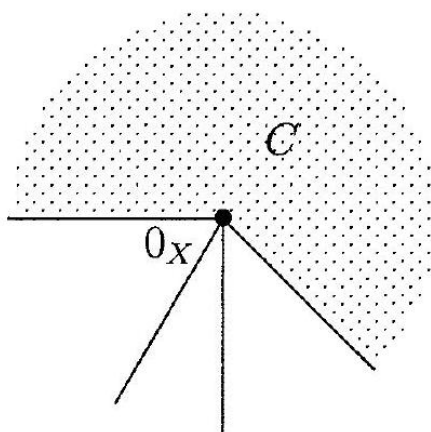


Figure 4.1: Cone.

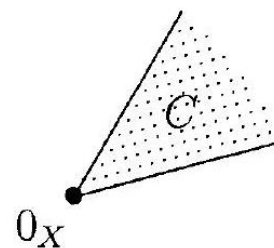


Figure 4.2: Pointed cone.

FIGURE 2.1 – Cone and cone pointé.

est un cône pointé.

(b) L'ensemble

$$C := \{x \in C[0, 1] \mid x(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [0, 1]\}$$

est un cône pointé.

En théorie de l'ordre et en théorie de l'optimisation, les cônes convexes présentent un intérêt particulier. Ces cônes peuvent être caractérisés comme suit :

Théorème 4.3. Un cône C dans un espace linéaire réel est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in C$,

$$x + y \in C. \tag{4.1}$$

Démonstration.

(a) Soit C un cône convexe. Alors, pour tous $x, y \in C$, on a

$$\frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in C$$

ce qui implique que $x + y \in C$.

(b) Pour tout $x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x \in C$ et $(1 - \lambda)y \in C$. Alors, d'après la condition (4.1), on obtient :

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Par conséquent, le cône C est convexe.

Par la suite, nous définissons également les cônes engendrés par des ensembles.

Définition 4.4. Soit S une partie non vide d'un espace linéaire réel. L'ensemble

$$\text{cone}(S) := \{\lambda s \mid \lambda \geq 0 \text{ et } s \in S\}$$

est appelé le cône engendré par S .

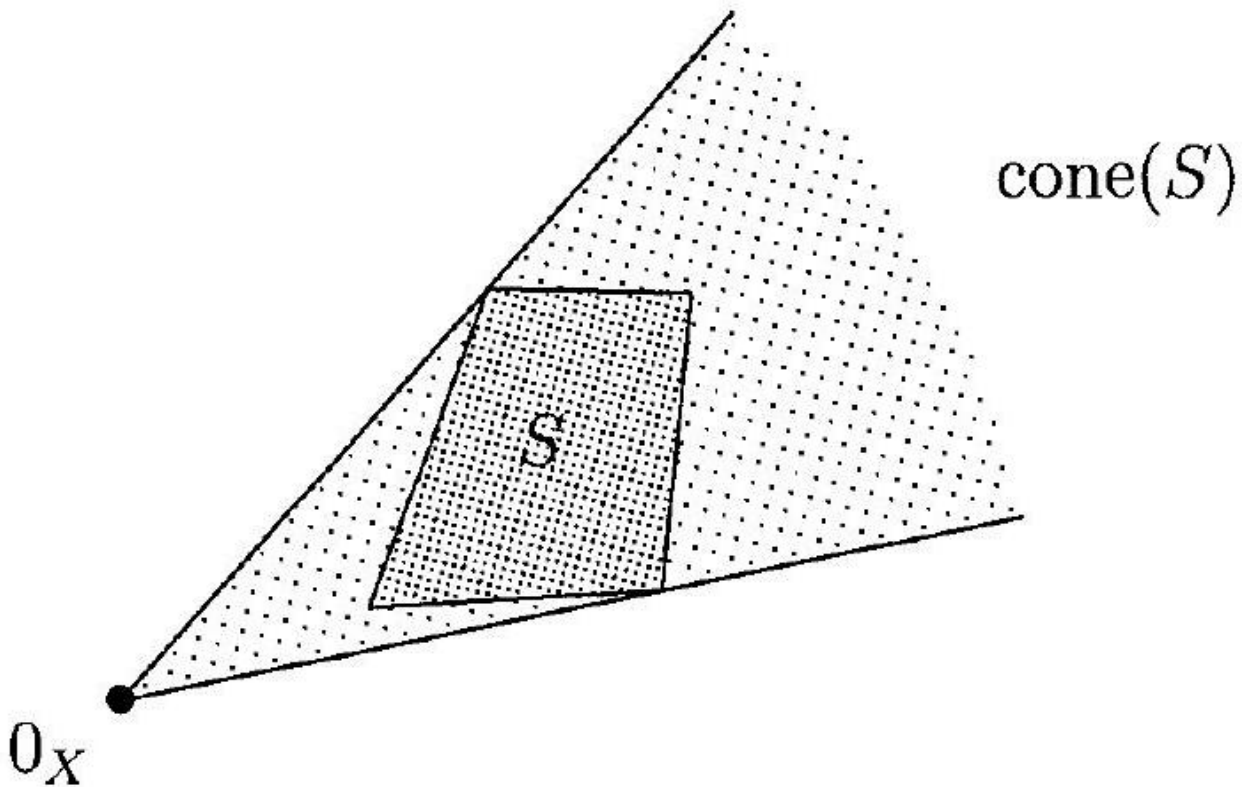


FIGURE 2.2 – Cone engendré par S

Figure 4.3 : Cone genere par S .

Exemple 2.2. (a) Soit $B(0_X, 1)$ la boule unité fermée dans un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$.

Alors, le cône engendré par $B(0_X, 1)$ est égal à l'espace vectoriel X .

(b) Soit S le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors, le cône engendré par S est donné par

$$\text{cone}(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq |x|\}.$$

Passons maintenant aux cônes tangents.

éfinition

Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$.

(a) Soit $\bar{x} \in \text{cl}(S)$ un élément donné. Un vecteur $h \in X$ est appelé vecteur tangent à S en $\bar{x}$ s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

et

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x_n - \bar{x}).$$

(b) L'ensemble $T(S, \bar{x})$ de tous les vecteurs tangents à S en $\bar{x}$ est appelé cône tangent séquentiel de Bouligand¹ à S en $\bar{x}$ ou cône contingent de S en $\bar{x}$.

Remarquons que $\bar{x}$ n'a besoin que d'appartenir à l'adhérence de l'ensemble S dans la définition de $T(S, \bar{x})$. Cependant, nous supposons plus tard que $\bar{x} \in S$.

D'après la définition des vecteurs tangents, il suit immédiatement que le cône contingent est en fait un cône.

Avant d'étudier le cône contingent, nous présentons brièvement la définition du cône tangent de Clarke, qui ne sera pas utilisé davantage dans ce chapitre.

Remarque 2. Soit $\bar{x}$ un élément de l'adhérence d'un sous-ensemble non vide S d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$.

(a) L'ensemble

$$\begin{aligned} T_{Cl}(S, \bar{x}) := \{h \in X \mid & \text{pour toute suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ & \text{d'éléments de } S \text{ avec } \bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \\ & \text{et pour toute suite } (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de réels positifs} \\ & \text{tendant vers } 0, \text{ il existe } \dots\} \end{aligned}$$

1. M.G. Bouligand, « Sur les surfaces dépourvues de points hyperlimites (ou : un théorème d'existence du plan tangent) », Ann. Soc. Polon. Math. 9 (1930) 32–41. F. Severi a noté avoir introduit cette notion de manière indépendante (F. Severi, « Su alcune questioni di topologia infinitesimale », Ann. Soc. Polon. Math. 9 (1930) 97–108).

