

Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

Contents

1.1	Notion de solution, type de solutions (solution locale, maximale, globale et saturée).	1
1.2	Théorème de Cauchy - Lipschitz	3
1.3	Etude qualitative des EDO's n dimension finie	5
1.4	Explications et indications de preuve	8
1.5	Etude qualitative des systèmes différentiels non linéaires autonomes	10
1.6	Affinement du protocole	16
1.7	Exercices	17
1.8	Exercices supplémentaires	24
1.9	Seconde feuille d'exercices	27
1.10	Unicité des solutions	29
1.11	Lemme de Gronwall et inégalités différentielles	31
1.12	EDO et symétries	31
1.13	Équations différentielles particulières	33
1.14	Infusion de glucose dans le sang	33

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques définitions et théorèmes qui seront utilisés dans la suite

1.1 Notion de solution, type de solutions (solution locale, maximale, globale et saturée).

1.1.1 Définitions et généralités

Définition 1.1.1. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), et $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

On appelle équation différentielle (EDO) du premier ordre associée à f l'équation suivante :

$$X' = f(t, X) \quad (1.1)$$

Une solution d'EDO (1.1) est un couple (J, X) où $J \subset I$ est un intervalle (d'intérieur non vide) et $X : J \longrightarrow \Omega \in \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que, pour tout $t \in J$ on a

$$X'(t) = f(t, X(t))$$

Définition 1.1.2.

Soient (J_1, X_1) et (J_2, X_2) deux solutions. On dit que (J_2, X_2) est un prolongement de (J_1, X_1) si

$$J_1 \subset J_2 \text{ et } X_1 = X_2 \text{ sur } J_1.$$

- On dit que (J, X) est une solution maximale si elle n'est pas (strictement) prolongeable.
- On dit que (J, X) est une solution globale si $J = I$.

Pour $t_0 \in I$ et $X_0 \in \Omega$, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Une solution du problème de Cauchy (1.2) est un couple (J, X) où $J \subset I$ est un intervalle (d'intérieur non vide) contenant t_0 et $X : J \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que, pour tout $t \in J$ on ait $X'(t) = f(t, X(t))$ et $X(t_0) = X_0$.

Définition 1.1.3.

Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$, avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), et $p \geq 1$.

On dit que f est lipschitzienne par rapport à la variable d'état X sur $I \times \Omega$ si on peut trouver un réel $k \geq 0$ tel que

$$\|f(t, X_1) - f(t, X_2)\| \leq k \|X_1 - X_2\|, \quad \forall t \in I, \forall (X_1, X_2) \in \Omega^2.$$

On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable X sur $I \times \Omega$ si pour tout point (t_0, X_0) dans $I \times \Omega$ on peut trouver un voisinage de ce point tel que f soit lipschitzienne par rapport à la variable X sur ce voisinage : pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \Omega$, il existe $\varepsilon = \varepsilon_{(t_0, X_0)} > 0$ et $k = k_{(t_0, X_0)} \geq 0$ tels que

$$\|f(t, X_1) - f(t, X_2)\| \leq k \|X_1 - X_2\|, \quad \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, \forall (X_1, X_2) \in B(X_0, \varepsilon).$$

Dans la suite, nous présentons un théorème qui représente le clé pour démontrer l'existence et l'unicité du problème de Cauchy.

1.2 Théorème de Cauchy - Lipschitz

Theoreme 1.2.1. (Cauchy-Lipschitz)

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $X_0 \in \Omega$. Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à X sur $I \times \Omega$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale (J, X) , et J est un intervalle ouvert. De plus, cette solution est de classe C^1 sur J .

Exemple 1.1.

Soit le problème de Cauchy :

$$(E) : \begin{cases} X'(t) = t^2 + X^2 \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

— Montrer que (E) une unique solution maximale X définie sur un intervalle J

Solution

On a : $f(t, X) = t^2 + X^2$ et

$$X'(t) = f(t, X(t)) = t^2 + X(t)^2$$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, X) \longrightarrow f(t, x) = t^2 + X^2$$

f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et localement lipschitzienne en X , en effet :

- $\frac{\partial f}{\partial X} = 2X$ continue.
- $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

d'après la théorème de Cauchy Lipschitz, le problème (E) admet une unique solution maximale, X définie sur $J \subset \mathbb{R}$ et $0 \in J$

Voici quelques conséquences de ce théorème :

Lemme 1.1. (Existence locale)

Il existe $\varepsilon > 0$ et $X : \underbrace{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}_{=: J} \rightarrow \Omega$ tel que (J, X) est solution de problème de Cauchy.

Lemme 1.2. (Unicité locale)

Si $(\tilde{J}, \tilde{X})$ est une autre solution du problème de Cauchy, alors il existe $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ tel que $\tilde{X} \equiv X$ sur $]t_0 - \tilde{\varepsilon}, t_0 + \tilde{\varepsilon}[$.

Lemme 1.3. (Unicité, du local vers le maximal)

Si (J_1, X_1) et (J_2, X_2) sont deux solutions du problème de Cauchy avec J_1 et J_2 ouverts, alors $X_1 \equiv X_2$ sur $J_1 \cap J_2$.

1.2.1 Explosion en temps fini

Le Théorème 1.2.1 de Cauchy Lipschitz fournit une solution maximale définie sur $J \subset I$ et est donc un résultat local : rien n'indique que la solution maximale est globale.

Exemple 1.2. (Solution non globale)

La solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

se calcule, $x(t) = \frac{1}{1-t}$, et n'est définie que sur $] -\infty, 1[$. On a explosion en temps fini : $x(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow 1^-$, voir Figure 1.1.

Theoreme 1.2.2. (*Explosion en temps fini*) Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état X . Soit $(J =]\alpha, \beta[, X)$ une solution maximale de $X' = f(t, X)$. Alors

1. Si $\beta < \sup I$ alors $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \|X(t)\| = +\infty$.
2. Si $\inf I < \alpha$ alors $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \|X(t)\| = +\infty$.

