Université Djilali Bounaama **Département de Mathématiques et Informatique**
Faculté des sciences et technologie **Module :Optimisation continue**
M1 :Analyse Mathématique et Applications **Date : 26/11/2025**

Interrogation du premier semestre (60 minutes)

Exercice 1. *Soit le problème suivant :*

$$(P): \quad \begin{cases} f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to Min \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre ce problème en $\mathbb{R}^+$.
Utiliser la résolution graphique pour vous aider.

Exercice 2. *Considérons la fonction :*

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2$$

et cherchons son minimum sur le même polyèdre précédent S (contraintes).

Exercice 3. *Considérons la fonction :*

$$f(x) = (x_1 - 8)^2 + x_2^2$$

et cherchons son minimum sur le même polyèdre précédent S.

À quelle conclusion pouvons-nous arriver finalement ?

Solution

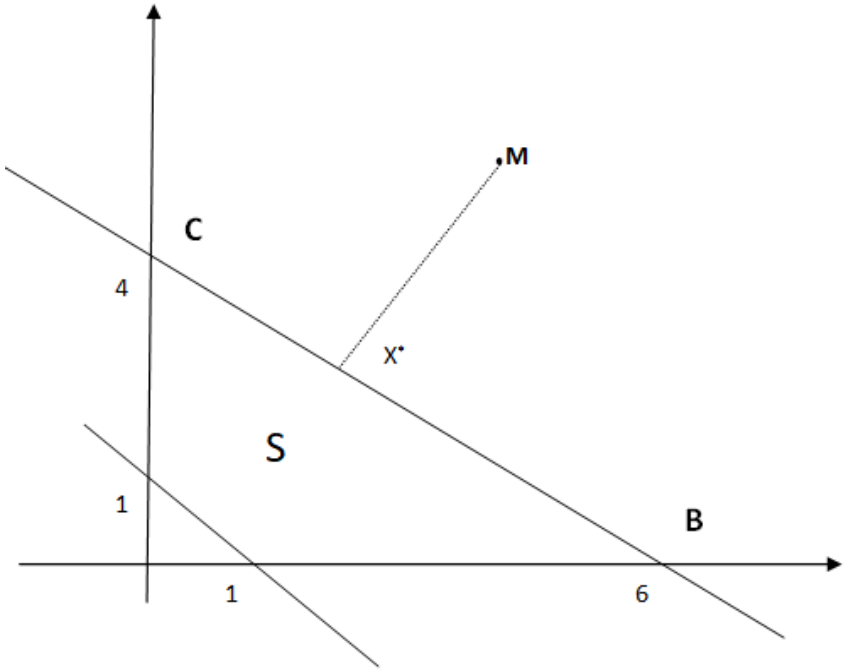
Exercice1

Soit le problème suivant :

$$(P): \begin{cases} f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to Min \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résolution graphique

L'ensemble S est un polytope et il est représenté sur la figure suivante :



L'équation $f(x) = \alpha =$ constante > 0 représente un cercle de centre $M(4, 6)$ et de rayon $R = \sqrt{\alpha}$.
Nous commençons par le centre et faisant augmenter la valeur de α, le premier contact du cercle avec le frontière du domaine réalisable S, donne une valeur x^*, le point x^* est l'intersection des droites perpendiculaire BC et Mx^*, réalise le minimum de la fonction f sur l'ensemble des solutions réalisable S. De plus, le point x^* se trouve sur l'arête du polyèdre S.
La solution est le point $(\frac{24}{13}, \frac{36}{13})$.

Résolution analytique : multiplicateurs de KKT,

On a les conditions de KKT, comme suit :

1. $\mu^* \geq 0$

2. $Df(x^*) + \lambda^{*T} Dh(x^*) + \mu^{*T} Dg(x^*) = 0^T$

3. $\mu^{*T} g(x^*) = 0$

selon notre problèmes les conditions devient,

1. $\mu_1,\ \mu_2 \geq 0$

2. $2(x_1 - 4) - \mu_1 + 2\mu_2 = 0$

3. $2(x_2 - 6) - \mu_1 + 3\mu_2 = 0$

4. $\mu_1(1 - x_1 - x_2) = 0$

5. $\mu_2(2x_1 + 3x_2 - 12) = 0$

6. $1 - x_1 - x_2 \leq 0$

7. $2x_1 + 3x_2 - 12 \leq 0$

Cas 1 : les deux contraintes non active $\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0$

$2(x_1 - 4) = 0$
$2(x_2 - 6) = 0$

donne, $(x_1^*, x_2^*) = (4, 6)$, mais cette solution ne vérifier pas la condition 6. Donc ce point est refusé.

Cas 2 : les deux contraintes actives $\Rightarrow \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0$

$1 - x_1 - x_2 = 0$
$2x_1 + 3x_2 - 12 = 0$

donne, $(x_1^*, x_2^*) = (-9, 10)$, mais cette solution n'est positif. Donc ce point est refusé.

Cas 3 : la première contrainte active et la deuxième non active, $\Rightarrow \mu_1 \geq 0 et \mu_2 = 0$

$1 - x_1 - x_2 = 0 \quad (1)$
$2(x_1 - 4) - \mu_1 = 0 \quad (2)$
$2(x_2 - 6) - \mu_1 = 0 \quad (3)$

$(2) - (3) : \ x_1 - x_2 + 2 = 0 \quad (*)$
$(1) + (*) : \ 3 - 2x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$
$\Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} - 2 = \frac{-1}{2} < 0$
alors, $(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2})$ est refusé.

Cas 4 : la première contrainte non active et la deuxième active, $\Rightarrow \mu_1 = 0 et \mu_2 \geq 0$

$(x_1 - 4) + \mu_2 = 0 \quad (1)$
$2(x_2 - 6) + 3\mu_2 = 0 \quad (2)$
$2x_1 + 3x_2 - 12 = 0 \quad (3)$

$3(1) - (2) : 3(x_1 - 4) - 2(x_2 - 6) = 0 \Rightarrow 3x_1 - 2x_2 = 0 \quad (*)$

$2(3) + 3(*) : \ 4x_1 + 6x_2 - 24 + 9x_1 - 6x_2 = 0 \Leftrightarrow 13x_1 - 24 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{24}{13}$

$\Rightarrow \ x_2 = \frac{3}{2}x_1 = \dfrac{36}{13}$

donne, $(x_1^*, x_2^*) = (\dfrac{24}{13}, \dfrac{36}{13})$

Exercice2 Considérons la fonction :

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2$$

et cherchons son minimum sur le même polyèdre précédent S. Cette fois-ci, le minimum sera atteint au point intérieur :

$$x^* = (4, 1), \qquad f(x^*) = 0$$

Exercice3 Considérons la fonction :

$$f(x) = (x_1 - 8)^2 + x_2^2$$

et cherchons son minimum sur le même polyèdre précédent S. Cette fois-ci, le minimum sera atteint au point intérieur :

$$x^* = (6, 0), \qquad f(x^*) = 4$$