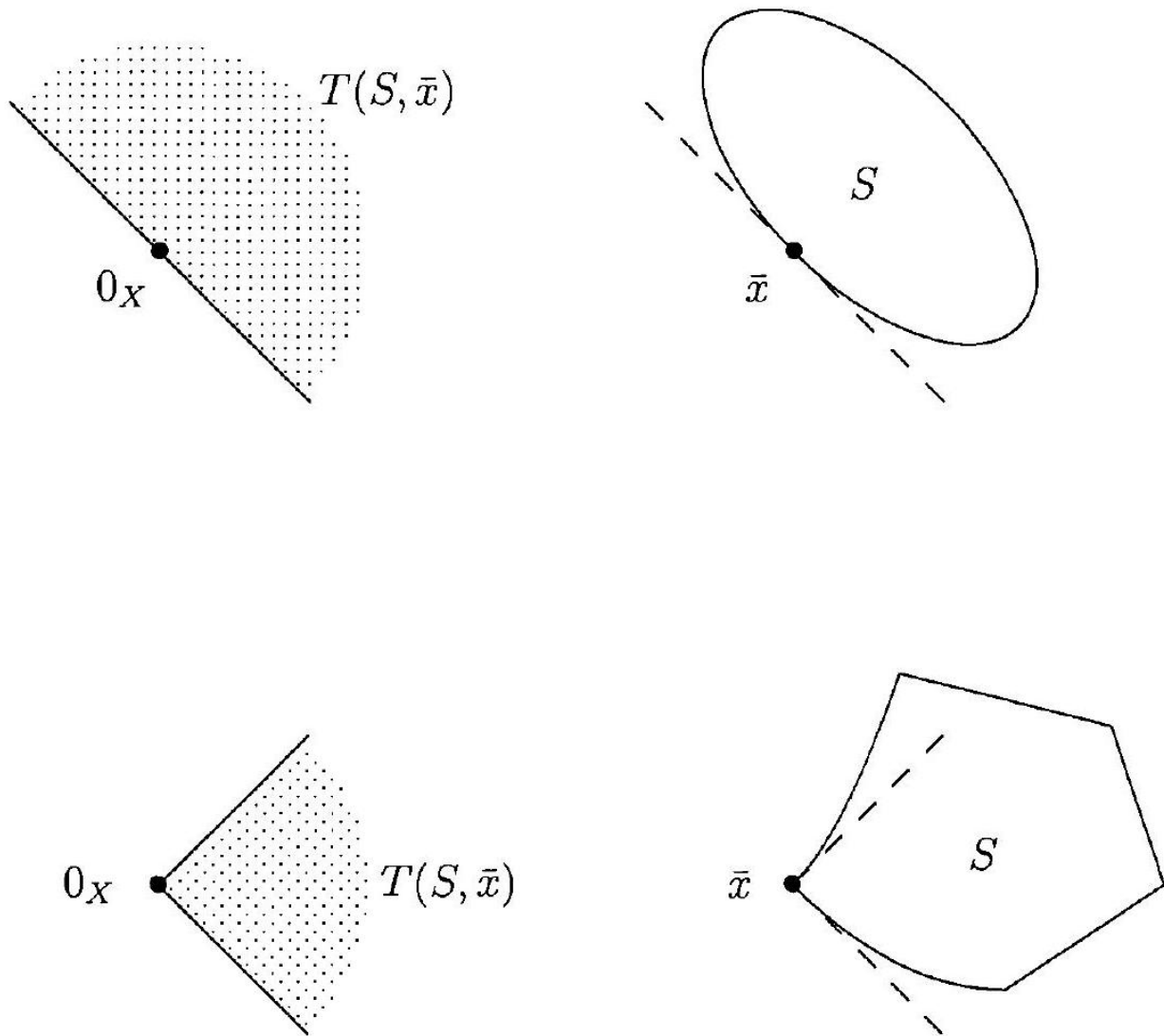


FIGURE 2.3 – Deux exemples de cônes contingents.

Exemple 2.3. (a) Soit $B(0_X, 1)$ la boule unité fermée dans un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$. Alors, le cône engendré par $B(0_X, 1)$ est égal à l'espace vectoriel X .

(b) Soit S le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors, le cône engendré par S est donné par

$$\text{cone}(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq |x|\}.$$

Passons maintenant aux cônes tangents.

Définition 2.1.1. Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$.

(a) Soit $\bar{x} \in \text{cl}(S)$ un élément donné. Un vecteur $h \in X$ est appelé vecteur tangent à S en $\bar{x}$ s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

et

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x_n - \bar{x}).$$

(b) L'ensemble $T(S, \bar{x})$ de tous les vecteurs tangents à S en $\bar{x}$ est appelé cône tangent séquentiel de Bouligand² à S en $\bar{x}$ ou cône contingent de S en $\bar{x}$.

Remarquons que $\bar{x}$ n'a besoin que d'appartenir à l'adhérence de l'ensemble S dans la définition de $T(S, \bar{x})$. Cependant, nous supposerons plus tard que $\bar{x} \in S$.

D'après la définition des vecteurs tangents, il suit immédiatement que le cône contingent est en fait un cône.

Avant d'étudier le cône contingent, nous présentons brièvement la définition du cône tangent de Clarke, qui ne sera pas utilisé davantage dans ce chapitre.

Remarque 3. Soit $\bar{x}$ un élément de l'adhérence d'un sous-ensemble non vide S d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$.

(a) L'ensemble

$$T_{Cl}(S, \bar{x}) := \left\{ h \in X \mid \text{pour toute suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } S \text{ avec } \bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \right.$$

et pour toute suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs tendant vers 0,

il existe une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$,

et $x_n + \lambda_n h_n \in S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\left. \right\}$

est appelée cône tangent (séquentiel) de Clarke à S en $\bar{x}$.

2. M.G. Bouligand, « Sur les surfaces dépourvues de points hyperlimites (ou : un théorème d'existence du plan tangent) », Ann. Soc. Polon. Math. 9 (1930) 32–41. F. Severi a noté avoir introduit cette notion de manière indépendante (F. Severi, « Su alcune questioni di topologia infinitesimale », Ann. Soc. Polon. Math. 9 (1930) 97–108).

(b) Il est évident que le cône tangent de Clarke $T_{Cl}(S, \bar{x})$ est toujours un cône.

(c) Si $\bar{x} \in S$, alors le cône tangent de Clarke $T_{Cl}(S, \bar{x})$ est contenu dans le cône contingent $T(S, \bar{x})$.

Pour la preuve de cette assertion, soit $h \in T_{Cl}(S, \bar{x})$ donné arbitrairement. Nous choisissons alors la suite spéciale $(\bar{x})_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite arbitraire $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs convergeant vers 0. Par conséquent, il existe une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$ et

$$\bar{x} + \lambda_n h_n \in S \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On pose alors

$$y_n := \bar{x} + \lambda_n h_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et

$$t_n := \frac{1}{\lambda_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Il en résulte que

$$y_n \in S \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{x} + \lambda_n h_n) = \bar{x},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(y_n - \bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} (\bar{x} + \lambda_n h_n - \bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h.$$

Par conséquent, h est un vecteur tangent.

Figure 4.5 : Illustration of the result in Remark 4.7, (c).

