Université Djilali Bounaama **Département de Mathématiques et Informatique**

Faculté des sciences et technologie **Module :Optimisation continue**

M1 :Analyse Mathématique et Applications **Date : 17/12/2025**

Interrogation 2 (60 minutes)

Exercice 1. *Résoudre le problème d'optimisation avec contraintes ci-dessous (calculer tous les points) en appliquant les conditions de KKT pour la fonction objectif $f(x,y)$ soumis à la fonction de contrainte $g_1(x,y)$ et $g_2(x,y)$.*

$$(P1): \begin{cases} Minimiser f(x,y) = (x-2)^2 + 2(y-3)^2 \\ g_1(x,y): \quad x + 4y \leqslant 5 \\ g_2(x,y): \quad -x + y \leqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 2. *1. Résoudre le problème $(P3)$ en utilisant la méthode du simplex.*

2. Justifier géométriquement la solution trouvée précédemment.

$$(P3): \begin{cases} Max f(x,y) = 150x + 550y \\ x \geqslant 120 \\ y \leqslant 70 \\ x + y \leqslant 140 \\ x + 2y \leqslant 180 \\ x \quad et \quad y \quad \geqslant 0 \end{cases}$$

Corrigé type Interrogation 2.

Exercice 1 :

Soit la fonction de Lagrange :

$$L(x, y, \mu_1, \mu_2) = f(x, y) + \mu_1 g_1(x, y) + \mu_2 g_2(x, y)$$

$$= (x-2)^2 + 2(y-3)^2 + \mu_1(x + 4y - 5) + \mu_2(-x + y)$$

où $\mu_1 \geqslant 0$ et $\mu_1 \geqslant 0$

Calculant des dérivées partielles pour trouver le point optimal comme ci-dessous :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-2) + \mu_1 - \mu_2 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4(y-3) + 4\mu_1 + \mu_2 = 0 \tag{2}$$

$$\mu_1(x + 4y - 5) = 0 \tag{3}$$

$$\mu_2(-x + y) = 0 \tag{4}$$

$$x + 4y \leqslant 5 \tag{5}$$

$$-x + y \leqslant 0 \tag{6}$$

$$\mu_1 \geqslant 0 \tag{7}$$

$$\mu_2 \geqslant 0 \tag{8}$$

Nous devons vérifier quatre cas possibles comme indiqué ci-dessous :

Cas 1 : Lorsque $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 0$.

En utilisant les équations (1) et (2), on obtient, $x = 2$ et $y = 3$; ces valeurs de x et y ne satisfont pas les équations (5) et (6).

Ce n'est donc pas une solution possible ou optimale.

Cas 2 : $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 > 0$.

Lorsque la contrainte primale (A) est inactive et la contrainte primale (B) est active, c'est-à-dire, $\mu_1 = 0$ et $-x + y = 0$.

Puis en remplaçant les valeurs ci-dessus dans les équations (1) et (2), on obtient :

$$2(x-2)-\mu_2=0$$

et

$$4(y-3)+\mu_2=0$$

En résolvant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$x=\frac{8}{3},\quad y=\frac{8}{3},\mu_2=\frac{4}{3}$$

ces valeurs de x et y ne satisfont pas l'équation (5) .

Ce n'est donc pas une solution possible ou optimale.

Cas 3 : $\mu_1>0$ et $\mu_2=0$.

Lorsque la contrainte primale (A) est active et la contrainte primale (B) est inactive, c'est-à-dire, $x+4y=5$ et $\mu_2=0$.

Puis en remplaçant les valeurs ci-dessus dans les équations (1) et (2), on obtient :

$$2(x-2)+\mu_1=0$$

et

$$4(y-3)+4\mu_1=0$$

En résolvant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$x=1,\quad y=1,\mu_1=2$$

Les valeurs de x, y, μ_1, μ_2 satisfont les équations $(1)-(8)$. Donc, ce cas est l'une des solutions possibles ou optimales.

Cas 4 : Lorsque les deux contraintes (A) et (B) sont actives, c'est-à-dire, $x+4y=5$ et $-x+y=0$.

Puis en résolvant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$x=1,\quad y=1.$$

En remplaçant les valeurs ci-dessus dans les équations (1) et (2), on obtient : $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0$

Les valeurs de x, y, μ_1, μ_2 satisfont les équations $(1) - (8)$. Donc, ce cas est l'une des solutions possibles ou optimales.