Theoreme 1.2.3. (*de Cauchy Lipschitz global*)

Si $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et (globalement) lipschitzienne par rapport à X , alors les solutions maximales de $X' = f(t, X)$ sont globales.

Signalons enfin que, lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ la notion d'explosion en temps fini est remplacée par la notion de "sortie de tout compact en temps fini".

Theoreme 1.2.4. (*Sortie de tout compact*)

Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état X . Soit $(J =]\alpha, \beta[, X)$ une solution maximale de $X' = f(t, X)$. Alors

1. Si $\beta < \sup I$ alors X sort de tout compact de Ω au voisinage de β : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$X(t) \notin K, \forall t \in]\beta - \varepsilon, \beta[.$$

2. Si $\inf I < \alpha$ alors conclusion "similaire".

1.3 Etude qualitative des EDO's n dimension finie

Ici on considère le système différentiel linéaire à coefficient constant suivant :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (4.4.1)$$

Ici $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ et A est une matrice inversible à coefficients constants et réels.

L'allure des trajectoires (ou orbites) du système dépendent de la nature des valeurs propres de la matrice A . On trouvera ci-dessous, dans chacun des cas, l'allure des trajectoires ainsi que le nom attribué à l'unique point stationnaire qui est zéro.

Cas 1. A admet deux valeurs propres réelles distinctes λ_1, λ_2

— — Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, alors l'origine est un nœud stable,

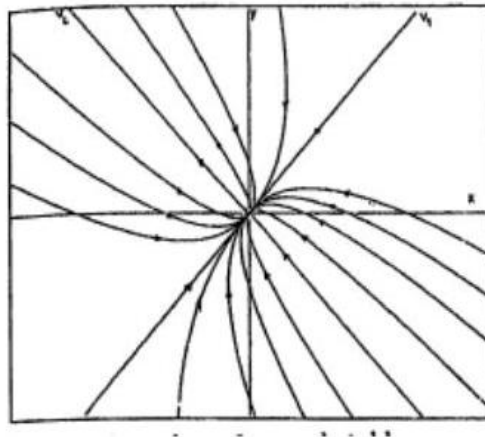
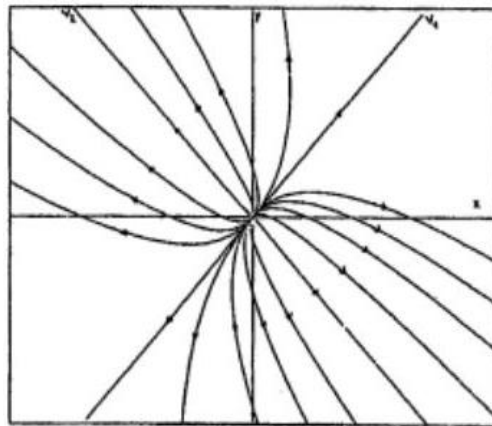
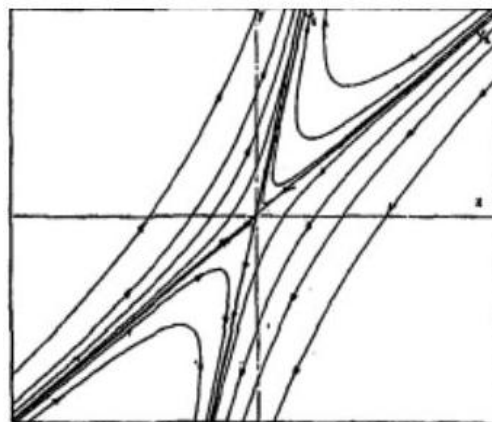


FIGURE 1.1 – Your caption here.

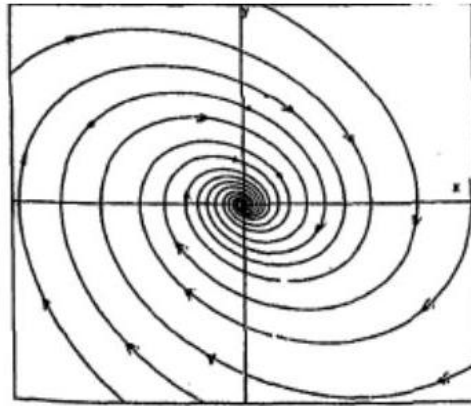
— • Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, alors l'origine est un nœud instable.



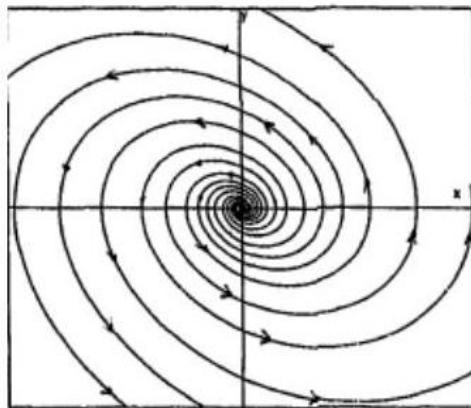
— — Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, alors l'origine est un point sel (ou col).



Cas 2. A admet deux valeurs propres non réelles, conjuguées $\lambda = \alpha \pm i\beta$ - Si $\text{Re } \lambda < 0$, alors l'origine est un foyer stable

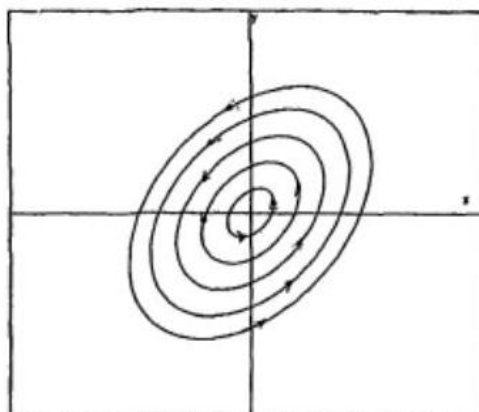


— — Si $\operatorname{Re} \lambda > 0$, alors l'origine est foyer instable



— Si $\operatorname{Re} \lambda = 0$, alors l'origine est un point centre.

