Université Djilali Bounaama **Département de Mathématiques et Informatique**

Faculté des sciences et technologie **Module :Optimisation continue**

M1 :Analyse Mathématique et Applications **Date : 19/12/2024**

Interrogation du premier semestre (40 minutes)

Exercice 1. *Soit* $f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 - x_2x_3 - x_1x_3$ *avec la contrainte :* $x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$

1. *Le problème est il convexe ?*
2. *Déterminer tous les points vérifiant les conditions nécessaires de minimisation de* 1^{er} *ordre.*

Exercice 2. *Résoudre le problème d'optimisation avec contraintes ci-dessous (calculer tous les points) en appliquant les conditions de KKT pour la fonction objectif* $f(x, y)$ *soumis à la fonction de contrainte* $g_1(x, y)$ *et* $g_2(x, y)$.

$$(P): \begin{cases} Minimiser f(x,y) = (x-2)^2 + 2(y-1)^2 \\ g_1(x,y): \quad x + 4y \leqslant 3 \\ g_2(x,y): \quad -x + y \leqslant 0 \end{cases}$$

Bonne chance

Solution de l'exercice 1.

1.

$$\nabla^2(f) =$$

puis on calcul les mineurs principaux (on trouve que tous les mineurs principaux sont null et le $det(\nabla^2(f))) = 0$, alors le problème est convexe.

2. Soit la fonction de Lagrange :

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda h$$

$$= -x_1 - x_2 - x_2x_3 - x_1x_3 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3)$$

où $\lambda \geqslant 0$

Calculant des dérivées partielles pour trouver le point optimal comme ci-dessous :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - x_3 + \lambda = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 - x_3 + \lambda = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -x_2 - x_1 + \lambda = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \tag{4}$$

On trouve la solution $(x_1, 2 - x_1, 1)$

Solution de l'exercice 2.

Soit la fonction de Lagrange :

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y) + \lambda_1 h_1(x, y) + \lambda_2 h_2(x, y)$$

$$= (x - 2)^2 + 2(y - 1)^2 + \lambda_1(x + 4y - 3) + \lambda_2(-x + y)$$

où $\lambda_1 \geqslant 0$ et $\lambda_1 \geqslant 0$

Calculant des dérivées partielles pour trouver le point optimal comme ci-dessous :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x - 2) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4(y-1) + 4\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{6}$$

$$\lambda_1(x + 4y - 3) = 0 \tag{7}$$

$$\lambda_2(-x + y) = 0 \tag{8}$$

$$x + 4y \leqslant 3 \tag{9}$$

$$-x + y \leqslant 0 \tag{10}$$

$$\lambda_1 \geqslant 0 \tag{11}$$

$$\lambda_2 \geqslant 0 \tag{12}$$

Nous devons vérifier quatre cas possibles comme indiqué ci-dessous :

Cas 1 : Lorsque $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$.

En utilisant les équations (1) et (2), on obtient, $x = 2$ et $y = 1$; ces valeurs de x et y ne satisfont pas les équations (5) et (6).

Ce n'est donc pas une solution possible ou optimale.

Cas 2 : Lorsque la contrainte primale (A) est inactive et la contrainte primale (B) est active, c'est-à-dire, $\lambda_1 = 0$ et $-x + y = 0$.

Puis en remplaçant les valeurs ci-dessus dans les équations (1) et (2), on obtient :

$$2(x-2) - \lambda_2 = 0$$

et

$$4(y-1) + \lambda_2 = 0$$

En résolvant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$x = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{4}{3}, \lambda_2 = -\frac{4}{3}$$

La valeur de λ_2 ne satisfont pas les équations (7) et (8). Donc, ce n'est pas une solution possible ou optimale.

Cas 3 : Lorsque la contrainte primale (A) est active et la contrainte primale (B) est inactive, c'est-à-dire, $x + 4y = 3$ et $\lambda_2 = 0$.

Puis en remplaçant les valeurs ci-dessus dans les équations (1) et (2), on obtient :

$$2(x-2)+\lambda_1=0$$

et

$$4(y-1)+4\lambda_1=0$$

En résolvant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$x=\frac{5}{3},\quad y=\frac{1}{3},\lambda_1=\frac{2}{3}$$

Les valeurs de x, y, λ_1, λ_2 satisfont les équations $(1)-(8)$. Donc, ce cas est l'une des solutions possibles ou optimales.

Cas 4 : Lorsque les deux contraintes (A) et (B) sont actives, c'est-à-dire, $x+4y=3$ et $-x+y=0$.

Puis en résolvant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$x=\frac{3}{5},\quad y=\frac{3}{5}.$$

En remplaçant les valeurs ci-dessus dans les équations (1) et (2), on obtient : $\lambda_1=\frac{22}{25}$, $\lambda_2=-\frac{48}{25}$

La valeur de λ_2 ne satisfont pas l'équation (8).

: Ce n'est donc pas une solution possible ou optimale. D'où la seule solution possible à la fonction objectif f est le cas 3. Ainsi,

La solution optimale :

$$x^*=\frac{5}{3},\quad y^*=\frac{1}{3}$$

La valeur optimal : $f(x^*,y^*)=(\frac{5}{3}-2)^2+2(\frac{1}{3}-1)^2$

$$f(x^*,y^*)=1$$

Les valeurs de x, y, λ_1, λ_2 satisfont les équations $(1)-(8)$. Donc, ce cas est l'une des solutions possibles ou optimales.