Optimisation continue

Farida Meghatria

University of Khemis Miliana

Cours et exercices, Master 1, Analyse Mathématique et Applications

Contents

Exemples concrets

Afin de mieux comprendre la formulation et les concepts précédemment introduits, nous présentons ici deux exemples de problèmes d'optimisation dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1 : Optimisation sans contraintes

Considérons la fonction quadratique suivante :

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 8x_2,$$

où $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$.
Ce problème peut être formulé ainsi :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x).$$

Solution : La fonction f est différentiable. Son gradient est :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 4x_2 - 8 \end{pmatrix}.$$

On annule le gradient pour trouver les points stationnaires :

$$\begin{cases} 2x_1 - 4 = 0 \\ 4x_2 - 8 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 2.$$

La hessienne est constante :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

qui est définie positive. Ainsi, f est convexe et $x^* = (2,2)^T$ est un minimum global.

Valeur optimale :

$$f(2,2) = 2^2 + 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 8 \cdot 2 = 4 + 8 - 8 - 16 = -12.$$

Exemple 2 : Optimisation avec contraintes linéaires

Considérons le problème suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \quad f(x) = x_1 + x_2$$

$$\text{sous les contraintes : } \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Interprétation : Le domaine admissible est un polygone convexe dans $\mathbb{R}^2$, délimité par les axes et la droite $x_1 + 2x_2 = 4$.

Méthode graphique (résumé) : Puisque $f(x) = x_1 + x_2$ est linéaire, le minimum est atteint à l'un des sommets du polygone de faisabilité.
Les sommets sont :

$$A = (0, 0), \quad B = (4, 0), \quad C = (0, 2).$$

On évalue f sur ces sommets :

$$f(A) = 0, \quad f(B) = 4, \quad f(C) = 2.$$

Conclusion : le minimum est atteint en $A = (0, 0)$, avec $f^* = 0$.

Quelques références

J. Nocedal, S. Wright, *Numerical Optimization*, Springer.

D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*.

S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*.