

## CHAPITRE 4

### PROCESSUS STOCHASTIQUES

#### 1.1.Introduction

Un processus stochastique  $X(t)$  est une famille de variable aléatoire c'est à dire à tout  $\xi$  (est l'ensemble de tous les résultats expérimentaux) on associe une fonction  $X(t, \xi)$ . Ainsi un processus stochastique est une famille de fonctions temporelles dépendant du paramètre  $\xi$  ou, de manière équivalente, une fonction de  $t$  (ensemble  $\mathcal{R}$  de nombres réels) et  $\xi$ .

#### 1.2. Notions de processus stochastiques

Si l'expérience est réalisée  $n$  fois, alors  $n$  fonctions  $X(t, \xi_i)$  sont observées, une pour chaque essai (Fig. 4.1).

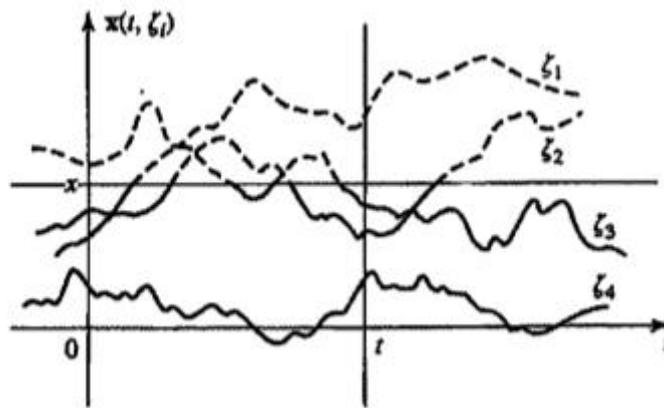


Figure 4.1 : Famille de fonctions d'un processus stochastique.

##### 1.2.1. Quelques définitions

- Si  $t \in \mathcal{R}$  (continu), alors  $X(t)$  est un processus en temps continu et si  $t \in \mathbb{N}$  (entier), alors  $X(t)$  est un processus à temps discret. Un processus à temps discret est donc une séquence de variables aléatoires. Une telle séquence sera notée  $X[n]$ . Un processus  $X(t)$  est à états discrets si ses valeurs sont dénombrables. Sinon, il s'agit d'un processus à état continu.
- Nous utiliserons la notation  $X(t)$  pour représenter un processus stochastique omettant, comme dans le cas de variables aléatoires, sa dépendance de  $\xi$ . Ainsi  $X(t)$  a les interprétations suivantes :
  1. C'est une famille (ou un ensemble) de fonctions  $X(t, \xi)$ . Dans cette interprétation,  $t$  et  $\xi$  sont des variables.

2. C'est une fonction temporelle unique (ou un échantillon du processus donné). Dans ce cas,  $t$  est une variable et  $\xi$  est fixe.
3. Si  $t$  est fixe et  $\xi$  est variable, alors  $X(t, \xi)$  est une variable aléatoire égale à l'état du processus donné à l'instant  $t$ .
4. Si  $t$  et  $\xi$  sont fixes, alors  $X(t, \xi)$  est un nombre.

#### 4.2.2. Quelques exemples de processus stochastiques

**Exemple 4.1 :** Un exemple physique de processus stochastique est le mouvement de particules microscopiques en collision avec les molécules d'un fluide (mouvement brownien). Le processus résultant  $X(t)$  concerne les mouvements de toutes les particules (ensemble). Une seule réalisation  $X(t, \xi_i)$  de ce processus (Fig. 4.2.a) est le mouvement d'une particule spécifique (échantillon).

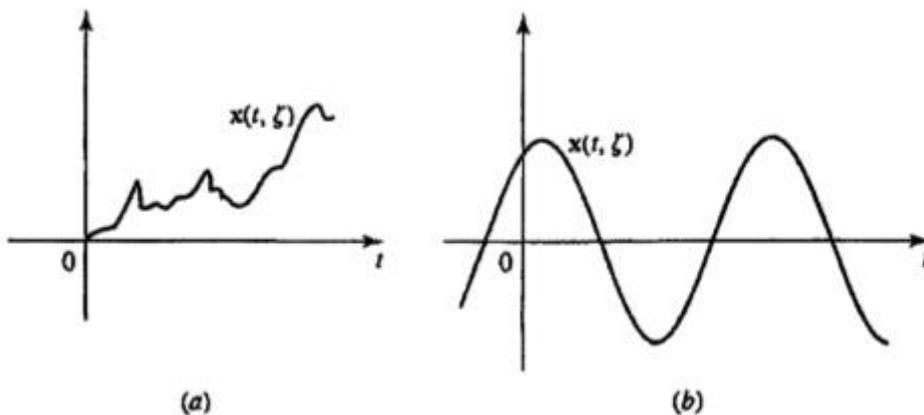


Figure 4.2 : Exemples de processus stochastiques.