D'où la solution possible à la fonction objectif f est le cas 3 et 4. Ainsi,

La solution optimale :

$$x^* = 1, \quad y^* = 1$$

La valeur optimal : $f(x^*, y^*) = (1-2)^2 + 2(1-3)^2$

$$f(x^*, y^*) = 9$$

Exercice 2 :

Le domaine admissible est le polygone

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 120,\ 0 \leqslant y \leqslant 70,\ x + y \leqslant 140,\ x + 2y \leqslant 180\}$ de $\mathbb{R}^2$

Résolution graphique :

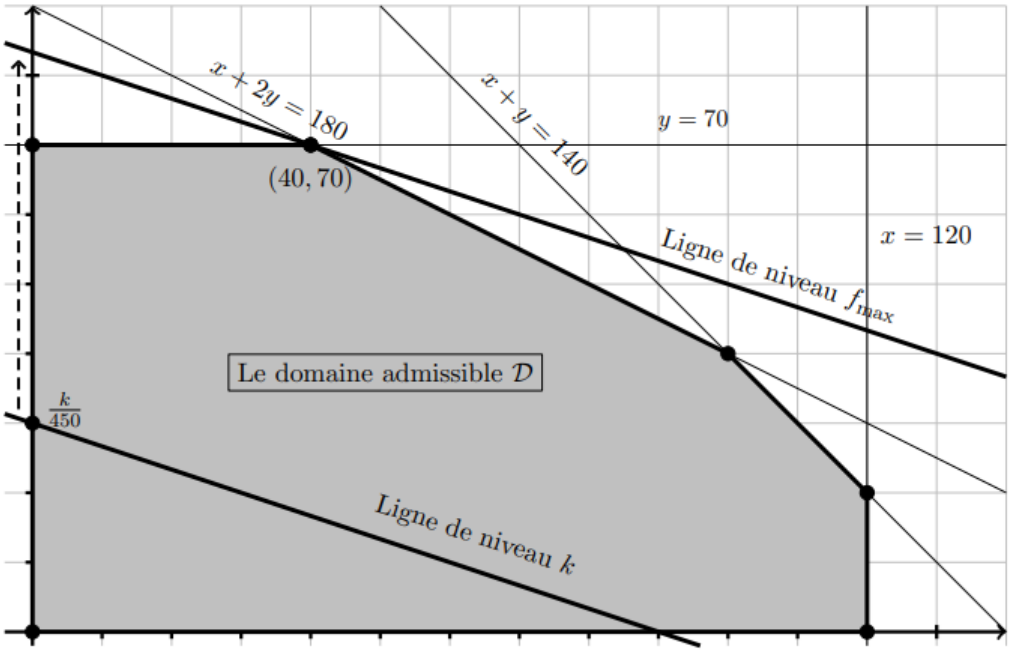


FIGURE 1 – Le domaine admissible $D \subset \mathbb{R}^2$, deux lignes de niveau, et le maximum $(40,\ 70)$ de f sur C.

Constatations : On constate sur cet exemple (figure 1) :