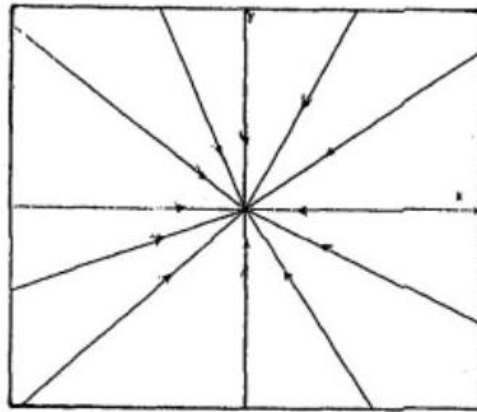
[h !]



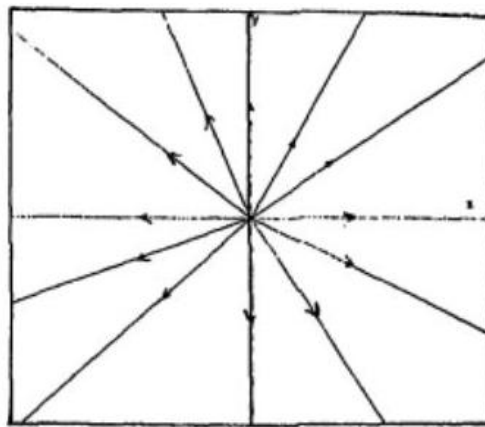
Cas 3. A admet une valeur propre réelle double λ - Si $\lambda < 0$, $\dim E_\lambda = 2$, alors l'origine est un puit

[h !]

— — Si $\lambda > 0$ et $\dim E_\lambda = 2$, alors l'origine est une source.

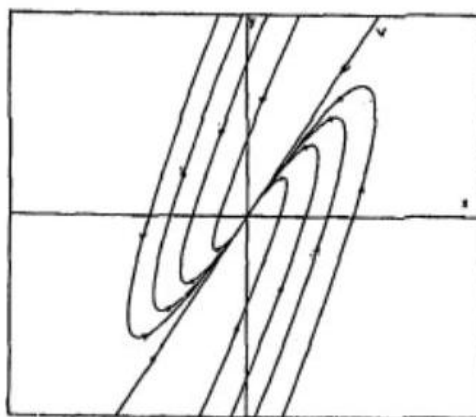


[h.]



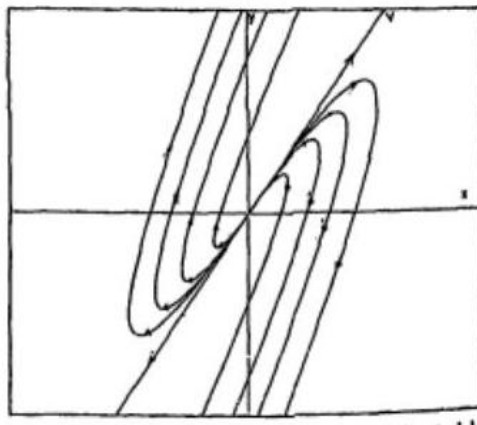
— — Si $\lambda < 0$ et $\dim E_\lambda = 1$, alors l'origine est un nœud dégénéré stable

[h.]



— Si $\lambda > 0$ et $\dim E_\lambda = 1$, alors l'origine est un nœud dégénéré instable

[h.]



Dans tous ces dessins le sens des flèches désigne le sens des t croissants (de $-\infty$ à $+\infty$, c'est à dire le sens dans lequel le point $x(t)$ se déplace lorsque t croît de $-\infty$ à $+\infty$).

Donnons une indication de preuve du premier cas, c'est à dire A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 réelles :

Soient v_1 et v_2 deux vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . Ils forment une base de $\mathbb{R}^2$, soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2) . Si on note $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, alors les coordonnées d'un point dans ces deux bases, on a : $x = Py$.

D'autre part on sait que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ alors le système d'EDO $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}(Py(t)) \\ &= P\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) \\ &= Ax(t) \\ &= APy(t) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= P^{-1}APy(t) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y(t) \end{aligned}$$

où $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$. Cela est équivalent aux deux EDO :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \end{cases}$$

D'où les solutions sont les fonctions :

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

pour toutes les valeurs de $(y_1(0), y_2(0)) \neq (0, 0)$.

Remarque 23. Les trajectoires décrites dans les figures précédentes sont les courbes données en coordonnées paramétriques par $y_1 = y_0 e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = y_0 e^{\lambda_2 t}$.

Ces courbes $(y_1(t), y_2(t))$ sont tangentes au vecteur propre correspondant à la valeur propre de plus petit module et elles ont une direction parabolique dans la direction du vecteur propre correspondant à la valeur propre de plus grand module (Pour cela il faut examiner $\frac{y_1}{y_2}$).

1.5 Etude qualitative des systèmes différentiels non linéaires autonomes

Supposons que l'origine est un point d'équilibre pour le système différentiel non linéaire autonome :

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) \quad (4.4.2)$$

Comme $f(0) = 0$ on peut écrire pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + df_x(0) \cdot x + g(x) \\ &= df_x(0) \cdot x + f(x) \end{aligned}$$

ici $df_x(0)$ est la différentielle (ou la jacobienne) de f à l'origine et g est une fonction de classe C^1 qui vérifie

$$g(x) = o(\|x\|); \|x\| \longrightarrow 0$$

Alors, on peut écrire le système différentiel comme suit

$$\frac{d}{dt}x(t) = df_x(0) \cdot x(t) + g(x(t)) \quad (4.4.3)$$

où

$$g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), g(x) = 0(\|x\|), \|x\| \rightarrow 0 \quad (4.4.4)$$

1.5.1 Théorème de linéarisation

Theoreme 1.5.1. (*Stabilité des solutions*) Soient (λ_k) les valeurs propres de $df_x(0)$ et supposons que $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0, \forall k$. Alors pour tout μ tel que : $0 < \mu < \min(\operatorname{Re}(-\lambda_k))$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x(\cdot)$ est une solution de (4.4.3) qui à un instant t_0 vérifie $\|x(t_0)\| \leq \delta$, alors :

(a) $x(\cdot)$ existe pour tout $t \geq t_0$.

