Examen Final 2026, Durée 90 minutes

Remarque 0.1. *Résoudre trois problèmes selon les étapes suivantes :*

1. *Indiquer le type du problème d'optimisation à résoudre.*
2. *Énoncer le théorème appliqué dans chaque problème.*
3. *Résoudre le problème convenablement.*

Exercice 1 Étant donné une zone fixe de carton, nous souhaitons construire une boîte en carton fermée avec un volume maximal. Notons, les dimensions de la boîte avec un volume maximum par x_1, x_2 et x_3, et soit A la zone fixe donnée de carton. Le problème peut alors être formulé comme suit :

$$P1 : \quad \begin{cases} Maximiser : & x_1x_2x_3 \\ SC & x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{A}{2} \end{cases} \tag{1}$$

Exercice 2

$$P2 : \quad \begin{cases} Minimiser : & f(x_1, x_2) \\ SC & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

où $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1$

Exercice 3 Une entreprise fabrique deux produits P_1 et P_2.

— Le produit P_1 rapporte 50 € par unité.

— Le produit P_2 rapporte 40 € par unité.

Les ressources disponibles sont données dans le tableau suivant :

Ressource	P_1	P_2	**Disponible**
Machine	2	1	100
Main-d'œuvre	1	1	60

1. Formuler le problème mathématiquement
2. Résoudre le problème graphiquement
3. Résoudre le problème par la méthode du simplexe
4. Donner la solution optimale

Formulation mathématique :
Soient :

$$x_1 = \text{quantité produite de } P_1$$

$$x_2 = \text{quantité produite de } P_2$$

Fonction objectif

$$\max Z = 50x_1 + 40x_2$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 100 & \text{(machine)} \\ x_1 + x_2 \leq 60 & \text{(main-d'œuvre)} \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 & \text{(non-négativité)} \end{cases}$$

Bonne chance

Corrigy type

Exercice 1

1. Le problème (P_1) est un problème d'optimisation avec contraintes d'égalité non linéaire..... 0.5
2. Le théorème appliqué, ... 0.5

Theorem 0.0.1: Théorème de Lagrange :

Soit x^* un minimum local d'un problème de m contraintes. Alors, il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, tels que : $\nabla f(x^*) = \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 + ... + \lambda_m \nabla h_m$.

3. Résolution

On note $f(x) = -x_1x_2x_3$ (c'est a dire on le rendre de minimisation) et $h(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - \frac{A}{2}$. 0.5
On a $\nabla f(x) = -[x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2]$ et $\nabla h(x) = [x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2]$.
Notons que tous les points possibles sont réguliers dans ce cas, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Par les conditions de Lagrange on aura, ... 0.5

$$P1 : \quad \begin{cases} -x_2x_3 + \lambda(x_2 + x_3) & = 0 \\ -x_1x_3 + \lambda(x_1 + x_3) & = 0 \\ -x_1x_2 + \lambda(x_1 + x_2) & = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 & = \dfrac{A}{2} \end{cases} \tag{3}$$

On résout maintenant ces équations. Tout d'abord, nous montrons que x_1, x_2, x_3 et λ sont tous non nuls.
Supposons que $x_1 = 0$. Par les contraintes, nous avons $x_2x_3 = \frac{A}{2}$. Cependant, les deuxième et troisième équations de la condition de Lagrange donnent $\lambda x_2 = \lambda x_3 = 0$, ce qui, avec la première équation, implique que $x_2x_3 = 0$. Cela contredit les contraintes..... 0.5

Un argument similaire s'applique à x_2 et x_3.
Supposons ensuite que $\lambda = 0$. Alors, la somme des trois équations de Lagrange donne $x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = 0$, ce qui contredit les contraintes..... 0.5
Nous résolvons maintenant x_1, x_2 et x_3 dans les équations de Lagrange.
Tout d'abord, multipliez la première équation par x_1 et la seconde par x_2, et soustraire l'un de l'autre.
Nous arrivons à $x_3\lambda(x_1 - x_2) = 0$ ..... 0.5 .

Comme ni x_3 ni λ ne peuvent être nuls, nous concluons que $x_1 - x_2$.
On en déduit de même que $x_2 = x_3$. De l'équation de contrainte, on obtient $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt{\frac{A}{6}}$..... 1 pt

Exercice 2

1. Le problème (P_1) est un problème d'optimisation avec contraintes d'inégalité non linéaire. 0.75
2. Le théorème appliqué 0.75

Theorem 0.0.2: Théorème de KKT :

oit $f, h, g \in C^1$, soit x^* un point régulier et le minimum local d'un problème de minimisation de f sous les contraintes $h(x) = 0, \quad g(x) \leqslant 0$. Alors, il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tels que :

(a) $\mu^* \quad \geq 0$

(b) $\nabla f(x^*) + \lambda^* \nabla h(x^*) + \mu^* \nabla g(x^*) = 0^T$

(c) $\mu^* g(x^*) = 0$

3. Résolution

$$P2 :\Leftrightarrow \quad .....0.25 \quad \begin{cases} Minimiser : & f(x_1, x_2) \\ SC & -x_1 \leq 0, \ (4) \\ & -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

