Chapitre 1

Définition des problèmes d'optimisation dans $\mathbb{R}^n$

Table des matières

1 Définition des problèmes d'optimisation dans $\mathbb{R}^n$ 3

1.1 Introduction 3

1.2 Problèmes d'optimisation 4

1.2.1 Classification de problèmes d'optimisation 5

1.3 Terminologie 7

1.4 Conventions sur les notations 9

1.4.1 Expression matricielle des gradients 9

1.4.2 Expression des matrices jacobiennes 11

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de définir d'abord le domaine d'optimisation. Les problèmes d'optimisation cherchent le meilleur rendement possible. Selon la nature de l'espace de recherche, des contraintes et des objectifs, on définit plusieurs types d'optimisation. Ce chapitre explique les notions de bases de l'optimisation (Blum et Roli, 2003), (Urli, 2014), (Walter, 2015), (Ouaarab, 2015), (Layeb, 2010), (Belhoul, 2014), (Solnon, 2010).

Au point de vue de motivation l'optimisation intervient dans de nombreux domaines :

- --→ en recherche opérationnelle (problèmes de transport,économie, gestion de stocks, ...)
- --→ en analyse numérique (approximation / résolution de systèmes linéaires, non linéaires, ...)
- --→ en automatique (modélisation de systèmes, filtrage, ...)
- --→ en ingénierie (dimensionnement de structures, conception optimale de systèmes (réseaux, ordinateurs, ...))

Différentes types d'optimisation sont présentés selon le problème étudié.

1.2 Problèmes d'optimisation

L'optimisation est un nom féminin qui définit une action du verbe optimiser. C'est la démarche consistant à rendre optimal le fonctionnement d'un système : *Donner à quelque chose (à une machine, à une entreprise, etc.) le rendement optimal en créant les conditions les plus favorables ou en tirant le meilleur parti possible.*

L'optimisation appartient au domaine de la Recherche Opérationnelle qui représente la science de prise de décision. Un problème d'optimisation en mathématique consiste à trouver la **meilleure** solution possible pour un problème donné.

Définition 1. *Problème d'optimisation*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *un entier strictement positif,*

$X \subset \mathbb{R}^n$ *un sous-ensemble non vide*

$f : X \to \mathbb{R}$ *une fonction à valeur réelle.*

Un problème d'optimisation consiste à trouver la meilleure solution $x \in X$ *appelée solution globale.*

Formulation mathématique

$$\min_{x \in R^n} f(x) \quad \text{sous} \quad \begin{cases} c_E(x) = 0 \\ c_I(x) \leq 0 \\ x \in X \end{cases}$$

→ formulation standard problème noté (PO)

Notations

- x : n **variables** ou paramètres ou inconnues → vecteur de R^n
- f : **critère** ou fonction **coût** ou fonction objectif → fonction de R^n dans R, $x \in R^n \mapsto f(x) \in R$
- c_E : p **contraintes d'égalité** → fonction de R^n dans R^p, $x \in R^n \mapsto c_E(x) \in R^p$
- c_I : q **contraintes d'inégalité** → fonction de R^n dans R^q, $x \in R^n \mapsto c_I(x) \in R^q$
- X : ensemble convexe $X \subseteq R^n$ → valeurs admissibles des variables

La meilleure solution du problème varie selon l'objectif. On parle d'une minimisation ou une maximisation de la fonction f sur l'ensemble X. On note : $x = \underset{x \in X}{f}(x)$ ou $x = \max_{x \in X} f(x)$

- Classification des problèmes d'optimisation
  - Optimisation continue dans R^n
- Formulation mathématique et notations
  - Variables
  - Critère
  - Contraintes
- Norme sur R^n
  - Norme vectorielle
  - Norme matricielle
- Suite dans R^n
  - Limite
  - Vitesse de convergence

1.2.1 Classification de problèmes d'optimisation

Il existe plusieurs famille d'optimisation. Il est important de bien identifier à quelle catégorie appartient le problème pour pouvoir choisir la conduite de la résolution. Les problèmes d'optimisation diffèrent selon l'espace de recherche, les contraintes, les objectifs, etc.