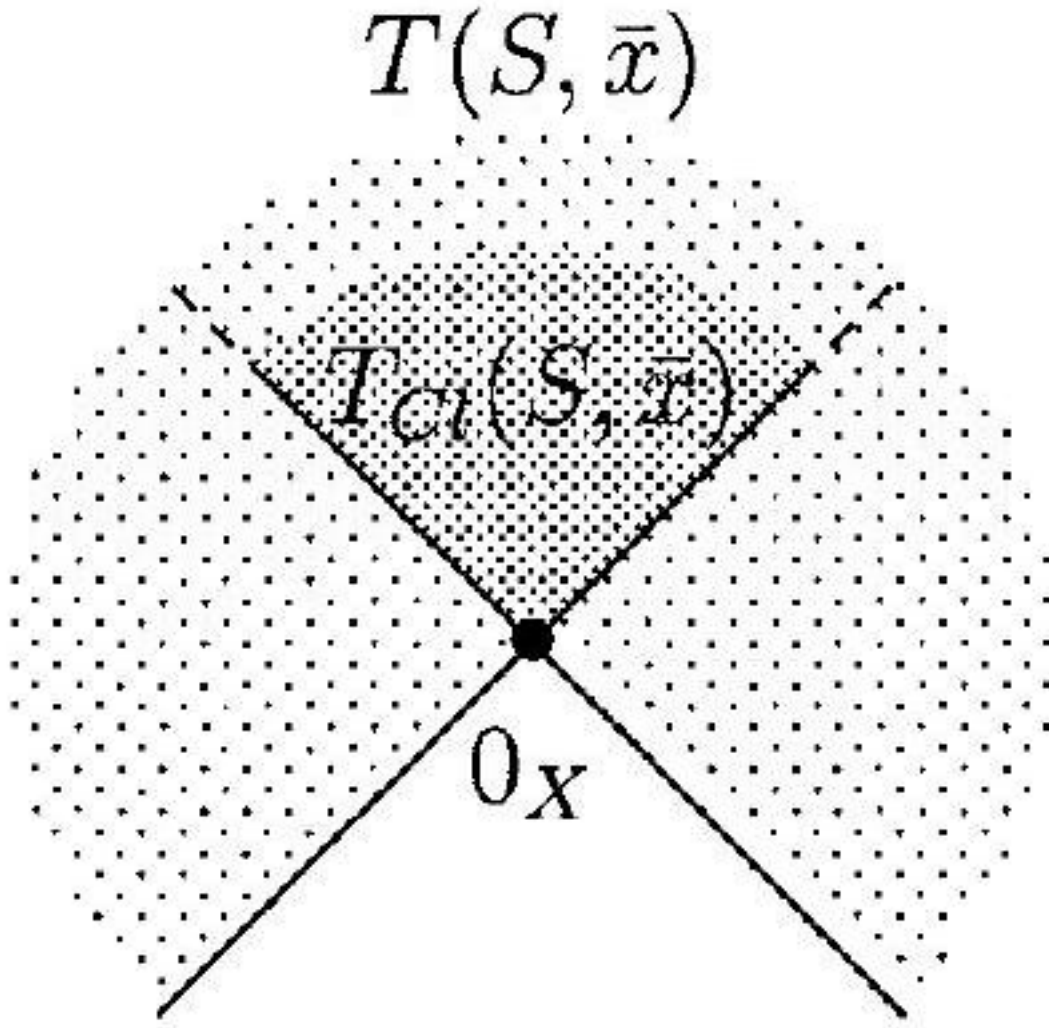
(d) Le cône tangent de Clarke $T_{Cl}(S, \bar{x})$ est toujours un cône convexe fermé. Nous mentionnons ce résultat sans preuve. Notons que cette assertion est vraie sans aucune hypothèse sur l'ensemble S .

Revenons maintenant au cône contingent et étudions la relation entre le cône contingent $T(S, \bar{x})$ et le cône engendré par $S - \{\bar{x}\}$.

Theoreme 2.1.1. Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel. Si S est étoilé (starshaped) par rapport à un certain $\bar{x} \in S$, alors il vient

$$\text{cone}(S - \{\bar{x}\}) \subset T(S, \bar{x}).$$

Preuve. Soit S étoilé par rapport à $\bar{x} \in S$ et soit $x \in S$ arbitraire. On définit la suite

FIGURE 2.4 – Illustration du vecteur tangent h .

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$x_n := \bar{x} + \frac{1}{n}(x - \bar{x}) = \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\bar{x} \in S \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - \bar{x}) = x - \bar{x}.$$

Par conséquent, $x - \bar{x}$ est un vecteur tangent, d'où

$$S - \{\bar{x}\} \subset T(S, \bar{x}).$$

Comme $T(S, \bar{x})$ est un cône, on en déduit

$$\text{cone}(S - \{\bar{x}\}) \subset \text{cone}(T(S, \bar{x})) = T(S, \bar{x}).$$

Theoreme 2.1.2. *Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel. Pour tout $\bar{x} \in S$, on a*

$$T(S, \bar{x}) \subset \text{cl}(\text{cone}(S - \{\bar{x}\})).$$

Preuve. Soit $\bar{x} \in S$ fixé arbitrairement et soit $h \in T(S, \bar{x})$ donné. Par définition, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{et} \quad h = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n (x_n - \bar{x}).$$

La dernière égalité implique

$$h \in \text{cl}(\text{cone}(S - \{\bar{x}\})),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Par les deux théorèmes précédents, on obtient la chaîne d'inclusions suivante pour un ensemble S étoilé par rapport à un certain $\bar{x} \in S$:

$$\text{cone}(S - \{\bar{x}\}) \subset T(S, \bar{x}) \subset \text{cl}(\text{cone}(S - \{\bar{x}\})). \quad (4.2)$$

Theoreme 2.1.3. *Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$. Pour tout $\bar{x} \in S$, le cône contingent $T(S, \bar{x})$ est fermé.*

Preuve. Soit $\bar{x} \in S$ arbitrairement choisi, et soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque de vecteurs tangents à S en $\bar{x}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h \in X.$$

Pour chaque h_n , il existe une suite $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et une suite $(\lambda_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} \quad \text{et} \quad h_n = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{n_i} (x_{n_i} - \bar{x}).$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $i(n) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|x_{n_i} - \bar{x}\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } i \geq i(n)$$

et

$$\|\lambda_{n_i}(x_{n_i} - \bar{x}) - h_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } i \geq i(n).$$

Si l'on définit les suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$y_n := x_{n_{i(n)}} \in S \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et

$$t_n := \lambda_{n_{i(n)}} > 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

alors on obtient $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{x}$ et

$$\begin{aligned} \|t_n(y_n - \bar{x}) - h\| &= \left\| \lambda_{n_{i(n)}}(x_{n_{i(n)}} - \bar{x}) - h_n + h_n - h \right\| \\ &\leq \frac{1}{n} + \|h_n - h\| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(y_n - \bar{x})$$

et h est un vecteur tangent à S en $\bar{x}$.

Puisque la chaîne d'inclusions (4.2) est également valable pour les fermés correspondants, il suit immédiatement, à l'aide du Théorème 4.10 :

Remarque 4. Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel. Si l'ensemble S est étoilé (starshaped) par rapport à un certain $\bar{x} \in S$, alors on a

$$T(S, \bar{x}) = \text{cl}(\text{cone}(S - \{\bar{x}\})).$$

Si l'ensemble S est étoilé par rapport à un certain $\bar{x} \in S$, alors le Corollaire 4.11 affirme essentiellement que pour déterminer le cône contingent de S en $\bar{x}$, il suffit de considérer uniquement les demi-droites partant de $\bar{x}$ et passant par S .