(b) $\|x(t)\| \leq \varepsilon e^{-\mu t}; \forall t \geq t_0$

En particulier, l'origine est asymptotiquement stable.

Theoreme 1.5.2. Soient (λ_k) les valeurs propres de $df_x(0)$. Supposons que : $\operatorname{Re}(\lambda_k) \neq 0, \forall k$. Alors, il existe un voisinage U de l'origine et un homéomorphisme θ de U dans un voisinage V de zéro qui envoie une trajectoire du système (4.4.3) sur une trajectoire du système linéaire $x'(t) = df_x(0) \cdot x(t)$ en conservant le sens du temps.

Remarque 1. Par exemple en dimension $n = 2$, les trajectoires du système non linéaire ressembleront à celles décrites au paragraphe précédant (cas linéaire $x'(t) = Ax(t)$) dans tous les cas à l'exception du cas du point centre où $\operatorname{Re} \lambda = 0$ et pour lequel le théorème de linéarisation est faux.

Exemple 1. Voici un exemple qui illustre cette remarque Soit le système différentiel non linéaire en dimension $n = 2$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - x(x^2 + y^2) \\ x - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Ici $f(x, y) = (-y - x(x^2 + y^2))$. On voit que $f(0, 0) = (0, 0)$, d'où l'origine est un point d'équilibre.

On écrit le système linéarisé en utilisant la formule de Taylor au voisinage de l'origine

$$X'(t) = df_X(0)X(t) + g(X)$$

où $X = (x, y)$. Alors le système linéaire est $X'(t) = df_x(0) \cdot X(t)$ où

$$df_X = df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -3x^2 & -1 \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

$$d'où \, df_X(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul simple donne les valeurs propres $\lambda = \pm i$, d'où ici $\operatorname{Re} \lambda = 0$.

Du paragraphe précédant, l'origine $(0,0)$ est un centre pour le système linéaire $X'(t) = dF_X(0) \cdot X(t)$ et les orbites sont des cercles centrés en zéro. Que se passe pour le système non linéaire ?

Faisons un passage aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \end{cases} \quad (4.4.5)$$

alors, la dérivation par rapport à t donne

$$\begin{aligned} x'(t) &= \rho'(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \theta'(t) \sin \theta(t) \\ y'(t) &= \rho'(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \theta'(t) \cos \theta(t) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = \rho(t)\rho'(t) \\ x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = \rho^2(t)\theta'(t) \end{cases} \quad (4.4.6)$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \rho(t)\rho'(t) &= -xy - x^2(x^2 + y^2) + xy - y^2(x^2 + y^2) = -\rho^4(t) \\ \rho^2(t)\theta'(t) &= x^2 - xy(x^2 + y^2) + y^2 + xy(x^2 + y^2) = \rho^2(t) \end{aligned}$$

Ce qui donne pour $\rho \neq 0$ (c'est à dire pour une trajectoire issue d'un point non nul) :

$$\begin{cases} \rho'(t) = -\rho^3(t) \\ \theta'(t) = 1 \end{cases} \quad (4.4.7)$$

Il vient que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\rho'(t)}{\rho^3(t)} dt &= - \int 1 dt \\
\frac{-1}{2} \int \left(\frac{1}{\rho^2(t)} \right) dt &= - \int 1 dt \\
\frac{-1}{2} \left(\frac{1}{\rho^2(t)} - \frac{1}{\rho^2(0)} \right) &= -t \\
\frac{1}{\rho^2(t)} &= 2t + \frac{1}{\rho^2(0)} \\
&= \frac{2t\rho^2(0) + 1}{\rho^2(0)}
\end{aligned}$$

Alors, on obtient pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{cases} \rho(t) = \left(\frac{\rho^2(0)}{1+2t\rho^2(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \theta(t) = \theta(0) + t \end{cases}$$

Ce qui montre que lorsque $t \rightarrow +\infty$ alors

$$\theta(t) \rightarrow +\infty, \quad \rho(t) \rightarrow 0$$

D'où une trajectoire de la solution du système non linéaire, au voisinage de l'origine $(0,0)$, est une spirale qui converge vers l'origine (c'est un ensemble non compact), tandis que la trajectoire du système linéarisé $X'(t) = df_X(0) \cdot X(t) + g(X)$ est un cercle (qui est un ensemble compact). Par conséquent, ces trajectoires ne peuvent être images l'une de l'autre par un homéomorphisme. Ce qui justifie le théorème précédent.

1.5.2 Méthode d'étude des systèmes différentiels autonomes en dimension $n = 2$

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques éléments qui forment un protocole de l'étude géométrique des systèmes différentiels autonomes de dimension $n = 2$. Considérons alors un tel système sous la forme

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (4.4.8)$$

où f et g sont des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

(1) On étudie leur nature (nœud, col, foyer, $\dots$). Les résultats du paragraphe précédent ainsi que le théorème de linéarisation nous donnent (sauf le cas de centre) une idée de l'allure

des trajectoires au voisinage de ces points.

