Université Djilali Bounaama **Département de Mathématiques et Informatique**

Faculté des sciences et technologie **Module :Optimisation continue**

M1 :Analyse Mathématique et Applications **Date : 01/02/2023**

Examen du premier semestre (90 minutes)

Exercice 1.

$$(P): \quad \begin{cases} Minimiser f(x,y) = (x-2)^2 + 2(y-1)^2 \\ g_1(x,y): \quad x + 4y \leqslant 3 \\ g_2(x,y): \quad -x + y \leqslant 0 \end{cases}$$

Soit la fonction de Lagrange :

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y) + \lambda_1 h_1(x,y) + \lambda_2 h_2(x,y)$$

$$= (x-2)^2 + 2(y-1)^2 + \lambda_1(x+4y-3) + \lambda_2(-x+y)$$

où $\lambda_1 \geqslant 0$ et $\lambda_1 \geqslant 0$

Calculant des dérivées partielles pour trouver le point optimal comme ci-dessous :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-2) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4(y-1) + 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{2}$$

$$\lambda_1(x+4y-3) = 0 \tag{3}$$

$$\lambda_2(-x+y) = 0 \tag{4}$$

$$x + 4y \leqslant 3 \tag{5}$$

$$-x + y \leqslant 0 \tag{6}$$

$$\lambda_1 \geqslant 0 \tag{7}$$

$$\lambda_2 \geqslant 0 \tag{8}$$

Nous devons vérifier quatre cas possibles comme indiqué ci-dessous :

Cas 1 : Lorsque $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$.

En utilisant les équations (1) et (2), on obtient, $x = 2$ et $y = 1$; ces valeurs de x et y ne

satisfont pas les équations (5) et (6).

Ce n'est donc pas une solution possible ou optimale.

Cas 2 : Lorsque la contrainte primale (A) est inactive et la contrainte primale (B) est active, c'est-à-dire, $\lambda_1 = 0$ et $-x + y = 0$.

Puis en remplaçant les valeurs ci-dessus dans les équations (1) et (2), on obtient :

$$2(x-2) - \lambda_2 = 0$$

et

$$4(y-1) + \lambda_2 = 0$$

En résolvant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$x = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{4}{3}, \lambda_2 = -\frac{4}{3}$$

La valeur de λ_2 ne satisfont pas les équations (7) et (8). Donc, ce n'est pas une solution possible ou optimale.

Cas 3 : Lorsque la contrainte primale (A) est active et la contrainte primale (B) est inactive, c'est-à-dire, $x + 4y = 3$ et $\lambda_2 = 0$.

Puis en remplaçant les valeurs ci-dessus dans les équations (1) et (2), on obtient :

$$2(x-2) + \lambda_1 = 0$$

et

$$4(y-1) + 4\lambda_1 = 0$$

En résolvant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$x = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{1}{3}, \lambda_1 = \frac{2}{3}$$

Les valeurs de x, y, λ_1, λ_2 satisfont les équations $(1) - (8)$. Donc, ce cas est l'une des solutions possibles ou optimales.

Cas 4 : Lorsque les deux contraintes (A) et (B) sont actives, c'est-à-dire, $x + 4y = 3$ et $-x + y = 0$.

Puis en résolvant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$x = \frac{3}{5}, \quad y = \frac{3}{5}.$$

En remplaçant les valeurs ci-dessus dans les équations (1) et (2), on obtient : $\lambda_1 = \frac{22}{25}$, $\lambda_2 = -\frac{48}{25}$

La valeur de λ_2 ne satisfont pas l'équation (8).

: Ce n'est donc pas une solution possible ou optimale. D'où la seule solution possible à la fonction objectif f est le cas 3. Ainsi,