Enfin, nous montrons que le cône contingent d'un ensemble convexe non vide est lui aussi convexe.

Theoreme 2.1.4. Si S est un sous-ensemble convexe non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$, alors le cône contingent $T(S, \bar{x})$ est convexe pour tout $\bar{x} \in S$.

Preuve. Soit $\bar{x} \in S$ arbitrairement choisi, et fixons deux vecteurs tangents arbitraires $h_1, h_2 \in T(S, \bar{x})$ avec $h_1, h_2 \neq 0_X$. Il existe alors des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et des suites $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad h_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x_n - \bar{x}).$$

et

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad h_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(y_n - \bar{x}).$$

Ensuite, nous définissons des suites supplémentaires $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\nu_n := \lambda_n + \mu_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et

$$z_n := \frac{1}{\nu_n} (\lambda_n x_n + \mu_n y_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En raison de la convexité de S , on a

$$z_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n} x_n + \frac{\mu_n}{\lambda_n + \mu_n} y_n \in S \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_n} (\lambda_n x_n + \mu_n y_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu_n} (\lambda_n x_n - \lambda_n \bar{x} + \mu_n y_n - \mu_n \bar{x} + \lambda_n \bar{x} + \mu_n \bar{x}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_n}{\nu_n} (x_n - \bar{x}) + \frac{\mu_n}{\nu_n} (y_n - \bar{x}) + \bar{x} \right) \\ &= \bar{x} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n (z_n - \bar{x}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n x_n + \mu_n y_n - \nu_n \bar{x}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n (x_n - \bar{x}) + \mu_n (y_n - \bar{x})) \\ &= h_1 + h_2. \end{aligned}$$

Il en résulte que $h_1 + h_2 \in T(S, \bar{x})$. Puisque $T(S, \bar{x})$ est un cône, le Théorème 4.3 conduit

à l'assertion.

Remarquons que le cône tangent de Clarke à un ensemble arbitraire non vide S est déjà un cône convexe, tandis que nous avons démontré la convexité du cône contingent seulement sous l'hypothèse que S est convexe.

4.2 Conditions d'optimalité

Dans cette section, nous présentons plusieurs conditions d'optimalité qui résultent de la théorie des cônes contingents.

Par exemple, nous montrons que, pour des problèmes d'optimisation convexe avec un fonctionnel objectif continu, tout point minimal $\bar{x}$ de f sur S peut être caractérisé comme un point minimal de f sur $\{\bar{x}\} + T(S, \bar{x})$.

Theoreme 2.1.5. *Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$, et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ un fonctionnel donné.*

(a) *Si le fonctionnel f est continu et convexe, alors pour tout point minimal $\bar{x} \in S$ de f sur S , il suit :*

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + h) \quad \text{pour tout } h \in T(S, \bar{x}). \quad (4.3)$$

(b) *Si l'ensemble S est étoilé (starshaped) par rapport à un certain $\bar{x} \in S$ et si l'inégalité (4.3) est satisfaite, alors $\bar{x}$ est un point minimal de f sur S .*

Preuve. (a) Soit $\bar{x} \in S$ arbitrairement fixé, et supposons que l'inégalité (4.3) ne soit pas vérifiée. Alors il existe un vecteur $h \in T(S, \bar{x}) \setminus \{0_X\}$ et un réel $\alpha > 0$ tels que

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x} + h) > \alpha > 0 \quad (4.4)$$

Par définition de h , il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

et

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n h_n$$

où

$$h_n := \lambda_n(x_n - \bar{x}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $h \neq 0_X$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0$. Puisque f est convexe et continue, on obtient avec l'inégalité (4.4) pour n suffisamment grand :

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f\left(\frac{1}{\lambda_n}\bar{x} + x_n - \bar{x} + \bar{x} - \frac{1}{\lambda_n}\bar{x}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{\lambda_n}(\bar{x} + h_n) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)\bar{x}\right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n}f(\bar{x} + h_n) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)f(\bar{x}) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n}(f(\bar{x} + h) + \alpha) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)f(\bar{x}) \\ &< \frac{1}{\lambda_n}f(\bar{x}) + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)f(\bar{x}) \\ &= f(\bar{x}). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\bar{x}$ n'est pas un point minimal de f sur S .

(b) Si l'ensemble S est étoilé (starshaped) par rapport à un certain $\bar{x} \in S$, alors il résulte du Théorème 4.8

$$S - \{\bar{x}\} \subset T(S, \bar{x})$$

D'où, en utilisant l'inégalité (4.3),

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + h) \quad \text{pour tout } h \in S - \{\bar{x}\},$$

c'est-à-dire que $\bar{x}$ est un point minimal de f sur S .

En utilisant les dérivées de Fréchet, la condition nécessaire d'optimalité suivante peut être formulée.

Theoreme 2.1.6. *Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$, et soit f un fonctionnel défini sur un ouvert contenant S . Si $\bar{x} \in S$ est un point minimal de f sur S et si f est différentiable au sens de Fréchet en $\bar{x}$, alors il en résulte que*

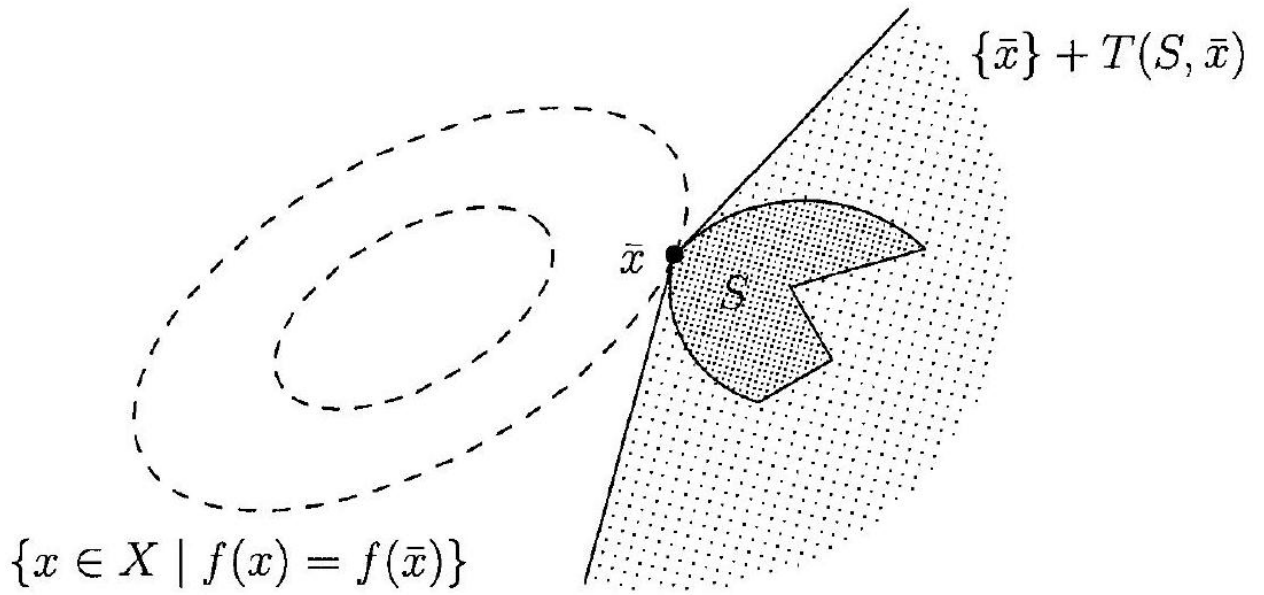


FIGURE 2.5 – Illustration géométrique du résultat du Théorème 4.13.