Pratiquement si $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, il est commode de poser

$$X = x - x_0, Y = y - y_0.$$

Par ailleurs

$$f(x, y) = aX + bY + o(X^2 + Y^2)$$

et

$$g(x, y) = cX + dY + o(X^2 + Y^2).$$

Le linéarisé du système en (x_0, y_0) a pour matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(2) Une isocline est une courbe du plan le long de laquelle la pente des trajectoires est constante. Si $m \in \overline{\mathbb{R}}$ on pose

$$I_m = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = m \right\}.$$

Le long de I_m on a $\frac{x'(t)}{y'(t)} = m$. Si $m = 0$, I_0 est l'isocline où la pente de la trajectoire est horizontale. Si $m = \infty$, I_∞ est l'isocline où la pente de la trajectoire est verticale. On a

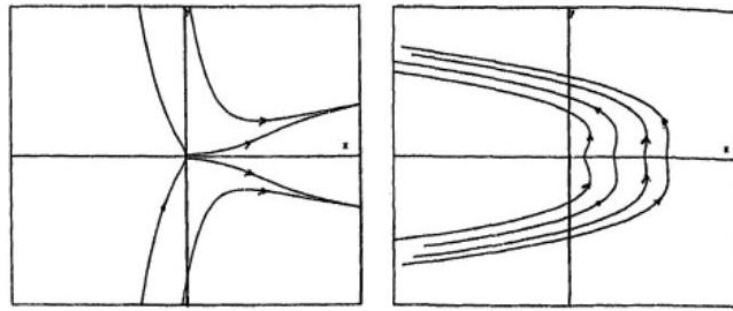
$$\begin{cases} I_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} \\ I_\infty = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\} \end{cases}$$

(3) On détermine pour cela les régions où $f(x, y) > 0, f(x, y) < 0$ de même pour g .

$$f > 0, g \underset{\nearrow}{> 0} \quad f > 0, g < 0 \quad f \underset{\nwarrow}{< 0}, g > 0 \quad f < 0, g < 0.$$

(4) Les orbites peuvent être symétriques par rapport à (Ox) , (Oy) où l'origine. Soient Γ_1 et Γ_2 deux trajectoires symétriques. On dit qu'elles sont parcourues dans le même sens si, en tous points symétriques, les vecteurs orientés sont symétriques.

Symétrie par rapport à (Ox) :



elle est vérifiée dans l'un des deux cas suivant :

Cas1.

$$\begin{cases} f(x, -y) = f(x, y) \\ g(x, -y) = -g(x, y) \end{cases}$$

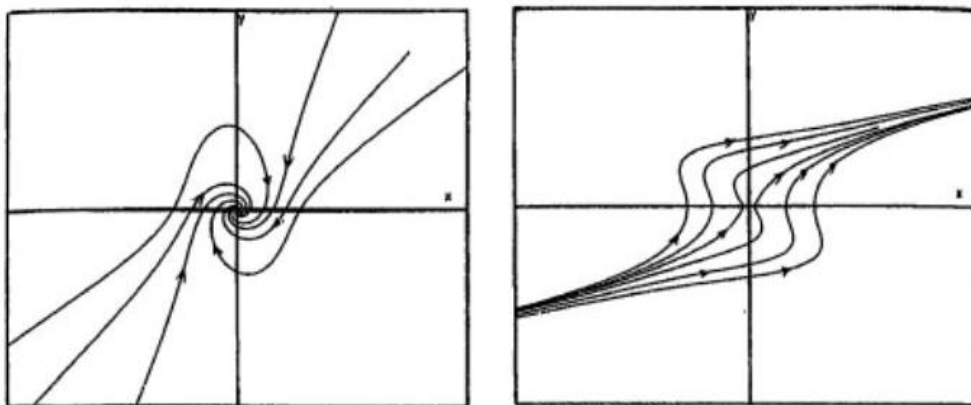
Cas2.

$$\begin{cases} f(x, -y) = -f(x, y) \\ g(x, -y) = g(x, y) \end{cases}$$

En effet, dans le cas1., si $(x(t), y(t))$ est une solution pour l'EDO (4.4.8), pour $t \in (a, b)$, alors $(x_1(t), y_1(t))$ où $x_1(t) = x(t)$ et $y_1(t) = -y(t), t \in (a, b)$ est aussi une solution. Les deux orbites sont alors parcourues dans le même sens, les vecteurs tangents étant symétriques.

Dans le cas 2., les orbites sont parcourues en sens inverse.

Symétrie par rapport à (oy) :



elle est vérifiée dans l'un des deux cas suivant

Cas1.

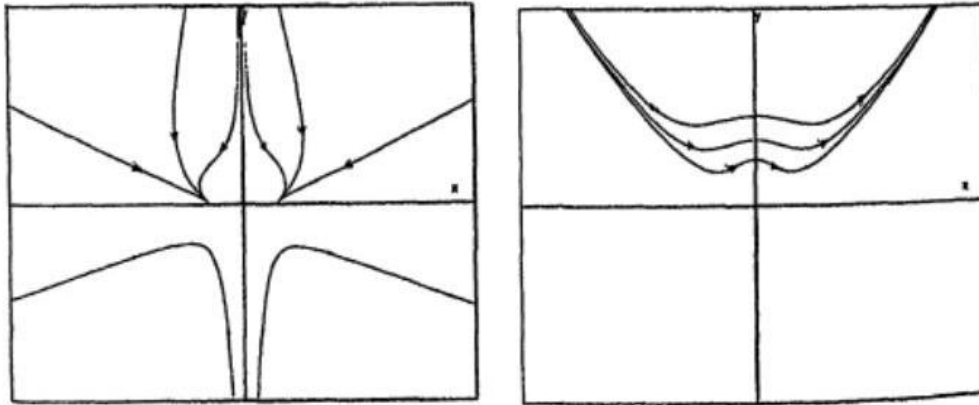
$$\begin{cases} f(-x, y) = -f(x, y) \\ g(-x, y) = g(x, y) \end{cases}$$

Cas2.

$$\begin{cases} f(-x, y) = f(x, y) \\ g(-x, y) = -g(x, y) \end{cases}$$

Ici, dans le cas 1., les orbites symétriques sont parcourues dans le même sens, et les vecteurs tangents étant symétriques, et dans le cas 2., les sens sont opposés.

Symétrie par rapport à l'origine :



on a deux cas

Cas1.

$$\begin{cases} f(-x, -y) = -f(x, y) \\ g(-x, -y) = -g(x, y) \end{cases}$$

Cas2.

$$\begin{cases} f(-x, -y) = f(x, y) \\ g(-x, -y) = g(x, y) \end{cases}$$

Dans le cas1., les orbites sont symétriques par rapport à l'origine, et le sens de parcours des orbites symétriques dans ce cas est le même.

par contre dans le cas2., le sens est inversé

(5) ON détermine les zones pièges Une zone piège est une partie du plan telle que toute trajectoire qui y entre, ne peut pas plus en ressortir. C'est le cas par exemple si le champ est rentrant sur tous les cotés de la zone.