**Exemple 4.2 :** Un autre exemple est la tension  $X(t) = r \cos(\omega t + \varphi)$  d'un générateur alternatif d'amplitude aléatoire  $r$  et de phase  $\varphi$ . Dans ce cas, le processus  $X(t)$  consiste en une famille d'ondes sinusoïdales pures et un seul échantillon est la fonction (Fig. 4.2.b)

$$X(t, \xi_i) = r(\xi_i) \cos(\omega t + \varphi(\xi_i)) \quad (4.1)$$

Par définition, les deux exemples sont des processus stochastiques. Il existe cependant une différence fondamentale entre eux. Le premier exemple (régulier) consiste en une famille de fonctions qui ne peuvent être décrites en termes d'un nombre fini de paramètres.

De plus, le futur d'un échantillon  $X(t, \xi)$  de  $X(t)$  ne peut être déterminé en fonction de son passé. Enfin, sous certaines conditions, les statistiques d'un processus régulier  $X(t)$  peuvent être déterminées en termes d'un seul échantillon.

Le deuxième exemple (prévisible) consiste en une famille d'ondes sinusoïdales pures et il est complètement spécifié en termes de variables aléatoires  $r$  et  $\varphi$ . De plus, si  $X(t, \xi)$  est connu pour  $t \leq t_0$ , alors il est déterminé pour  $t > t_0$ . Enfin, un seul échantillon  $X(t, \xi)$  de  $X(t)$  ne spécifie pas les propriétés de l'ensemble du processus car il ne dépend que des valeurs particulières  $r(\xi)$  et  $\varphi(\xi)$  de  $r$  et  $\varphi$ . Une définition formelle des processus réguliers et prévisibles est donnée dans les sections qui suivent.

### 4.3. Statistiques des processus stochastiques

#### 4.3.1. Fonction de répartition et densité de probabilité

Un processus stochastique est une infinité non dénombrable de variables aléatoires, une pour chaque  $t$ . Pour un  $t$  spécifique,  $X(t)$  est une variable aléatoire de fonction de répartition :

$$F_X(x, t) = P\{X(t) \leq x\} \quad (4.2)$$

Cette fonction dépend de  $t$ , et elle est égale à la probabilité de l'événement  $\{X(t) \leq x\}$  consistant en tous les résultats  $t$  tels que, à l'instant spécifique  $t$ , les échantillons  $X(t, \xi)$  du processus donné ne dépassent le nombre  $x$ . La fonction  $F_X(x, t)$  sera appelée la fonction de répartition du premier ordre du processus  $X(t)$ . Sa dérivée par rapport à  $x$  :

$$f_X(x, t) = \frac{\partial F_X(x, t)}{\partial x} \quad (4.3)$$

est la densité de probabilité du premier ordre de  $X(t)$ .

Si l'expérience est réalisée  $n$  fois, alors  $n$  fonctions  $X(t, \xi_i)$  sont observées, une pour chaque essai (Fig. 4.1). En notant  $n_i(x)$  le nombre d'essais tel qu'à l'instant  $t$  les ordonnées des fonctions observées ne dépassent pas  $x$  (traits pleins), on conclut que :

$$F_X(x, t) \cong \frac{n_i(x)}{n} \quad (4.4)$$

La fonction de répartition du second ordre du processus  $X(t)$  est la distribution jointe :

$$F_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \quad (4.5)$$

des variables aléatoires  $X(t_1)$  et  $X(t_2)$ .

La densité de probabilité correspondante est égale :

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.6)$$

La fonction de répartition du  $n^{\text{ième}}$  ordre du processus  $X(t)$  est la distribution jointe

$F_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$  des variables aléatoires  $X(t_1), \dots, X(t_n)$ .