$$f'(\bar{x})(h) \geq 0 \quad \text{pour tout } h \in T(S, \bar{x}).$$

Preuve. Soit $\bar{x} \in S$ un point minimal de f sur S , et soit un vecteur arbitraire $h \in T(S, \bar{x}) \setminus \{0_X\}$ donné (pour $h = 0_X$, l'assertion est triviale). Alors, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telles que

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

et

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n,$$

où

$$h_n := \lambda_n(x_n - \bar{x}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par définition de la dérivée de Fréchet et en raison du caractère minimal de f en $\bar{x}$, il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
f'(\bar{x})(h) &= f'(\bar{x}) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n (x_n - \bar{x}) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n f'(\bar{x})(x_n - \bar{x}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n [f(x_n) - f(\bar{x}) - (f(x_n) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x_n - \bar{x}))] \\
&\geq - \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n (f(x_n) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x_n - \bar{x})) \\
&= - \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n\| \frac{f(x_n) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(x_n - \bar{x})}{\|x_n - \bar{x}\|} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'assertion est démontrée.

Étudions à présent sous quelles hypothèses la condition du Théorème 4.14 est une condition suffisante d'optimalité. Pour cela, nous définissons les fonctionnels pseudoconvexes.

Définition 2.1.2. Soit S un sous-ensemble non vide d'un espace vectoriel réel, et soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un fonctionnel admettant une dérivée directionnelle en un point $\bar{x} \in S$ dans toute direction $x - \bar{x}$ avec $x \in S$ quelconque. On dit que f est pseudoconvexe en $\bar{x}$ si, pour tout $x \in S$,

$$f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0 \implies f(x) - f(\bar{x}) \geq 0.$$

Exemple 2.4. Les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = xe^x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et

$$g(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

sont pseudoconvexes en tout $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Cependant, ces deux fonctions ne sont pas convexes.

Un lien entre fonctionnels convexes et pseudoconvexes est donné par le théorème suivant.

Theoreme 2.1.7. Soit S un sous-ensemble convexe non vide d'un espace vectoriel réel, et soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un fonctionnel convexe admettant une dérivée directionnelle en un point $\bar{x} \in S$ dans toute direction $x - \bar{x}$ avec $x \in S$ quelconque. Alors f est pseudoconvexe en $\bar{x}$.

Theoreme 2.1.8. Preuve. Soit $x \in S$ fixé arbitrairement. Par convexité de f , on a pour tout $\lambda \in (0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)\bar{x}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(\bar{x}),$$

2.2 Exercices et solutions

1. Soit C un cône convexe dans un espace normé réel avec intérieur non vide $\text{int}(C)$.

Montrer :

$$\text{int}(C) = \text{int}(C) + C.$$

Solution :

- Inclusion directe : soit $x \in \text{int}(C)$ et $c \in C$, alors $x + c \in \text{int}(C) + C$. Donc $\text{int}(C) \subset \text{int}(C) + C$.
- Réciproque : soit $x \in \text{int}(C) + C$, donc $x = y + z$ avec $y \in \text{int}(C)$ et $z \in C$. Comme C est un cône convexe et que l'intérieur d'un convexe est stable par translation dans la direction de C , on a $x \in \text{int}(C)$. Donc $\text{int}(C) + C \subset \text{int}(C)$.

2. Soit X un espace linéaire réel. Prouver qu'un fonctionnel $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est sous-linéaire si et seulement si son épigraphe est un cône convexe.

Solution :

- f sous-linéaire $\Rightarrow$ épigraphe $E(f)$ est un cône convexe :

$$E(f) = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}.$$

Si f est positif homogène et sous-additif, alors pour tous $x_1, x_2 \in X$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$,

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

ce qui montre la convexité de $E(f)$. De plus, $E(f)$ est un cône puisque $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

- Réciproque : si $E(f)$ est un cône convexe, alors

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{pour tout } \lambda > 0, \quad f(0) = 0, \quad f(x + y) \leq f(x) + f(y),$$

donc f est sous-linéaire.

3. Soit S un sous-ensemble convexe non vide d'un espace linéaire réel. Montrer que le cône engendré par S est convexe.

Solution : Soient $x_1 = \lambda_1 s_1$, $x_2 = \lambda_2 s_2$ dans $\text{cone}(S)$, avec $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $s_1, s_2 \in S$. Alors :

$$x_1 + x_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} s_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} s_2 \right),$$

or la combinaison convexe $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} s_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} s_2 \in S$ car S est convexe. Donc $x_1 + x_2 \in \text{cone}(S)$, donc le cône est convexe.

4. Dans $\mathbb{R}^2$, soit l'ensemble

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + y < 1, \quad 2x + y < 4, \quad 0 < x < 3, \quad y > 0\}.$$

Déterminer le cône engendré par S .

Solution : Les contraintes sont linéaires et définissent une région ouverte dans le premier quadrant. Toute direction positive est atteignable via combinaison positive d'éléments de S , donc le cône engendré est $\mathbb{R}^2$.

5. Soit l'ensemble S défini comme dans l'exercice 4.4). Déterminer le cône contingent à S au point $(1, 2)$.

Solution : À partir des contraintes linéaires actives au point $(1, 2)$, on calcule les directions tangentes admissibles. On obtient :

$$T(S, (1, 2)) = \{\lambda(a, -1) \mid \lambda > 0, a \in [-1, 1]\}.$$

6. Soit S' un sous-ensemble non vide d'un espace normé réel $(X, \|\cdot\|)$ avec intérieur non vide. Pour tout $x \in \text{int}(S')$, montrer que $T(S', x) = X$.

Solution : Comme $x \in \text{int}(S')$, il existe une boule $B(x, \varepsilon) \subset S'$. Ainsi, pour toute direction $h \in X$, la demi-droite $x + th$ est incluse dans S' pour t petit. Donc toute direction h appartient au cône tangent, soit $T(S', x) = X$.

7. Soient S_1, S_2 deux sous-ensembles non vides d'un espace normé réel.

(a) $x \in S_1 \subset S_2 \Rightarrow T(S_1, x) \subset T(S_2, x)$ par monotonie du cône tangent.

(b) $x \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow T(S_1 \cap S_2, x) \subset T(S_1, x) \cap T(S_2, x)$ par définition de l'intersection.

8. Soit $x \in S \subset X$. Montrer que le cône tangent s'écrit :

$$T(S, x) = \left\{ h \in X \mid \exists a > 0, \exists r : (0, a] \rightarrow X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{r(t)}{t} = 0, \text{ et } \exists (t_n) \rightarrow 0^+, x + t_n h + r(t_n) \in S \right\}.$$

Solution : Ceci est une reformulation équivalente de la définition du cône tangent utilisant une perturbation infinitésimale $r(t)$ pour permettre une approximation plus fine des directions tangentes à S au point x .

9. Montrer que le cône tangent de Clarke $T_c(S, x)$ est fermé et convexe.

Solution : Le cône tangent de Clarke est défini comme la fermeture des directions tangentes généralisées. Le Théorème 2.4.5 et la Proposition 2.2.1 montrent que $T_c(S, x)$ est à la fois fermé et convexe, car il est défini par des limites supérieures de directions tangentes classiques.

10. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, est-elle pseudoconvexe ?