--→ Optimisation linéaire : étudie le cas où la fonction objectif et les contraintes sont linéaires,

f est une fonction linéaire : $f(x) =< c, x >$

S est défini par des fonctions affines : $ax + b \geqslant 0$

C'est une méthode très employée pour établir les programmes des raffineries pétrolières, mais aussi pour déterminer la composition la plus rentable d'un mélange salé, sous contraintes, à partir des prix de marché du moment.

--→ Optimisation linéaire en nombres entiers : étudie les problèmes d'optimisation linéaire dans lesquels certaines ou toutes les variables sont contraintes de prendre des valeurs entières. Ces problèmes peuvent être résolus par différentes méthodes : séparation et évaluation, méthode des plans sécants.

--→ Optimisation linéaire quadratique

Optimisation fonctionnelle / paramétrique

- Inconnues = fonctions → Optimisation fonctionnelle
  Optimisation en dimension infinie
  Commande optimale

- Inconnues = entiers ou réels → Optimisation paramétrique
  Optimisation en dimension finie
  Programmation mathématique

Programmation mathématique

- Inconnues = entiers → Optimisation combinatoire
  Programmation en nombres entiers

- Inconnues = réels → **Optimisation continue**
  Programmation linéaire (LP)
  Programmation non linéaire (NLP)

- Inconnues = entiers et réels → Programmation mixte

f est une fonction convexe quadratique : $f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > + < b, x >$

A est une matrice symétrique semi-définie positive.

S est définie par des fonctions affines : $ax + b \geqslant 0$

--→ Optimisation convexe

f est une fonction convexe et S un domaine convexe.

--→ Optimisation différentiable

f est une fonction différentiable,

S est défini par des fonctions (=contraintes) différentiables.

--→ Optimisation non différentiable

par exemple, $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)\}$.

--→ Optimisation en dimension infinie

Par exemple, le problème variationnel $J(x) = \int_0^T L(t, x(t), x'(t))dt$ avec x dans un ensemble de fonctions X, $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_T$.

Remarque 1. *L'optimisation est une branche des mathématiques.*
Dans la pratique, on part d'un problème concret (réel), on le modélise et on le résoudre mathématiquement (analytiquement en problème d'optimisation et numériquement en programme mathématique).

Remarque 2. *Lien minimum / maximum*

Soit f une fonction dont on veut trouver le maximum.
Le problème $\max_{x \in S} f(x)$ renvois (x_0, v) alors que le problème $\min_{x \in S} f(x)$ renvois $(x_0, -v)$, d'où le lien.
Ainsi la recherche d'un maximum peut toujours se ramener à la recherche d'un minimum.

1.3 Terminologie

Variables de décision

Le vecteur $x \in X$ est appelé vecteur de décision. Les éléments formant le vecteur de décision sont appelés *variables de décision*. Ce sont les variables recherchées dans le problème.

Dimension de problème

La dimension du problème est représentée par le nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$. Elle représente le nombre de variables de décision. Une solution à un problème de 3 dimensions est un vecteur de 3 éléments (3-uplet).

Espace de recherche et Solution admissible

L'ensemble X de dimension n contient les valeurs que le vecteur x peut prendre. Ces dernières sont appelées solutions admissibles ou faisables (ou encore solutions candidates). Une solution admissible est une affectation de toutes les variables de décision , qui répond aux contraintes du problème. L'ensemble X est connu sous différentes appellations : ensemble admissible, espace de solution, espace de recherche, domaine de recherche etc.

Contraintes

L'espace de recherche S est limité par quelques règles. Une contrainte est une condition que doivent respecter les vecteurs de décision du problème.

Solution optimale

C'est la meilleure solution $\bar{x} \in S$ du problème. Elle est appelée *solution globale ou optimale*

Fonction objectif

la fonction f, à valeur scalaire, sert de critère pour déterminer la meilleure solution du problème. Elle est appelée fonction d'objectif (fonction fitness, critère, etc). Elle attribue à chaque solution $x \in S$ de l'espace de recherche, un nombre réel indiquant sa valeur (son score).

Minimisation

Une minimisation revient à trouver un élément $\bar{x}$ de S tel que : $\forall x \in S : f(\bar{x} \leqslant f(x)$. On dit qu'on cherche **à minimiser** la fonction f sur l'ensemble S. Dans ce cas la fonction d'objectif f est connue comme une fonction de **coût** . Le vecteur x est une borne inférieure de l'ensemble S.

