Optimisation continue

Farida Meghatria

University of Khemis Miliana

Cours et exercices, Master 1, Analyse Mathématique et Applications

Contents

1. Introduction
2. Classification des problèmes d'optimisation
3. Définitions fondamentales
4. Quelques problèmes d'optimisation dans $\mathbb{R}$

Introduction

Introduction

L'optimisation constitue une discipline fondamentale dans l'analyse et la résolution de problèmes impliquant la prise de décision, qu'il s'agisse de domaines tels que l'ingénierie, l'économie, les sciences des données ou encore la logistique. Dans tout processus décisionnel, il s'agit de choisir, parmi un ensemble d'alternatives possibles, celle qui conduit à la meilleure performance selon un critère donné.

Introduction

Ce critère, souvent appelé fonction objectif ou indice de performance, permet d'évaluer la qualité des différentes options. L'objectif de l'optimisation est donc de déterminer la solution optimale – c'est-à-dire celle qui maximise (ou minimise) cette fonction – tout en respectant éventuellement un ensemble de contraintes liées au problème étudié.

Introduction

L'optimisation dans $\mathbb{R}^n$ se concentre sur les problèmes où les *variables de décision* sont des vecteurs réels de dimension n. Ces problèmes peuvent être très simples (comme trouver le minimum d'une fonction quadratique sans contraintes), ou très complexes (comme l'optimisation de réseaux neuronaux ou la planification de systèmes industriels).

Introduction

Ce chapitre a pour objectif de poser les bases formelles nécessaires à l'étude des problèmes d'optimisation dans $\mathbb{R}^n$. Nous introduirons les notations, la formulation générale des problèmes, les types de contraintes, ainsi que les différentes catégories de problèmes que l'on peut rencontrer. Ces fondations permettront d'aborder, dans les chapitres suivants, les *conditions d'optimalité*, les *méthodes de résolution* analytiques ou numériques, ainsi que certains cas particuliers comme les problèmes convexes ou linéaires.

Introduction

Un *problème d'optimisation* dans $\mathbb{R}^n$ consiste à déterminer les valeurs d'un vecteur de variables $x \in \mathbb{R}^n$ qui minimisent (ou maximisent) une fonction objectif $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tout en satisfaisant éventuellement certaines contraintes.

Formulation générale

La forme générale d'un problème d'optimisation peut s'écrire comme suit :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad f(x)$$
$$\text{sous les contraintes :} \quad x \in S,$$

où :

- $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ est le vecteur des variables de décision ;
- $f(x)$ est la fonction objectif à minimiser ;
- $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points admissibles (aussi appelé ensemble de *faisabilité*), défini par un ensemble de contraintes.

Types de contraintes

L'ensemble S peut être défini à l'aide de deux types de contraintes :

- **Contraintes d'égalité** : $h_i(x) = 0$, pour $i = 1, \ldots, m$;
- **Contraintes d'inégalité** : $g_j(x) \leq 0$, pour $j = 1, \ldots, p$.

Ainsi, la formulation complète devient :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad f(x)$$

sous les contraintes :

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Classification des problèmes d'optimisation

Les problèmes d'optimisation peuvent être classés selon plusieurs critères, en fonction de la présence ou non de contraintes, de la nature des fonctions intervenant dans la formulation (objectif et contraintes), ou encore des propriétés géométriques de ces fonctions et de l'ensemble admissible. Cette classification permet de mieux comprendre la difficulté du problème et les méthodes de résolution appropriées.

Optimisation sans contraintes

Il s'agit de la forme la plus simple d'un problème d'optimisation, où l'on cherche à minimiser une fonction f définie sur tout $\mathbb{R}^n$ sans aucune contrainte :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Dans ce cas, tout point $x \in \mathbb{R}^n$ est admissible. Ce type de problème est souvent utilisé comme point de départ pour comprendre les concepts de base (gradient, hessienne, etc.).

Optimisation sous contraintes

Lorsque certaines restrictions s'appliquent aux variables de décision, le problème prend la forme :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad f(x)$$

sous les contraintes :

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, p.$$

La présence de contraintes peut considérablement compliquer la résolution du problème, en particulier si ces contraintes sont non linéaires.

Optimisation convexe

Un problème est dit *convexe* si :

- la fonction objectif f est convexe,
- l'ensemble admissible S est un ensemble convexe (défini par des fonctions convexes pour les inégalités, affines pour les égalités).

Dans ce cas, tout minimum local est également un minimum global, ce qui simplifie grandement l'analyse et les méthodes de résolution.

Optimisation non convexe

Si au moins l'une des conditions de convexité n'est pas remplie, le problème est dit *non convexe*. Ces problèmes sont en général plus difficiles à résoudre, car ils peuvent admettre plusieurs optima locaux. Des techniques spécifiques sont alors requises (méthodes heuristiques, globales, etc.).

Autres classifications selon la nature de $f(x)$

On distingue aussi les problèmes selon la forme de la fonction objectif :

- **Problème linéaire** : $f(x)$ est une fonction linéaire, et les contraintes sont linéaires.
- **Problème quadratique** : $f(x)$ est une fonction quadratique, typiquement de la forme $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + d$.
- **Problème non linéaire** : $f(x)$ ou les contraintes sont non linéaires.

Chaque type de problème nécessite des méthodes spécifiques : le simplexe ou l'analyse duale pour les problèmes linéaires, les méthodes de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour les problèmes non linéaires, ou encore des algorithmes numériques sophistiqués pour les problèmes de grande dimension.

Définitions fondamentales

Avant d'aborder les méthodes de résolution des problèmes d'optimisation, il est essentiel de définir quelques notions fondamentales qui permettent de mieux comprendre la structure des solutions possibles.