1.6 Affinement du protocole

(1) Le théorème de Cauchy Lipschitz nous dit que par tout point du plan passe une et une seule solution du système (4.4.8). En particulier, deux trajectoires du système ne se coupent jamais.

(2) Au voisinage des points (x_0, y_0) où $f(x_0, y_0) \neq 0$, les trajectoires du système (4.4.8) se coïncident avec le graphes des solutions de l'équation différentielle $y'(x) = \frac{g(x, y(x))}{f(x, y(x))}$.

En particulier, les trajectoires sont des courbes $y = \phi(x)$. Ceci peut aussi servir à déterminer

la concavité des trajectoires. Pour cela, on peut calculer $y''(x)$ à partir de l'équation ci-dessus et étudier son signe.

De même, si on a $g(x_0, y_0) \neq 0$ au voisinage de (x_0, y_0) . Dans ce cas, les trajectoires du système (5) se coïncident avec le graphes des solutions de l'équation différentielle $x'(y) = \frac{f(x(y), y)}{g(x(y), y)}$. En particulier, ici les trajectoires sont des fonctions $x = \psi(y)$.

(3) A propos des isoclines :

Si une isocline I_m est une droite de pente m , alors c'est une solution particulière de notre système.

(4) Trajectoires monotones :

On dit qu'une trajectoire est monotone si dans le plan elle est le graphe d'une fonction $y = \phi(x)$ croissante ou décroissante. On peut dire alors que :

Si une trajectoire est monotone, alors elle sort de tout compact qui ne contient pas de points d'équilibres. (Cela montre que si $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ alors (x_0, y_0) est un point d'équilibre.

1.7 Exercices

Exercice 1. On cherche à analyser le phénomène de la vague solitaire, ou le problème de soliton. Le problème est modélisé comme un long canal considéré unidimensionnel. La quantité intéressante est le profil $u(\cdot, \cdot)$ de la surface de l'eau, qui est une fonction du temps t et de la position x le long du canal. Ce profil est mesuré par rapport à la hauteur h de l'eau au repos. Il satisfait l'équation aux dérivées partielles dite de Korteweg-de Vries :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial x} \left(hu + \frac{3}{4}u^2 + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (4.5.1)$$

où g est la constante de gravitation et $\sigma > 0$ est une constante (qui dépend de h , de g et de la tension superficielle). On appelle soliton, une solution $u(t, x)$ de l'équation aux dérivées partielles (4.5.1) telle que :

$$u(t, x) = z(s), \quad \text{où} \quad s = x - vt$$

où v étant une constante (c'est la vitesse de la vague).

On suppose que $z(s)$ et toutes ses dérivées tendent vers 0 quand s tend vers l'infini.

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence de solution et de préciser la vitesse et

l'amplitude de la vague.

(1) Montrer qu'un soliton $z(s)$ vérifie l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\sigma z''(s) = bz(s) - \frac{3}{2}z^2(s) \quad (4.5.2)$$

où b est une constante.

(2) Ecrire (4-5.2) sous forme d'un système différentiel d'ordre un $x'(s) = f(x(s))$. Déterminer les points d'équilibres de f et discuter leur stabilité en utilisant la méthode de linéarisation.

Que peut-on dire sur l'existence des solitons ?

(3) Trouver une constante du mouvement, c'est-à-dire une intégrale première.

(4) Montrer que, si $b < 0$, il n'y a pas de soliton.

(5) Supposons $b > 0$. Montrer qu'il existe un unique soliton $u(t, x)$, tracer son orbite et déterminer son amplitude. **Solution** (1) Considérons la fonction

$$y(t, x) = z(s),$$

où le changement de variable s est donné par $s = x - vt$. Alors les dérivées partielles s'écrivent

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -vz'(s),$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial x} = z'(s).$$

D'où l'équation différentielle partielle (4.5.1) de Korteweg-de Vries s'écrit comme suit

$$-vz'(s) = -\sqrt{\frac{g}{h}} \frac{d}{ds} \left(hz(s) + \frac{3}{4}z^2(s) + \frac{\sigma}{2}z''(s) \right),$$

ou encore

$$\frac{d}{ds} \left(2 \left(h - v\sqrt{\frac{h}{g}} \right) z(s) + \frac{2}{3}z^2(s) + \sigma z''(s) \right) = 0.$$

On voit que la quantité $2 \left(h - v\sqrt{\frac{h}{g}} \right) z(s) + \frac{2}{3}z^2(s) + \sigma z''(s)$ est indépendante de s . Par ailleurs, les conditions aux limites impliquent qu'elle est nulle, ce qui donne l'équation demandé avec

$$b = 2 \left(v\sqrt{\frac{h}{g}} - h \right).$$

(2) On pose $x(s) = (x_1(s), x_2(s))$, où $x_1(s) = z(s)$ et $x_2(s) = z'(s)$. Alors l'équation différentielle d'ordre deux (4.5.2) peut s'écrire sous forme d'un système différentiel d'ordre un $x'(s) = f(x(s))$, où le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ associé à l'équation est

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ bx_1 - \frac{3}{2}x_1^2 \end{pmatrix}$$

Ce champ admet deux points d'équilibres : $(0, 0)$ et $(\frac{2b}{3}, 0)$. Calculons le linéarisé autour de chacun des équilibres. On a la différentielle de f est

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b - 3x_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres du linéarisé à l'origine sont donc

$$\pm i\sqrt{|b|} \text{ si } b \leq 0, \pm\sqrt{|b|} \text{ si } b \geq 0.$$

et celles du linéarisé en $\bar{x}$ sont

$$\pm\sqrt{|b|} \text{ si } b \leq 0, \pm i\sqrt{|b|} \text{ si } b \geq 0$$

Ainsi, pour $b > 0$ l'origine est un équilibre non stable, et on ne peut pas conclure pour $\bar{x}$, qui n'est pas hyperbolique. Inversement pour $b < 0$, $\bar{x}$ n'est pas stable et l'origine n'est pas hyperbolique.