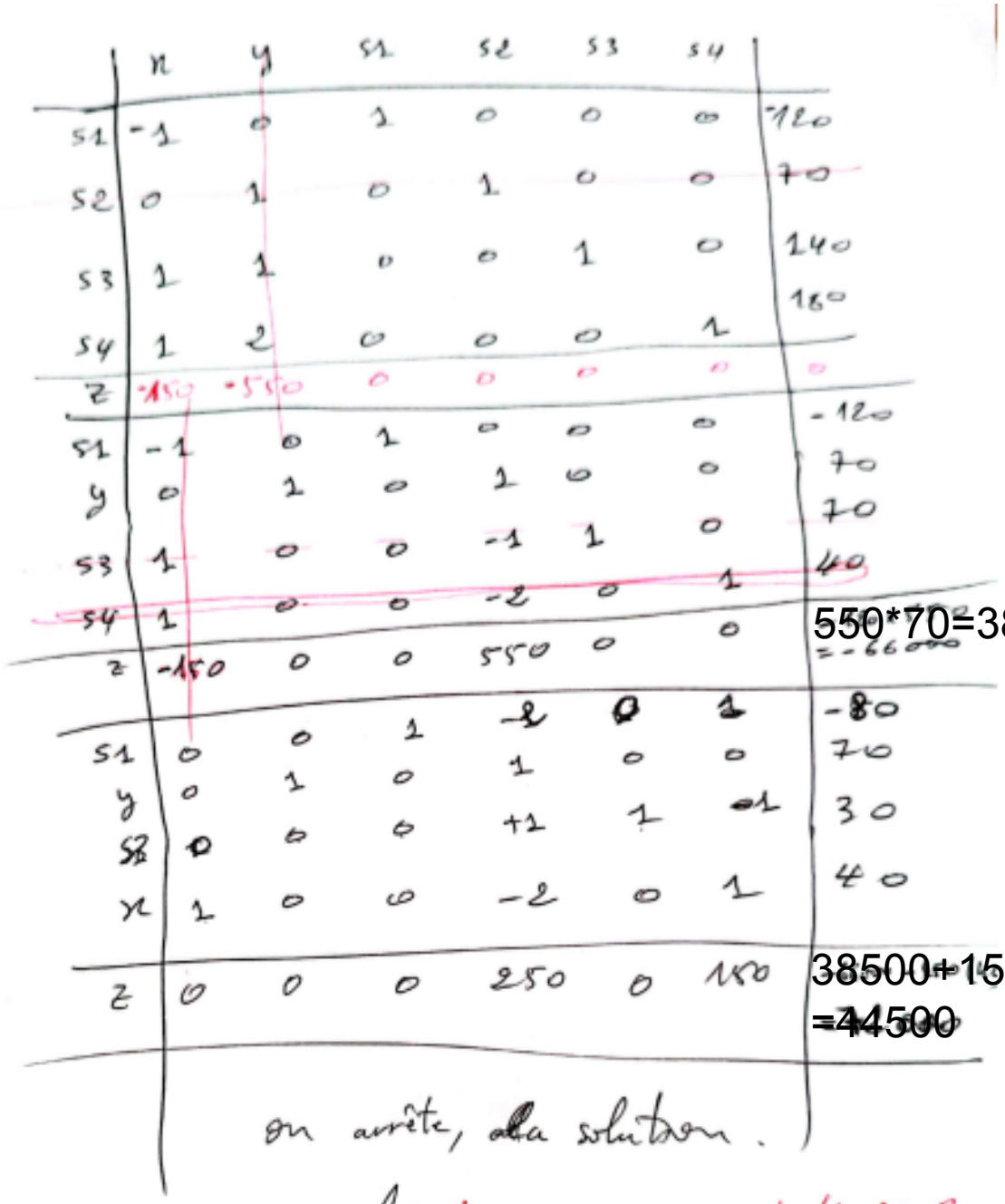
— le domaine admissible est un hexagone convexe,

— la ligne de niveau k est la droite $150x + 550y = k$; les lignes de niveau forment un faisceau de droites parallèles, de pente $-\frac{1}{3}$.

On en déduit : le maximum est atteint sur l'un des sommets de l'hexagone. Il suffit donc de calculer la valeur prise par f sur ses 6 sommets $(0,\ 0)$, $(0,\ 70)$, $(120,\ 0)$, $(40,\ 70)$, $(100,\ 40)$. Le calcul direct nous donne $f_{max} = 44500$ est atteint au point $max = (40,\ 70)$. Il faut produire 40 unités de A et 70 unités de B.

Méthode du Simplexe

On obtient pour maximum $x_1 = 40$, $x_2 = 70$, et $f_{max} = 44500$. $(s_1 = 80, s_2 = 0, s_3 = 30, s_4 = 0)$.



	x	y	s1	s2	s3	s4	
s1	-1	0	1	0	0	0	120
s2	0	1	0	1	0	0	70
s3	1	1	0	0	1	0	140
s4	1	2	0	0	0	1	160
z	-150	-550	0	0	0	0	0
s1	-1	0	1	0	0	0	120
y	0	1	0	1	0	0	70
s3	1	0	0	-1	1	0	70
s4	1	0	0	-2	0	1	40
z	-150	0	0	550	0	0	38500
s1	0	0	1	-2	0	1	80
y	0	1	0	1	0	0	70
s2	0	0	0	+1	1	-1	30
x	1	0	0	-2	0	1	40
z	0	0	0	250	0	150	44500

550*70=38500

38500+150*40
=44500

on arrête, alla solution.

et $(x, y, s1, s2, s3, s4) = (40, 70, -80, 0, 30, 0)$

$z = 44500$