Point admissible

Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est dit **admissible** (ou *faisable*) s'il satisfait toutes les contraintes du problème. Autrement dit, x appartient à l'ensemble de faisabilité S :

$$x \in S \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g_j(x) \leq 0, & \text{pour } j = 1, \ldots, p, \\ h_i(x) = 0, & \text{pour } i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Point optimal (ou solution optimale)

Un point admissible $x^* \in S$ est une **solution optimale** (ou un **point optimal**) du problème s'il minimise la fonction objectif :

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in S.$$

Dans ce cas, on dit que x^* est un *minimum global*.

Minimum local

Un point admissible $x^* \in S$ est un **minimum local** s'il existe un voisinage $V(x^*)$ tel que :

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in S \cap V(x^*).$$

Un minimum local n'est pas nécessairement un minimum global, sauf dans le cas d'un problème convexe, où les deux coïncident.

Ensemble des solutions

L'ensemble des points optimaux est noté :

$$\mathcal{X}^* = \{x \in S \mid f(x) = f^*\},$$

où f^* est la **valeur optimale** du problème, définie comme :

$$f^* = \inf_{x \in S} f(x).$$

On parle de *minimum atteint* si f^* est obtenu pour au moins un point $x \in S$.

Problème réalisable

Un problème est dit **réalisable** (ou *faisable*) s'il existe au moins un point admissible, c'est-à-dire si $S \neq \emptyset$.

Problème bien posé

Un problème est dit **bien posé** s'il est réalisable, que la fonction objectif est bornée inférieurement sur S, et que la valeur optimale est atteinte. Sinon, le problème est dit *mal posé*.

Quelques problèmes d'optimisation dans $\mathbb{R}$

Minimisation d'une fonction quadratique

$\surd$ Minimisation d'une fonction quadratique: minimisation du coût de production

Une entreprise fabrique un produit. Le coût de fabrication (en euros) en fonction du nombre d'unités produites x est donné par :

$$C(x) = x^2 - 10x + 400$$

où x représente le nombre d'unités produites par jour.
On cherche à :

$$\min_{x \in \mathbb{R}} C(x)$$

1. Étape 1 : dérivée première

$$C'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 10x + 400) = 2x - 10$$

2. Étape 2 : condition du premier ordre

$$C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

3. Étape 3 : vérification du minimum

$$C''(x) = \frac{d}{dx}(2x - 10) = 2 > 0$$

Donc, $x = 5$ est un minimum global.

4. Étape 4 : coût minimal

$$C(5) = 5^2 - 10 \cdot 5 + 400 = 25 - 50 + 400 = 375$$

Conclusion

Pour minimiser le coût de production, l'entreprise doit produire **5 unités** par jour.
Le coût minimal est de **375 euros**.

Exercice

Trouver le minimum de la fonction:

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = x^2 + 4x + 5$$

Maximisation d'une fonction de revenu (économie)

Une entreprise vend un produit à un prix unitaire dépendant de la quantité vendue :

$$p(x) = 100 - 2x$$

Le revenu total est donné par :

$$R(x) = x \cdot p(x) = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$$

Le Problème à résoudre est:

$$\max_{x \in [0,50]} R(x) = -2x^2 + 100x$$

Étape 1 : dérivée première

$$R'(x) = \frac{d}{dx}(-2x^2 + 100x) = -4x + 100$$

Étape 2 : condition du premier ordre

$$R'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 25$$

Étape 3 : vérification du maximum

$$R''(x) = \frac{d}{dx}(-4x + 100) = -4 < 0$$

Donc, $x = 25$ est un **maximum global** (car la fonction est concave).

Étape 4 : revenu maximal

$$R(25) = -2 \cdot 25^2 + 100 \cdot 25 = -1250 + 2500 = 1250$$

Conclusion

Pour maximiser son revenu, l'entreprise doit vendre **25 unités** par jour.
Le revenu maximal est de **1250 euros**.

Résultat: Quantité optimale à vendre: 25
Revenu maximal:1250 euro.

Minimisation d'un coût de production

Problème concret : minimiser un coût de production
Une entreprise fabrique des pièces mécaniques. Le coût de production total en fonction du nombre de pièces produites par jour x (en centaines d'unités) est donné par:

$$C(x) = 0{,}5x^2 - 6x + 150$$

où $C(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1. Quel est le nombre optimal de pièces à produire pour minimiser le coût de production journalier ?
2. Quel est le coût minimal ?

Nous cherchons à minimiser ce coût :

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+} C(x)$$

1. *Étape 1: dérivée première*

$$C'(x) = \frac{d}{dx}(0{,}5x^2 - 6x + 150) = x - 6$$

2. Étape 2: condition du premier ordre

$$C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

3. Étape 3: vérification du minimum

$$C''(x) = \frac{d}{dx}(x - 6) = 1 > 0$$

Donc, $x = 6$ est un minimum global.

4. Étape 4: coût minimal

$$C(6) = 0{,}5 \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + 150 = 18 - 36 + 150 = 132$$

Le coût minimal est donc de 132 centaines d'euros, soit 13200 euro.

Conclusion

L'entreprise doit produire **600 pièces** par jour pour minimiser ses coûts.
Le coût minimal est de **13200 euro**.

Résultat final:
Le problème peut être améliorer par:

1. Un graphe de $C(x)$ avec minimum visible ?
2. Une contrainte de production (ex : capacité max ou min) ?
3. Le coût marginal ou d'autres aspects économiques ?

Coût total de production

Conclusion

$$xC(x)^2 - 6 * x + 150; ^2 - 6x + 150x \ (6, 6132)$$

Exercice

$$\min_{x>0} \ C(x) = 0{,}1x^2 - 5x + 200$$

Quelques références

[1] J. Nocedal, S. Wright, *Numerical Optimization*, Springer.

[2] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*.

[3] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*.