Que peut-on conclure pour l'existence de solutions? On sait que pour un soliton $z(s)$, la solution $(z(s), z'(s))$ de $x' = f(x)$ tend vers 0 quand $s \rightarrow \pm\infty$. Pour qu'un soliton existe, il faut donc qu'il existe une solution de $x' = f(x)$ qui tend vers 0 en $\pm\infty$

Quand $b < 0$, la linéarisation ne nous apprend rien. Quand $b > 0$ en revanche, l'origine est un équilibre hyperbolique. D'après le théorème d'Hartman-Grobmann, on sait alors qu'au voisinage de l'origine, le portrait de phase de $x' = f(x)$ est topologiquement équivalent à celui de l'équation linéarisée car celle-ci admet une valeur propre positive et une négative, il y a que 2 solutions qui tend vers l'origine en $\pm\infty$.

Il est donc impossible qu'il existe des solutions mais pas plus de deux. Remarquons que si les valeurs propres du linéarisé avaient été toutes deux de même signe, on aurait pu conclure qu'il n'y avait pas de solutions.

(3) Il faut trouver une fonction de classe C^1 au voisinage de l'équilibre notée E telle que

$\nabla E(x) \cdot f(x) \equiv 0$, c'est-à-dire

$$x_2 \frac{\partial E}{\partial x_1}(x) + \left(bx_1 - \frac{3}{2}x_1^2 \right) \frac{\partial E}{\partial x_2}(x) = 0$$

On peut prendre par exemple

$$E(x) = \frac{x_1^2}{2} (x_1 - b) + \frac{x_2^2}{2}$$

(4) Soit $x(.) = (z(.), z'(.))$ une solution de $x'(s) = f(x(s))$ associée à un soliton $z(.)$. On sait que une intégrale première E est une constante le long des champs de vecteurs solutions de $x'(s) = f(x(s))$ et vu les conditions aux limites des solitons, cette fonction constante vérifie $E(0) = 0$. Ainsi l'orbite de $x(.)$ est contenue dans la courbe de niveau

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : E(x) = 0\}$$

Donc, lorsque $b < 0$ alors l'origine est un point isolé de cette courbe de niveau (c'est un minimum locale). La seule solution qui tend vers 0 en $\pm\infty$ est donc la solution triviale $x(s) \equiv 0$. Il n'y a donc pas de solution pour $b < 0$.

(5) Si $b > 0$, on peut voir d'après la courbe de niveau $\{x \in \mathbb{R}^2 : E(x) = 0\}$ que les branches du demi-plan gauche sont infinies, par suite, on conclut qu'une solution $x(.)$ associée à un soliton doit être contenue dans la boucle du demi-plan de droite. Il reste à montrer qu'il existe une solution parcourant l'ensemble de la boucle (privée de l'origine). Soit $x^*(b, 0)$ le point d'intersection de la boucle avec l'axe horizontal et $x(.)$ la solution maximale issue de x^* en $s = 0$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ Puisque $f(x^*) = (0, -\frac{b}{2})$, la demi-orbite $x(]0, \infty)$ est dans la partie de la boucle où $x_2 < 0$: la fonction $x_1(t)$

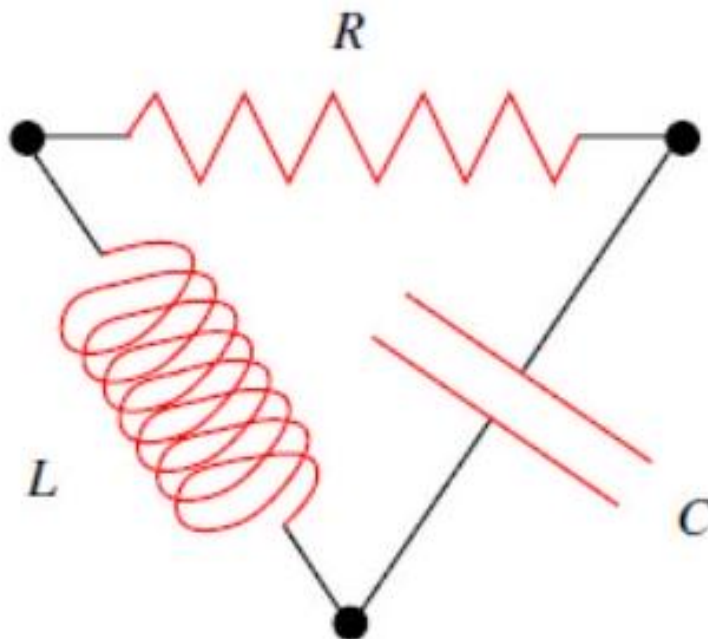
est décroissante et positive, d'où elle admet une limite. De plus, $x_1'(s)$ étant non nulle, sur cette partie de la boucle $x_2(s)$ est fonction de $x_1(s)$ et admet également une limite. Donc $x(s)$ a une limite quand $t \rightarrow \infty$. Cette limite étant forcément un équilibre ce ne peut être que l'origine. Le même raisonnement s'applique quand $t \rightarrow -\infty$.

Ainsi, $x(.)$ est une solution qui tend vers l'origine quand $s \rightarrow \pm\infty$ (toutes les autres s'obtiennent à partir de celle-ci par une translation du temps). Sa coordonnée $x_1(s) = z(s)$ est alors un soliton. On sait de plus que son amplitude maximale, obtenue pour $x_2 = 0$, est égale à b .

En résumé, on a démontré que pour toute vitesse de propagation v telle que $b > 0$, c'est-à-dire $v > \sqrt{gh}$, il existe un soliton dont l'amplitude maximale est $b = 2 \left(v \sqrt{\frac{h}{g}} - h \right)$.