On à un problème d'optimisation avec contraintes d'inégalités, tel que $g_1(x) = -x_1$ et $g_2(x) = -x_2$.
Alors on applique les conditions de KKT, comme suit :..... 0.25

$$\begin{cases} 1. & \mu^T \geq 0^T \\ 2. & \nabla_x f(x^* + \mu^T \nabla_x g = 0, \\ 3. & \mu^T g = 0^T \end{cases}$$

c-à-d :..... 0.25

(a) $[\mu_1, \mu_2] \geq [0, 0]$

(b) $[2x_1 + x_2 - 3, 2x_2 + x_1] + [\mu_1, \mu_2] * [\nabla g_1, \nabla g_2]^T = 0$

(c) $[\mu_1, \mu_2]^T * [g_1, g_2] = 0^T$

Comme, $\nabla g_1 = -1$ et $\nabla g_2 = -1$, alors :..... 0.25

(a) $[\mu_1, \mu_2] \geq [0, 0]$

(b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 - \mu_1 = 0 \\ 2x_2 + x_1 - \mu_2 = 0 \end{cases}$

$\mu_1 g_1 = -\mu_1 x_1 = 0 \rightarrow$ non active $\Rightarrow x_1 > 0 \;\; et \;\; \mu_1 = 0$ 0.25

$\mu_2 g_2 = -\mu_2 x_2 = 0 \rightarrow$ active $\Rightarrow x_2 = 0 \;\; et \;\; \mu_2 > 0$ 0.25

On obtient : 0.5

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 - \mu_1 = 0 \\ 2x_2 + x_1 - \mu_2 = 0, \\ x_2 = 0 \\ \mu_1 = 0 \end{cases}$$

Alors, $x_1^* = \frac{3}{2}$, $\mu_2^* = \frac{3}{2}$

D'après les conditions du théorème de KKT, $x^* = (\frac{3}{2}, 0)$ est un minimum locale 1pt

Exercice 3

1. Type du problème 0.75

   La fonction objectif est quadratique strictement convexe et les contraintes sont linéaires. Il s'agit donc d'un **problème d'optimisation convexe**, qui admet une solution unique.

2. Théorème appliqué 0.75

   On applique le **théorème de Karush–Kuhn–Tucker (KKT)**. Dans un problème convexe, toute solution satisfaisant les conditions KKT est un minimum global.

3. Résolution

   Méthode 1 :

   Le Lagrangien associé est :

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - a_i)^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^{4} x_i - 4 \right) - \sum_{i=1}^{4} \mu_i x_i,$$

   ..... 0.5 où $a = (1, 2, 3, 4)$.

Les conditions KKT sont : 0.5

$$\begin{cases} 2(x_i - a_i) + \lambda - \mu_i = 0, \\ x_i \geq 0, \ \mu_i \geq 0, \\ \mu_i x_i = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

La solution sans contrainte de positivité donne

$$x = (-0.5,\ 0.5,\ 1.5,\ 2.5),$$

..... 0.75 qui ne satisfait pas $x_1 \geq 0$. Ainsi, la contrainte $x_1 = 0$ est active ..... 0.5.

On minimise alors sous

$$x_2 + x_3 + x_4 = 4.$$

On obtient :

$$x_2 = \frac{1}{3}, \qquad x_3 = \frac{4}{3}, \qquad x_4 = \frac{7}{3}.$$

..... 1.5

Solution optimale

$$\boxed{x^* = \left(0,\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{3}\right)}$$

..... 0.25

La valeur minimale est :

$$\boxed{f(x^*) = \frac{19}{3}}\text{.....0.25}$$

Exercice 4

1. Résolution graphique ..... 1.5 Les droites associées aux contraintes sont :

$$2x_1 + x_2 = 100$$

$$x_1 + x_2 = 60$$

Leurs points d'intersection sont obtenus en résolvant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 100 \\ x_1 + x_2 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

..... 0.5

Les sommets de la région admissible sont :

$$(0,0),\ (0,60),\ (40,20),\ (50,0)$$

..... 0.5

Le calcul de la fonction objectif donne :

$$Z(0,60) = 2400, \quad Z(40,20) = 2800, \quad Z(50,0) = 2500$$

..... 0.25

La solution optimale est donc :

$$x_1 = 40, \quad x_2 = 20$$

2. Résolution par la méthode du simplexe On introduit les variables d'écart s_1 et s_2 :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 100 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 60 \end{cases}$$

3. Tableau initial du simplexe

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
s_1	2	1	1	0	100
s_2	1	1	0	1	60
Z	-50	-40	0	0	0

..... 0.5

Après deux itérations du simplexe, on obtient le tableau final :

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_1	1	0	1	-1	40
x_2	0	1	-1	2	20
Z	0	0	10	30	2800

..... 0.5

4. Solution optimale

$$\boxed{x_1 = 40, \quad x_2 = 20, \quad Z_{\max} = 2800}$$

..... 1pt