Solution : À $x = 0$, le gradient $\nabla f(0) = 0$, mais il existe des directions d telles que $f(x + td) > f(0)$ pour $t > 0$. Ainsi, f n'est pas pseudoconvexe à $x = 0$.

2.3 Théorème de Nagumo

Soit donnée une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

Nous supposons que, dans le domaine $|x - x_0| \leq l, |y - y_0| \leq k$, que nous noterons par B , la fonction $f(x, y)$ est continue et qu'il existe un nombre positif suffisamment petit ε pour lequel, dans B , l'inégalité suivante

$$\frac{x - x_0}{y_2 - y_1} \{f(x, y_2) - f(x, y_1)\} < 1 \quad (2)$$

est toujours satisfaite lorsque $0 < |x - x_0| \leq \varepsilon$, $y_1 \neq y_2$, $|y_i - y_0| \leq M\varepsilon$, ($i = 1, 2$), où M désigne le maximum de $|f(x, y)|$ dans B .

Nous montrons alors que cette hypothèse implique l'unicité de la solution de (1) avec les conditions initiales $x = x_0$, $y = y_0$, au moins sur l'intervalle $|x - x_0| \leq \varepsilon$.

Nous ne donnons la preuve que pour le cas où $x - x_0 \geq 0$, car dans l'autre cas, la démonstration est tout à fait analogue.

Supposons, en effet, qu'il existe deux solutions différentes $y_1(x)$ et $y_2(x)$ passant par $(x = x_0, y = y_0)$ pour $|x - x_0| \leq \varepsilon$. Alors, il existe au moins une valeur $x = x_1$, avec $x_0 < x_1 \leq x_0 + \varepsilon$, telle que $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. Nous pouvons supposer que $y_2(x_1) > y_1(x_1)$. Pour $x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon$, on a aussi $|y_i - y_0| \leq M\varepsilon$ pour $i = 1, 2$.

D'après (2), on obtient :

$$f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1) < \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0}$$

et d'après (1),

$$\left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} \right)_{x=x_1} < \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} \quad (I)$$

Posons :

$$F(x) = y_2(x) - y_1(x), \quad \xi(x) = \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Pour ces fonctions, les relations suivantes sont valables :

$$\begin{aligned} F(x_0) &= 0 \\ F'(x) &= \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_2) - f(x, y_1) \\ F'(x_0) &= 0 \\ \xi(x_0) &= 0 \\ \xi'(x) &= \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} > 0 \\ F'(x_1) &= \xi(x_1) \end{aligned}$$

Il suit de $\xi'(x_0) > F'(x_0)$ qu'il existe une valeur h_0 suffisamment proche de x_0 telle que :

$$\begin{aligned} x &= x', \quad x_0 < x' < x_1 \\ \xi(x') &> F'(x') \\ \xi(x') - F'(x') &> 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Mais (2') nous montre que $\xi'(x_1) > F'(x_1)$, et puisque $\xi(x_1) = F(x_1)$, il existe une valeur $x = x''$, avec $x' < x'' < x_1$ suffisamment proche de x_1 pour laquelle l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\xi(x'') - F(x'') < 0$$

Comme $F(x)$ et $\xi(x)$ sont continues, on en déduit d'après (3) et (4) qu'il existe au moins une valeur $\bar{x}$ entre x' et x'' telle que

$$F(\bar{x}) = \xi(\bar{x})$$

Soit $\bar{x}$ la plus grande de ces valeurs, alors on doit avoir

$$F'(\bar{x}) = \xi(\bar{x})$$

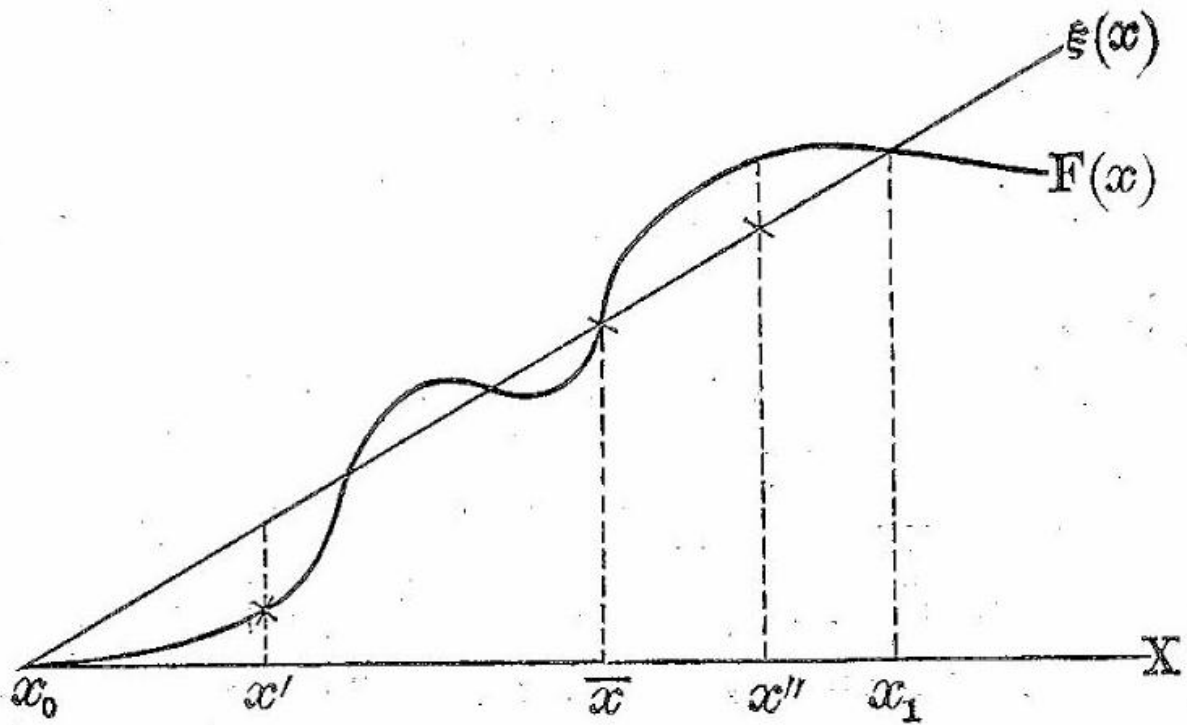


Fig. 1 $F'(\bar{x}) = \xi(\bar{x})$ et

$$F'(\bar{x}) \geq \xi'(\bar{x}) \quad (5)$$

Or,

$$\begin{aligned} \xi'(\bar{x}) &= \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} \cdot \frac{\bar{x} - x_0}{\bar{x} - x_0} = \frac{\xi(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} = \frac{F'(\bar{x})}{\bar{x} - x_0}, \\ &= \frac{y_2(\bar{x}) - y_1(\bar{x})}{\bar{x} - x_0}, \\ F'(\bar{x}) &= f(\bar{x}, y_2(\bar{x})) - f(\bar{x}, y_1(\bar{x})). \end{aligned}$$

Et d'autre part, il suit de (5) que

$$\begin{cases} f(\bar{x}, y_2(\bar{x})) - f(\bar{x}, y_1(\bar{x})) \geq \frac{y_2(\bar{x}) - y_1(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} (> 0), \\ \text{c'est-à-dire} \quad \left(\frac{\bar{x} - x_0}{y_2 - y_1} \right)_{x=\bar{x}} \{f(\bar{x}, y_2) - f(\bar{x}, y_1)\} \geq 1, \end{cases}$$

ce qui est en contradiction avec (2). Ce qu'il fallait démontrer.