La solution optimale :

$$x^* = \frac{5}{3}, \quad y^* = \frac{1}{3}$$

La valeur optimal : $f(x^*, y^*) = (\frac{5}{3} - 2)^2 + 2(\frac{1}{3} - 1)^2$

$$f(x^*, y^*) = 1$$

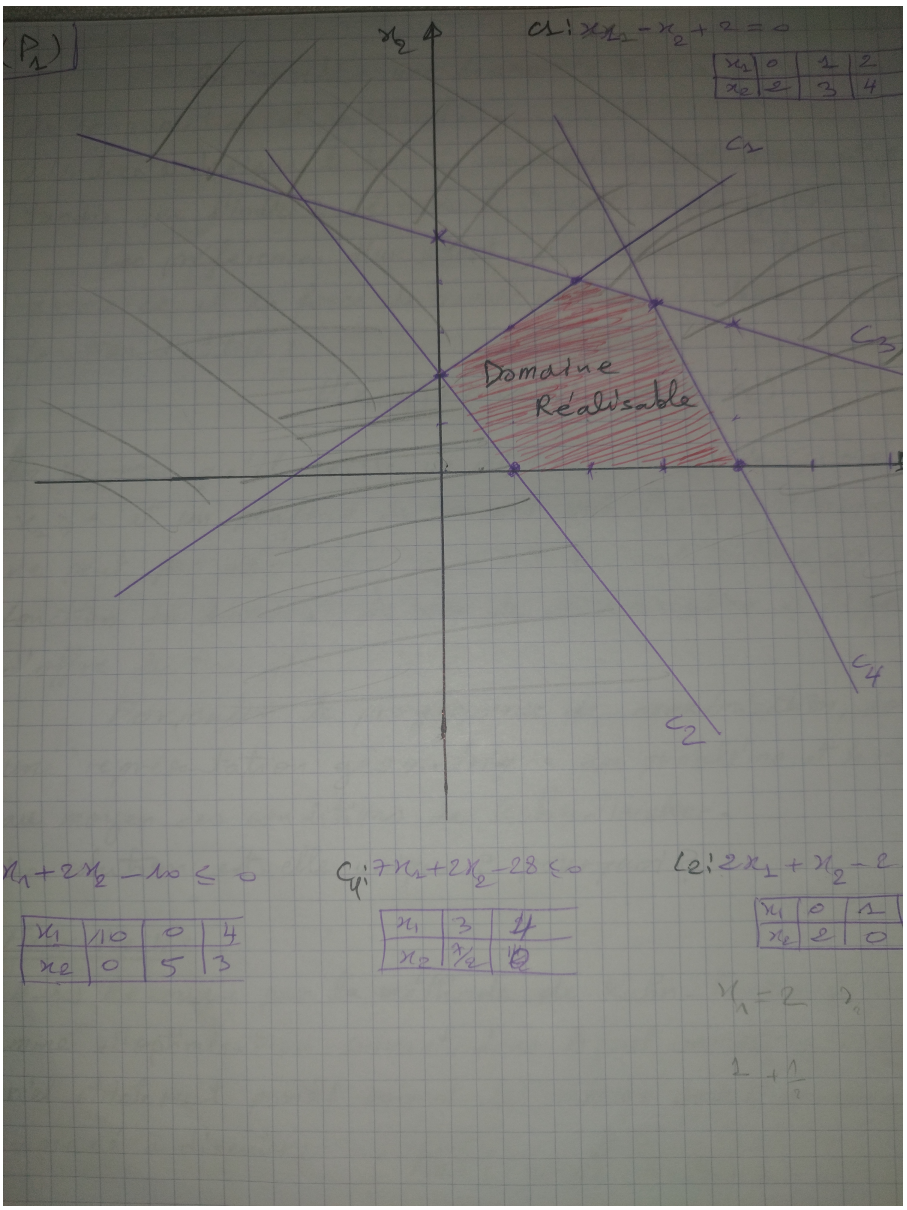
Les valeurs de x, y, λ_1, λ_2 satisfont les équations $(1) - (8)$. Donc, ce cas est l'une des solutions possibles ou optimales.

Exercice 2. *Considérons le problème d'optimisation avec contraintes suivant :*

$$(P) : \begin{cases} Maximiser(x_1^3 - 3x_2) \\ x_1 - x_2 + 2 \geqslant 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2 \geqslant 0 \\ x_1 + 2x_2 - 10 \leqslant 0 \\ 7x_1 + 2x_2 - 28 \leqslant 0 \\ x_1 \quad et \quad x_2 \quad \geqslant 0 \end{cases}$$

Solution

1. *Déterminer géométriquement le domaine réalisable constitué par les contraintes.*



2. *Résoudre le problème au moyen des conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). On a deux méthodes :*

Méthode 1 :