Maximisation

Une maximisation revient à trouver un élément $\bar{x}$ de S tel que : $\forall x \in S : f(\bar{x} \geqslant f(x)$. On dit qu'on cherche **à maximiser** la fonction f sur l'ensemble S. Dans ce cas la fonction objectif f est connue comme une fonction d'**utilité** ou de **profit** . Le vecteur x est une borne supérieure de l'ensemble S.

Minimum et maximum stricte

On parle d'un minimum stricte (respectivement un maximum stricte) si : $\forall x \in S : f(\bar{x} < f(x)$ (respectivement $\forall x \in S : f(\bar{x} > f(x))$.

Voisinage

Une solution voisine d'une solution x est définit comme une légère modification de la solution x . Cette modification est appelée aussi mouvement. Le voisinage de la solution x est l'ensemble des solutions voisines de x.

Optimum global et local

Un optimum global est la valeur de la fonction objectif de la solution globale . On peut avoir plusieurs solutions locales mais un seul optimum globale .

1.4 Conventions sur les notations

Les scalaires sont en général noté s avec une lettre minuscule italique. Les vecteurs (matrices lignes ou colonnes) sont généralement notés avec une lettre grasse, généralement minuscule : $l = v^T$.

Les matrices sont généralement notées avec une lettre majuscule grasse. L'expression $s = \frac{1}{2}x^T Ax$ réunit ces 3 notations.

1.4.1 Expression matricielle des gradients

Considérons une fonction scalaire s de plusieurs variables :

$$s = S(x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...) = S(X, Y, ...)$$

Le gradient de s par rapport au vecteur x de dimension n sera noté $\nabla_x S$:

$$\nabla_x S = \frac{\partial S}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial x_1} \\ \frac{\partial S}{\partial x_2} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial S}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Si $s = s_0$ est une constante par rapport à x,alors $\nabla_x S = 0$

Remarque 3. *Nous traitons le gradient $\nabla_x S$ comme un vecteur colonne, contraire à un usage fréquent que l'on trouve dans les ouvrages purement mathématiques où il est traité comme un vecteur ligne.*

1. **Gradient d'une forme linéaire**

   Considérons,

$$s = s_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n = s_0 + b^Tx = s_0 + x^Tb$$

Alors,

$$\nabla_x s = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} = b$$

Soit :

$$\nabla_x(s_0 + x^Tb) = b$$

2. **Gradient d'une forme quadratique**

Considérons,

$$s = s_0 + x^Tb + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j = s_0 + X^Tb + \frac{1}{2}X^TCX$$

On peut toujours considérer que b est symétrique. En effet :

$$s = \frac{s + s^T}{2} = s_0 + X^Tb + \frac{1}{2}X^T\left(\frac{C + C^T}{2}\right)X$$

$s = s_0 + X^Tb + \frac{1}{2}X^TAX$ avec A symétrique : $A = \dfrac{C + C^T}{2}$

il vient,

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = b_k + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_{ik}x_i = b_k + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_{ik}c_{kj}}{2}x_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = b_k + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$$

d'où

$$\nabla_x\left(s_0 + X^Tb + \frac{1}{2}X^TAX\right) = b + AX$$

En résumé, dans le cas d'une forme linéaire $s = X^T b = b^T X$, on a $\nabla_x s = b$ et dans le cas d'une forme quadratique $s = \frac{1}{2} X^T A X$ on a $\nabla_x s = AX$. Dans le cas d'une forme linéaire le vecteur gradient est le facteur de X^T et dans le cas d'une forme quadratique c'est le facteur de $\frac{1}{2} X^T$

1.4.2 Expression des matrices jacobiennes

Soit une fonction vectorielle différentiable $f(X)$ de dimension m sur un espace de point $X \in \mathbb{R}^n$ de dimension n. Notons, $x_1, x_2, ..., x_n$, les coordonnées de X et $f_1, f_2, ..., f_m$ les composantes de $f(X)$.

$$f(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ . \\ . \\ . \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{bmatrix}$$

Par convention, nous noterons,

$$J = \frac{\partial f}{\partial X}$$

la matrice formée des éléments suivants,

$$J = \begin{bmatrix} (\nabla_x f_1)^T \\ (\nabla_x f_2)^T \\ . \\ . \\ . \\ (\nabla_x f_m)^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Lorsque $m = n$, on appelle jacobien le scalaire $j = det(J)$

Au cours de construction !.....