2.3 Remarques

1. La formule (2) contient la condition de Lipschitz comme cas particulier, car la valeur absolue de

$$\frac{x - x_0}{y_2 - y_1} \{f(x, y_2) - f(x, y_1)\}$$

devient arbitrairement petite quand $|x - x_0|$ devient très petit.

- 2) Comme $f(x, y)$ est continue dans B , il existe pour tout petit nombre positif η un nombre positif ε tel que

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \eta$$

soit vrai dans le domaine

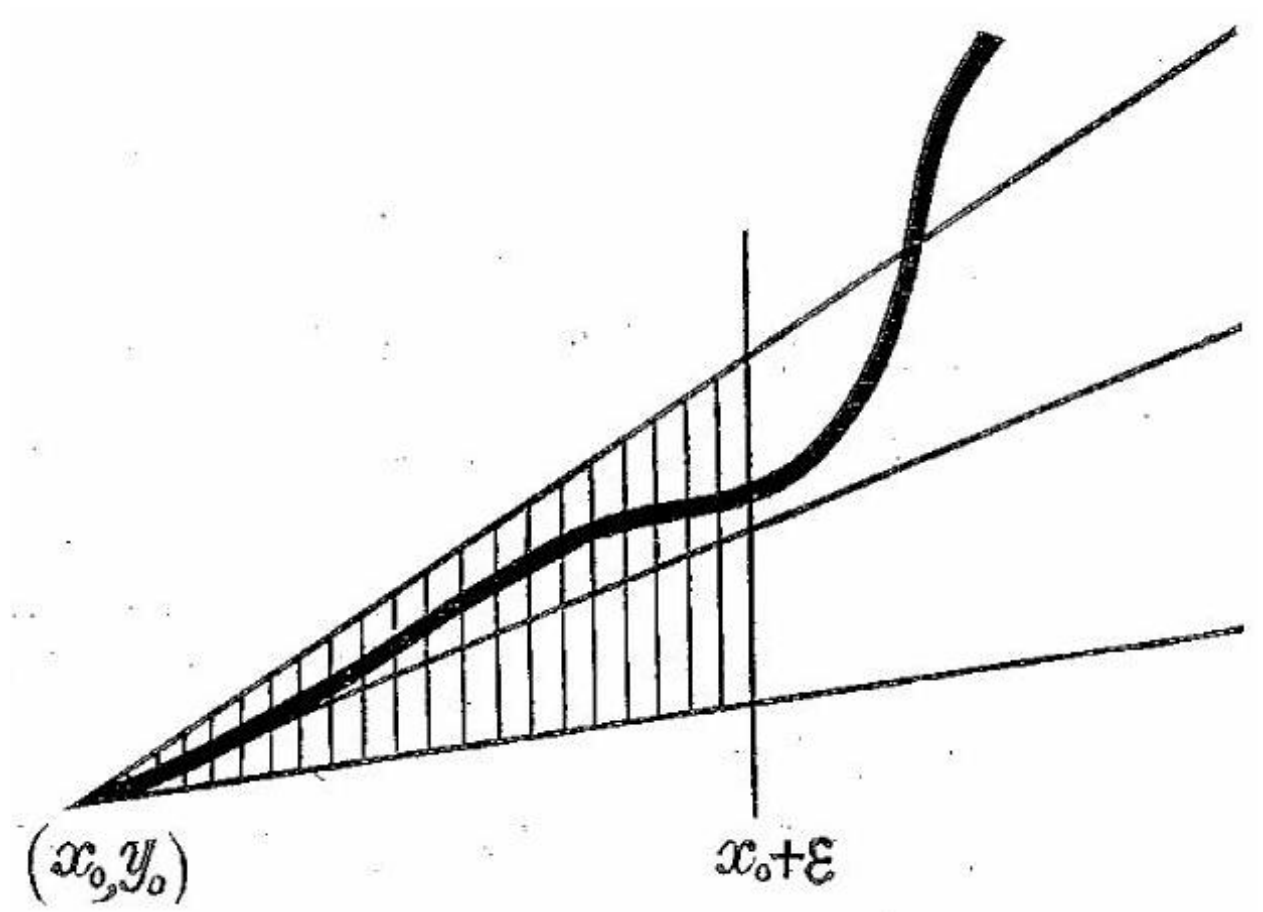
$$|x - x_0| \leq \varepsilon, \quad |y - y_0| \leq M\varepsilon$$

Alors, pour toute solution de (1) passant par le point (x_0, y_0) ,

$$y = y_0 + \{f(x_0, y_0) + \delta\}(x - x_0)$$

dans $|x - x_0| \leq \varepsilon$, où $|\delta| < \eta$.

Ainsi, au lieu de (2), pour $|x - x_0| \leq \varepsilon$ et $|\delta_i| < \eta$, on peut toujours poser

Fig. 2 ($i = 1, 2$)

$$\frac{f(x, y_0 + (f(x_0, y_0) + \delta_2)(x - x_0)) - f(x, y_0 + (f(x_0, y_0) + \delta_1)(x - x_0))}{\delta_2 - \delta_1} < 1$$

3. S'il existe une solution $\tilde{y}(x)$ de (1) passant par $(x = x_0, y = y_0)$, alors on peut remplacer dans (2) y_1 par la solution $\tilde{y}(x)$.

2.3 Exemples

I.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^3y}{x^4 + y^2} \quad (m \text{ constante } \neq 0)$$

On a

$$\left| \frac{mx^3y}{x^4 + y^2} \right| \leq \left| \frac{mx}{2} \right| \quad \text{car} \quad |2x^2y| \leq x^4 + y^2$$

Ainsi, $\frac{dy}{dx}$ est continue en tout point (x, y) , et satisfait la condition de Lipschitz partout sauf dans un petit voisinage de $(0, 0)$.

En effet :

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = \left| \frac{mx^3}{(x^4 + y_2^2)(x^4 + y_1^2)} (x^4(y_2 - y_1) + y_1 y_2 (y_1 - y_2)) \right|$$

Posons $y_1 = 0$, on obtient

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = \left| \frac{mx^3}{x^4 + y_2^2} \right| \cdot |y_2 - y_1|$$

où $\left| \frac{mx^3}{x^4 + y_2^2} \right|$ peut devenir arbitrairement grand dans tout petit voisinage de $(0, 0)$.

Le membre de gauche de (2) s'écrit alors, pour ce cas où $x_0 = 0, y_0 = 0$:

$$\frac{x}{y_2 - y_1} \left(\frac{mx^3 y_2}{x^4 + y_2^2} - \frac{mx^3 y_1}{x^4 + y_1^2} \right) = \frac{mx^4 (x^4 - y_1 y_2)}{(x^4 + y_2^2)(x^4 + y_1^2)}.$$

2.3.1 Exemple de Lavrentieff sur l'unicité des solutions d'une équation différentielle

Pour ces fonctions, les relations suivantes sont valables :

$$\begin{aligned} F(x_0) &= 0 \\ F'(x) &= \frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_2) - f(x, y_1) \\ F'(x_0) &= 0 \\ \xi(x_0) &= 0 \\ \xi'(x) &= \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} > 0 \\ F'(x_1) &= \xi(x_1) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\xi'(x_0) > F'(x_0)$, donc pour une valeur x' proche de x_0 , on a :

$$\begin{aligned}
x &= x', \quad x_0 < x' < x_1 \\
\xi(x') &> F'(x') \\
\xi(x') - F'(x') &> 0
\end{aligned} \tag{3}$$