Le problème doit écrit comme suit :

$$(P): \begin{cases} Maximiser(-x_1^3 + 3x_2) \\ -x_1 + x_2 - 2 \leqslant 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2 \leqslant 0 \\ x_1 + 2x_2 - 10 \leqslant 0 \\ 7x_1 + 2x_2 - 28 \leqslant 0 \\ x_1 \quad et \quad x_2 \quad \geqslant 0 \end{cases}$$

Le Lagrangien s'écrit :

$$L(x,\lambda) = -x_1^3+3x_2+\lambda_1(-x_1+x_2-2)+\lambda_2(-2x_1-x_2+2)+\lambda_3(x_1+2x_2-10)+\lambda_4(7x_1+2x_2-28)$$

Les conditions de KKT sont donc les suivantes. Il y a tout d'abord les conditions de signe sur les variables :

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0, \quad \lambda_4 \geqslant 0$$

Il faut ensuite calculer les dérivées partielles par rapport à ces variables et poser les conditions de signe correspondantes.

$$3x_1^2 - 3x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 - 7\lambda_4 = 0$$

$$-3 - \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0$$

$$\lambda_1(-x_1 + x_2 - 2) = 0$$

$$\lambda_2(-2x_1 - x_2 + 2) = 0$$

$$\lambda_1(x_1 + 2x_2 - 10) = 0$$

$$\lambda_2(7x_1 + 2x_2 - 28) = 0$$

Si on discute tous les cas (qui sont 16 cas), ça devient très long et presque impossible manuellement.
Alors, en utilisant la présentation graphique de la question précédente.
Les point extrêmes du domaine réalisable sont :

$$(1,0), \quad (4,0) \quad (3,3.5) \quad (2,4) et (0,2)$$

On remplace dans la fonction objectif, on obtient : $F(1,0) = 1$,

$F(4,0) = 64$, *optimale*

$F(3,3.5) = 16.5$,

$F(2,4) = -4$,

$F(0,2) = -6$

Alors, en appliquant KKT pour vérifier et confirmer la solution optimale : pour le point (4,0), la dernière contrainte est active et les autres contraintes sont non actives, donc on a :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad 7x_1 + 2x_2 - 28 = 0 \quad \lambda_4 \geqslant 0$$

on trouve, $\lambda_4 = \frac{48}{7} positif$,

Alors l'optimum est :

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \frac{48}{7}$$

Méthode 2 :

Les deux premières contraintes doivent être réécrites sous la forme :

$$-x_1 + x_2 - 2 \leqslant 0$$

$$-2x_1 - x_2 + 2 \leqslant 0$$

Le lagrangien s'écrit de la manière suivante :

$$L(x,\lambda) = x_1^3 - 3x_2 - \lambda_1(-x_1 + x_2 - 2) - \lambda_2(-2x_1 - x_2 + 2) - \lambda_3(x_1 + 2x_2 - 10) - \lambda_4(7x_1 + 2x_2 - 28)$$

Les conditions de KKT sont donc les suivantes. Il y a tout d'abord les conditions de signe sur les variables :

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_3 \geqslant 0, \quad \lambda_4 \geqslant 0$$

Il faut ensuite calculer les dérivées partielles par rapport à ces variables et poser les conditions de signe correspondantes. Dans le cas des dérivées par rapport aux coefficients λ, on retrouve les contraintes :

$$3x_1^2 - 3x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 - 7\lambda_4 = 0$$

$$-3 - \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0$$

$$\lambda_1(-x_1 + x_2 - 2) = 0$$

$$\lambda_2(-2x_1 - x_2 + 2) = 0$$

$$\lambda_1(x_1 + 2x_2 - 10) = 0$$

$$\lambda_2(7x_1 + 2x_2 - 28) = 0$$

Ce sont ces dernières conditions qui servent à mener la discussion car elles présentent une alternative. L'un des deux termes du produit doit être nul. On discute donc en testant les deux possibilités.

On cherche à maximiser la fonction objectif : $f = x_1^3 - 3x_2$. Intuitivement, on voit qu'il faut choisir x_1 le plus grand possible et x_2 le plus petit possible. On va donc chercher $x_2 = 0$ (les variables doivent être positives).
On est conduit, en remplaçant dans les conditions à $x_1 = 4$, puis $= 0$ et $\lambda_1 = \frac{48}{7}$. C'est l'optimum du problème et on peut vérifier qu'il remplit toutes les conditions de KKT.

