Optimisation continue

Farida Meghatria

University of Khemis Miliana

Cours et exercices, Master 1, Analyse Mathématique et Applications

Contents

1. Multiplicateurs de Lagrange
2. Théorème de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)
3. Méthodes primales-duales
   - Lagrangien Augmenté

Multiplicateurs de Lagrange

Problème : Minimiser une fonction $f(x)$ sous contraintes d'égalité $h_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x)$$

Conditions nécessaires (si x^* est optimal) :

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0 \quad \text{et} \quad h_i(x^*) = 0 \quad \forall i$$

Théorème des multiplicateurs de Lagrange

Soit le problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{sous les contraintes} \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème

Théorème (Lagrange) Si x^* est une solution locale, et si les gradients des contraintes $\nabla h_1(x^*), \ldots, \nabla h_m(x^*)$ sont linéairement indépendants, alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0$$

ou, en notation matricielle :

$$\nabla f(x^*) + J_h(x^*)^T \lambda = 0$$

où $J_h(x^*)$ est la jacobienne des contraintes, et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T$.

Théorème de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Considérons le problème d'optimisation non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Minimiser} \quad & f(x) \\ \text{sous les contraintes} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont toutes des fonctions continûment différentiables.

Théorème

(Conditions KKT) Si x^* est un point optimal local, et que certaines conditions de régularité (comme celle de Slater) sont satisfaites, alors il existe des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_i \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $\mu_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 1, \ldots, p$, tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

1. ***Stationnarité*** *:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0$$

2. ***Primalité (feasibility)*** *:*

$$g_i(x^*) \leq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

$$h_j(x^*) = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, p$$

3. ***Dualité (dual feasibility)*** *:*

$$\lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

4. ***Complémentarité*** *:*

Remarque

Pour que les conditions KKT soient nécessaires, une condition de qualification des contraintes doit être satisfaite. Par exemple, la condition de Slater : il existe un point strictement admissible x tel que :

$$g_i(x) < 0 \quad \textit{et} \quad h_j(x) = 0$$

alors les conditions KKT sont nécessaires pour un minimum local.

Entrée : Fonction objectif $f(x)$, contraintes $g_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$ **Sortie :** Point stationnaire x^*, multiplicateurs de Lagrange λ^* Former le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

Calculer le gradient de $\mathcal{L}$:

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x)$$

Écrire le système :

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \\ g_i(x) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Résoudre ce système non linéaire pour obtenir (x^*, λ^*) Vérifier si x^* est un minimum (Hessienne ou convexité de f) **return** (x^*, λ^*)

Algorithme 1 : Méthode de Lagrange (pour contraintes d'égalité)

Algorithme de Lagrange
Minimiser $f(x, y) = x^2 + y^2$
Sous la contrainte $g(x, y) = x + y - 1 = 0$

Définir $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $g(x, y) = x + y - 1$ **Former** le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

Calculer les dérivées partielles :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x + \lambda, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y + \lambda, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x + y - 1$$

Résoudre le système :

$$\begin{aligned} 2x + \lambda &= 0 \\ 2y + \lambda &= 0 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

Déduire : $x = y = \frac{1}{2}$, $\lambda = -1$ **Calculer le minimum** : $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ **return** $x^* = \frac{1}{2}$, $y^* = \frac{1}{2}$, $\lambda^* = -1$, $f(x^*, y^*) = \frac{1}{2}$

Algorithme 2 : Résolution avec multiplicateurs de Lagrange

Exemple:Conditions KKT (contrainte d'inégalité)
Minimiser $f(x, y) = x^2 + y^2$
Sous la contrainte $h(x, y) = x + y - 1 \leq 0$

Former le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, y, \mu) = x^2 + y^2 + \mu(x + y - 1)$$

Écrire les conditions KKT :

$$\begin{aligned} 2x + \mu &= 0 \\ 2y + \mu &= 0 \\ x + y - 1 &\leq 0 \\ \mu &\geq 0 \\ \mu(x + y - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Cas 1 : $\mu = 0 \Rightarrow x = y = 0$ Vérifier : $x + y - 1 = -1 \leq 0 \Rightarrow$ admissible **Cas 2 :** $x + y - 1 = 0 \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$ $\mu = -1 \Rightarrow$ rejeté car $\mu < 0$ **return** $x^* = 0,\ y^* = 0,\ \mu^* = 0,\ f^* = 0$

Algorithme 3 : Méthode KKT pour contrainte d'inégalité

Méthodes primales-duales

Problème : Minimiser $f(x)$ sous la contrainte $h(x) = 0$ **Itérations :**

$$x^{k+1} = \arg\min_x \mathcal{L}(x, \lambda^k)$$
$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho\, h(x^{k+1})$$

$\surd$ Remarques: La méthode est simple mais converge lentement sauf pour des problèmes très bien conditionnés (convexes, linéaires...).
Méthode simple, adaptée aux problèmes convexes. Elle peut être vue comme un gradient ascent sur le dual, avec minimisation exacte sur le primal à chaque itération.

Minimiser $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
Sous la contrainte $x - 1 = 0$

Lagrangien

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda(x - 1)$$

Résultat attendu

$$x^* = 1, \quad \lambda^* = -1, \quad f(x^*) = \frac{1}{2}$$

Lagrangien Augmenté pour des contraintes d'égalité

On considère le problème d'optimisation sous contraintes d'égalité suivant :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.c.} \quad & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

où :

- $f(x)$ est la fonction objectif à minimiser,
- $h(x) = (h_1(x), \ldots, h_m(x))^\top$ est le vecteur des contraintes d'égalité.

1. *Principe de la méthode*

La méthode du **Lagrangien augmenté** combine :

- la méthode classique des multiplicateurs de Lagrange,
- la méthode de pénalisation quadratique.

2. *Le Lagrangien augmenté*

Le Lagrangien augmenté s'écrit :

$$\mathcal{L}_A(x, \lambda; \mu) = f(x) + \lambda^\top h(x) + \frac{\mu}{2}\|h(x)\|^2$$

où :

- $\lambda \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange,
- $\mu > 0$ est un paramètre de pénalisation.

3. Algorithme de la méthode

Entrées:

- Fonction $f(x)$, contraintes $h(x)$,
- Initialisation : x^0, λ^0, $\mu > 0$,
- Tolérance $\varepsilon > 0$.

Étapes de l'algorithme:

1. **Initialisation** : Choisir x^0, λ^0, $\mu > 0$, $k = 0$
2. **Minimisation du Lagrangien augmenté :**

$$x^{k+1} = \arg\min_x \left[f(x) + (\lambda^k)^\top h(x) + \frac{\mu}{2} \|h(x)\|^2 \right]$$

3. **Mise à jour des multiplicateurs de Lagrange :**

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \mu h(x^{k+1})$$

4. **Critère d'arrêt :** arrêter si

$$\|h(x^{k+1})\| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\nabla f(x^{k+1}) + \nabla h(x^{k+1})^\top \lambda^{k+1}\| \leq \varepsilon$$

5. **Sinon :** poser $k \leftarrow k + 1$, retourner à l'étape 2.