Mais (2') montre que $\xi'(x_1) > F'(x_1)$, et puisque $\xi(x_1) = F(x_1)$, il existe une valeur x'' proche de x_1 , avec $x' < x'' < x_1$, telle que :

$$\xi(x'') - F(x'') < 0$$

Comme $F(x)$ et $\xi(x)$ sont continues, il existe, d'après (3) et (4), au moins une valeur x entre x' et x'' telle que :

$$F(x) = \xi(x)$$

Soit $\bar{x}$ la plus grande de ces valeurs. On a alors :

$$F'(\bar{x}) = \xi(\bar{x})$$

$$F'(\bar{x}) \geq \xi'(\bar{x}) \tag{5}$$

Mais :

$$\begin{aligned}
\xi'(\bar{x}) &= \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{y_2(x_1) - y_1(x_1)}{x_1 - x_0} \cdot \frac{\bar{x} - x_0}{\bar{x} - x_0} = \frac{\xi(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} \\
&= \frac{F'(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} = \frac{y_2(\bar{x}) - y_1(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} \\
F'(\bar{x}) &= f(\bar{x}, y_2(\bar{x})) - f(\bar{x}, y_1(\bar{x}))
\end{aligned}$$

Donc, à partir de (5), on a :

$$f(\bar{x}, y_2(\bar{x})) - f(\bar{x}, y_1(\bar{x})) \geq \frac{y_2(\bar{x}) - y_1(\bar{x})}{\bar{x} - x_0} (> 0),$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\bar{x} - x_0}{y_2 - y_1} \right)_{x=\bar{x}} \{f(\bar{x}, y_2) - f(\bar{x}, y_1)\} \geq 1,$$

ce qui contredit (2). C.Q.F.D.

2.3.2 Remarques et discussions

1. La formule (2) contient la condition de Lipschitz comme un cas particulier, car la valeur absolue de :

$$\frac{x - x_0}{y_2 - y_1} \{f(x, y_2) - f(x, y_1)\}$$

devient arbitrairement petite lorsque $|x - x_0|$ tend vers zéro.

2. Étant donné que $f(x, y)$ est continue dans B , il existe pour un $\eta > 0$ une valeur $\varepsilon > 0$ telle que :

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \eta$$

lorsque :

$$|x - x_0| \leq \varepsilon, \quad |y - y_0| \leq M\varepsilon.$$

Alors pour toute solution de (1) passant par le point (x_0, y_0) , on a :

$$y = y_0 + \{f(x_0, y_0) + \delta\}(x - x_0), \quad \text{où } |\delta| < \eta.$$

Ainsi, au lieu de (2), pour $|x - x_0| \leq \varepsilon$ et $|\delta_i| < \eta$, on peut écrire :

$$\frac{f\{x_0, y_0 + (f(x_0, y_0) + \delta_2)(x - x_0)\} - f\{x_0, y_0 + (f(x_0, y_0) + \delta_1)(x - x_0)\}}{\delta_2 - \delta_1} < 1$$

(pour $i = 1, 2$)

3. Si une solution $\tilde{y}(x)$ de (1) passant par (x_0, y_0) existe, on peut utiliser cette solution comme y_1 dans (2).

2.3.3 Exemples et clarification

I. Considérons :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^3y}{x^4 + y^2} \quad (m \text{ constant})$$

On a :

$$\left| \frac{mx^3y}{x^4 + y^2} \right| \leq \left| \frac{mx}{2} \right|, \quad \text{car } |2x^2y| \leq x^4 + y^2$$

Ainsi $\frac{dy}{dx}$ est continue en tout point (x, y) et satisfait la condition de Lipschitz partout sauf dans un voisinage de $x = 0, y = 0$.

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = \left| \frac{mx^3}{(x^4 + y_2^2)(x^4 + y_1^2)} (x^4(y_2 - y_1) + y_1y_2(y_1 - y_2)) \right|$$

En posant $y_1 = 0$, on obtient :

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = \left| \frac{mx^3}{x^4 + y_2^2} \right| \cdot |y_2 - y_1|$$

Cette expression peut devenir arbitrairement grande dans un voisinage de $x = 0, y = 0$.

II. *Lavrentieff a proposé l'équation différentielle :*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{6}$$

avec $f(x, y)$ continue sur $B = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, et dont les solutions ont des points de branchement partout denses dans B .

Une légère modification de l'exemple de Lavrentieff donne une équation :

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{7}$$

avec $F(x, y)$ continue dans $B_0 = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, les points de branchement y sont aussi denses, mais $y = 0$ est la seule solution passant par (x_0, y_0) .

En divisant B_0 en bandes B_n délimitées par $y = \frac{1}{2^n}$, on définit :

$$F(x, y) = \frac{f(x, y^* - 1)}{2^n} \quad \text{dans } B_n$$

Ainsi, $F(x, y)$ est continue, $F(x, 0) = 0$, et :

$$|F(x, y)| \leq \frac{M}{2^n} \leq M_y$$

Et pour un x_0 quelconque, l'inégalité :

$$\left| \frac{(x - x_0)F(x, y_2)}{y_2} \right| \leq |x - x_0|M$$

est satisfaite pour $|x - x_0|$ suffisamment petit, ce qui prouve que $y = 0$ est l'unique solution. Pourtant, les points de branchement sont denses dans B_0 . C.Q.F.D.

2.4 Exercices et solutions

Exercice 1 Considérons l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0.$$

1. Montrer que f n'est pas lipschitzienne en y au voisinage de $y = 0$.
2. Vérifier si le théorème classique de Cauchy-Lipschitz peut être appliqué.
3. Étudier si le théorème de Nagumo permet de garantir l'unicité de la solution.

Solution

(1) $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ n'est pas lipschitzienne :

$$|\sqrt{y_2} - \sqrt{y_1}| = \frac{|y_2 - y_1|}{\sqrt{y_2} + \sqrt{y_1}},$$

qui devient non borné lorsque $y_1, y_2 \rightarrow 0$. Donc f n'est pas lipschitzienne au voisinage de $y = 0$.

(2) Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne peut donc pas être appliqué.

(3) Pour Nagumo :

$$\left| \frac{f(\tilde{y}) - f(0)}{\tilde{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\tilde{y}}}.$$

On doit avoir :

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{y}}} \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow \tilde{y} \geq x^2.$$

Mais ce n'est pas vrai en général, donc Nagumo ne garantit pas l'unicité. En effet, l'équation admet une infinité de solutions passant par $(0, 0)$:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a, \\ \frac{1}{4}(x - a)^2 & \text{si } x \geq a, \end{cases} \quad a \geq 0.$$

Exercice 2

Considérons l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln(1 + |y|), \quad y(0) = 0.$$

1. Montrer que $f(y) = y \ln(1 + |y|)$ n'est pas lipschitzienne près de $y = 0$.
2. Vérifier si elle satisfait une condition de Nagumo.
3. Conclure sur l'unicité de la solution.

Solution (1) Dérivée de f :

$$f'(y) = \ln(1 + |y|) + \frac{y}{1 + |y|},$$

non bornée globalement. Donc f n'est pas lipschitzienne.

(2) Pour petits y , $\ln(1 + |y|) \approx |y|$, donc $f(y) \approx y^2$. Alors :

$$\left| \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1} \right| \leq C_\varepsilon \leq \frac{1}{|x|} \text{ pour } |x| \text{ petit.}$$

Donc la condition de Nagumo est satisfaite localement.

(3) Conclusion : l'unicité est garantie par le théorème de Nagumo au voisinage de $(0, 0)$.