Exercice 3. *Résoudre le programme d'optimisation linéaire suivant :(par le simplex)*

$$(P) : \begin{cases} Max z = 20x_1 + 25x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 40 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 48 \\ x_1 \ \ et \ \ x_2 \ \geqslant 0 \end{cases}$$

Au préalable, on écrit le problème sous la forme canonique :

$$(P): \begin{cases} Maxz = 20x_1 + 25x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 40 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 48 \\ x_1 \quad et \quad x_2 \quad \geqslant 0 \end{cases}$$

Voici les étapes du simplexe.

***0**. On forme le tableau initial T.*

B	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	*2*	*3*	*1*	*0*	*40*
x_4	*4*	*2*	*0*	*1*	*48*
	20	*25*	*0*	*0*	*0*

Les variables de base sont $\{x_3, x_4\}$ *et la solution de base est* $(0, 0, 40, 48)$ *ce qui correspond à l'origine dans le plan.*

***1**. La fonction z varie plus rapidement en fonction de la variable* x_2*. Donc, on choisit la deuxième colonne comme colonne de pivot. La variable* x_2 *entre dans la base mais une variable doit sortir.*

***2**. On doit choisir la ligne de pivot. Pour cela, on utilise le critère du quotient :*

$$\frac{b_i}{a_{ij}} = \min\{\frac{b_k}{a_{kj}} \mid a_{kj} > 0, \quad k = 1, 2, ..., m\}$$

où j est la colonne de pivot de l'étape 2. Le critère assure que la solution sera admissible.

B	x_1	x_2	x_3	x_4		*critère*
x_3	*2*	*3*	*1*	*0*	*40*	$40 \div 3 = \frac{40}{3}$
x_4	*4*	*2*	*0*	*1*	*48*	$48 \div 2 = 24$
	20	*25*	*0*	*0*	*0*	

La ligne de pivot sera la première : $i = 1$*. Les variables de base deviennent* $B = \{x_2, x_4\}$*.*

***3**. On pivote autour de l'élément* $T_{1,2}$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	$\frac{2}{3}$	*1*	$\frac{1}{3}$	*0*	$\frac{40}{3}$
x_4	$\frac{8}{3}$	*0*	$-\frac{2}{3}$	*1*	$\frac{64}{3}$
	$\frac{10}{3}$	*0*	$\frac{-25}{3}$	*0*	$\frac{-1000}{3}$

La solution de base sera $x_2 = \frac{40}{3}, \quad x_4 = \frac{64}{3}, \quad x_1 = x_3 = 0.$

4. *On choisit la première colonne comme colonne de pivot car* x_1 *est la seule variable qui augmente* z.

B	x_1	x_2	x_3	x_4		*critère*
x_2	$\frac{2}{3}$	*1*	$\frac{1}{3}$	*0*	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3} \div \frac{2}{3} = 20$
x_4	$\frac{8}{3}$	*0*	$-\frac{2}{3}$	*1*	$\frac{64}{3}$	$\frac{64}{3} \div \frac{8}{3} = 8$
	$\frac{10}{3}$	*0*	$\frac{-25}{3}$	*0*	$\frac{-1000}{3}$	

On applique le critère du quotient pour chercher la ligne de pivot et on trouve $i = 2$. *La nouvelle base sera* $B = \{x_2, x_1\}$.

5. *On pivote autour de l'élément* $T_{2,1}$.

B	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	*0*	*1*	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	*8*
x_1	*1*	*0*	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	*8*
	0	*0*	$\frac{-15}{2}$	$\frac{-5}{4}$	-360

6. *L'algorithme se termine ici car tous les coefficients des colonnes* x_1, x_2, x_3, x_4 *sont négatifs. Donc, on ne peut augmenter davantage* z. *La solution optimale sera,*

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0 \quad et \quad z = 360.$$

ce qui correspond au sommet $(8, 8)$ *dans le plan. Le signe* $-$ *dans le coin inférieur droit est dû au fait que l'on avait initialement ajouté la ligne* $c^t x - z = 0$. *Donc, à la fin, on aura* $-z = -360$.

Bonne chance