Exercice 2. L'évolution d'un circuit électrique d'intensité $i(t)$ et de potentiel $v(t)$ est décrite par le système d'équations différentielles sur $\mathbb{R}^2$ du type

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = v - h(i(t)) \\ C \frac{dv}{dt} = -i(t) \end{cases} \quad (4.5.3)$$



Où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 et les constantes positives L et C sont la résistance et la capacité du circuit. L'énergie du système est

$$E(i, v) = \frac{1}{2} (Li^2 + Cv^2).$$

(1) Déterminer les points d'équilibre de l'équation (4.5.3) et discuter sa stabilité en fonction de $h'(0)$.

(2) Supposons que h vérifie $xh(x) > 0$ pour $x \neq 0$. Montrer que l'équilibre est asymptotiquement stable et déterminer son bassin d'attraction. Solution

1. L'équilibre est le point $i = 0, v = h(0)$. Le linéarisé de l'équation différentielle en ce point $(0, h(0))$ est $x'(t) = Ax(t)$, où

$$A$$

est la différentielle de f le champ associé au système différentiel au point $(0, h(0))$:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{h'(0)}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que $\det A = \frac{1}{LC} > 0$. Les valeurs propres de A ont donc des parties réelles de même signe, qui est aussi le signe de $\operatorname{tr} A = -\frac{h'(0)}{L}$, on en conclut alors que

- — Si $h'(0) > 0$, alors l'équilibre est asymptotiquement stable.
- Si $h'(0) < 0$, alors l'équilibre n'est pas stable.
- Si $h'(0) = 0$, alors l'équilibre n'est pas hyperbolique, on ne peut rien dire en utilisant le linéarisé.

(2) Notons tout d'abord que l'hypothèse sur h implique que $h(0) = 0$. L'équilibre est donc l'origine. Essayons de montrer que l'énergie $E(i, v) = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2)$ est une fonction de Lyapunov stricte à l'origine. On a

- — l'origine est un minimum strict de E .
- $\frac{dE}{dt} = -ih(i) < 0$ si $i \neq 0$.

On a donc démontré que, le long d'une trajectoire $x(t) = (i(t), v(t))$, la fonction $E(x(t))$ est strictement décroissante tant que $i(t) \neq 0$. Or, si $x(t)$ n'est pas identiquement nulle, les instants t_0 où $i(t_0) = 0$ sont isolés puisqu'alors $i'(t_0) = v(t_0) \neq 0$. Ainsi $\frac{dE}{dt} < 0$ presque partout le long d'une trajectoire. D'où on peut conclure que $E(x(t))$ est strictement décroissante.

Par conséquent, la fonction $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov stricte à l'origine, ce qui implique que l'origine est un équilibre asymptotiquement stable.

De plus, $E(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$, ce qui implique que le bassin d'attraction de l'origine est l'espace $\mathbb{R}^2$ tout entier. Exercice 3. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), & t \geq 0 \\ y'(t) = (x(t) - y^2(t))y(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.5.4)$$

(1) Déterminer une solution générale pour (4.5.4).

(Indication : Voir que $\frac{dy}{dx} = -y + \frac{y^3}{x}$ puis utiliser le changement $u = \frac{1}{y^2}$).

(2) Montrer, en utilisant la définition, que le point d'équilibre $(0, 0)$ de (4.5.4) est asymptotiquement stable. Solution (1) Déterminons une solution générale pour (4.5.4). On a $x'(t) = -x(t)$ implique que si $x(t) \neq 0, \forall t \geq 0$ alors $\frac{x'(t)}{x(t)} = -1$ et par intégration en t on trouve $\ln x(t) - \ln(x(0)) = -t$ d'où

$$\ln \frac{x(t)}{x(0)} = -t \Rightarrow x(t) = x(0)e^{-t}; \forall t \geq 0$$

Pour la deuxième équation on effectue un changement de variable convenable en posant

$u = \frac{1}{y^2}$. On aura donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x - y^2)}{-x} = -y + \frac{1}{x}y^3$$

Or que $u = \frac{1}{y^2}$ alors $du = -\frac{2}{y^3}dy$ (on suppose aussi que $y(t) \neq 0, \forall t \geq 0$), c'est-à-dire

$$dy = -\frac{1}{2}y^3 du$$

Donc $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y^3 \frac{du}{dx} = -y + \frac{1}{x}y^3$. On obtient alors $\frac{du}{dx} = \frac{2y}{y^3} - \frac{2}{y^3} \cdot \frac{1}{x}y^3$, ou bien $\frac{du}{dx} = \frac{2}{y^2} - \frac{2}{x}$.

On aura alors

$$\frac{du}{dx} = 2u - \frac{2}{x}$$

C'est une EDO d'ordre un, linéaire et non homogène. On peut écrire

$$u'(x) = 2u(x) - \frac{2}{x}$$

,d'où une solution générale de cette EDO est donnée en utilisant la formule de Duhamel

$$u(x) = Ce^{2x} - 2 \int_{x(0)}^x \frac{1}{s} e^{-2s} ds \quad ()$$

avec $C > 0$ car $u = \frac{1}{y^2} > 0$.

D'où on trouve $y(t)$ en faisant le changement inverse, c'est-à-dire

$$u = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2(t) = \frac{1}{u(t)}$$

avec $u(t) = u(x(t))$.

D'où $y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{u(x(t))}}$ avec $u(.)$ est donnée en fonction de $x(t)$. Ainsi $(x(t), y(t))$ est une solution générale de (4.5.4).

2) Montrons que l'origine $(0,0)$ est asymptotiquement stable. Par définition de la stabilité asymptotique, tout d'abord on a

$$x(t) = x(0)e^{-t},$$

d'où on remarque que

- si $x(0) < 0$, alors $x(0) \leq x(t) < 0$.
- — si $x(0) > 0$, alors $0 < x(t) \leq x(0)$ (cela signifie que $x(t)$ est proche de $x(0)$ pour tout $t > 0$).

Montrons aussi que $y(t)$ est proche (c'est-à-dire au voisinage de $y(0)$) pour tout