#### 4.3.2. Propriétés du second ordre

Pour la détermination des propriétés statistiques d'un processus stochastique, la connaissance de la fonction  $F_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$  est nécessaire pour tout  $X_i$ ,  $t_i$  et  $n$ . Cependant, pour de nombreuses applications, seules certaines moyennes sont utilisées, notamment l'espérance de  $X(t)$  et de  $X^2(t)$ . Ces quantités peuvent être exprimées en termes de propriétés du second ordre de  $X(t)$  définies comme suit :

##### a) Moyenne

La moyenne  $\eta(t)$  de  $X(t)$  est l'espérance de la variable aléatoire  $X(t)$  définie comme suit :

$$\eta(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x, t) dx \quad (4.7)$$

##### b) Autocorrélation

L'autocorrélation  $R(t_1, t_2)$  de  $X(t)$  est l'espérance du produit  $X(t_1)X(t_2)$  donnée par :

$$R(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (4.8)$$

La valeur de  $R(t_1, t_2)$  sur la diagonale  $t_1 = t_2 = t$  est la puissance moyenne de  $X(t)$  :

$$E\{X^2(t)\} = R(t, t) \quad (4.9)$$

L'auto-covariance  $C(t_1, t_2)$  de  $X(t)$  est donnée par :

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2) \quad (4.10)$$

et sa valeur  $C(t,t)$  sur la diagonale  $t_1 = t_2 = t$  est égale à la variance de  $X(t)$  :

$$\sigma_X^2(t) = E\{X^2(t)\} - (E\{X(t)\})^2 \quad (4.11)$$

**Exemple 4.3 :** soit un processus stochastique décrit par le signal déterministe suivant :

$X(t) = f(t)$ . Dans ce cas, on a :

$$\eta(t) = E\{f(t)\} = f(t) \quad R(t_1, t_2) = E\{f(t_1)f(t_2)\} = f(t_1)f(t_2)$$

**Exemple 4.4 :** Supposons que  $X(t)$  est un processus avec :

$$\eta(t) = 3 \quad R(t_1, t_2) = 9 + 4e^{-0.2|t_1-t_2|}$$

Nous déterminerons la moyenne, la variance et la covariance des variables aléatoires

$$Z = X(5) \text{ et } W = X(8).$$

Clairement,  $E\{Z\} = \eta(5) = 3$  et  $E\{W\} = \eta(8) = 3$ . De plus,

$$E\{Z^2\} = R(5,5) = 13 \quad E\{W^2\} = R(8,8) = 13$$

$$E\{Z.W\} = R(5,8) = 9 + 4e^{-0.6} = 11.195$$

Variances :

$$\sigma_Z^2 = E\{Z^2\} - (E\{Z\})^2 = 13 - 3^2 = 4 \quad \sigma_W^2 = E\{W^2\} - (E\{W\})^2 = 13 - 3^2 = 4$$

Ainsi  $Z$  et  $W$  ont la même variance  $\sigma_Z^2 = \sigma_W^2 = \sigma^2 = 4$  et leur covariance est égale à

$$C(5, 8) = E\{Z.W\} - E\{Z\}.E\{W\} = 11.195 - 9 = 2,195.$$

### 4.3.3. Egalité de deux processus stochastiques

Deux processus stochastiques  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont égaux (partout) si leurs échantillons respectifs  $X(t, \xi)$  et  $Y(t, \xi)$  sont identiques pour tout  $\xi$ . De même, l'égalité :

$$Z(t) = X(t) + Y(t) \text{ signifie que } Z(t, \xi) = X(t, \xi) + Y(t, \xi) \text{ pour chaque } \xi.$$

Deux processus sont égaux au sens de la moyenne quadratique (MS :Mean Square) si :

$$E\{|X(t) - Y(t)|^2\} = 0 \quad (4.12)$$

pour chaque  $t$ . L'égalité au sens MS conduit aux conclusions suivantes :

- On note  $A_t$  l'ensemble des résultats  $\xi$  tel que  $X(t, \xi) = Y(t, \xi)$  pour un  $t$  spécifique, et par  $A_\infty$  l'ensemble des résultats  $\xi$  tel que  $X(t, \xi) = Y(t, \xi)$  pour tout  $t$ .
- Il résulte que  $X(t, \xi) - Y(t, \xi) = 0$  avec probabilité égale à 1 ; d'où  $P(A_t) = P(S) = 1$ . Il ne s'ensuit cependant pas que  $P(A_\infty) = 1$ .
- En fait, puisque  $A_\infty$  est l'intersection de tous les ensembles  $A_t$  à mesure que  $t$  s'étend sur tout l'axe,  $P(A_\infty)$  pourrait même être égal à 0.

#### 4.4. Stationnarités des processus stochastiques

##### 4.4.1. Stationnarité au sens strict.

Un processus stochastique  $X(t)$  est dit stationnaire au sens strict (en abrégé SSS) si ses propriétés statistiques sont invariantes à un décalage dans le temps. Cela signifie que les processus  $X(t)$  et  $X(t + \Delta t)$  ont les mêmes statistiques pour tout  $\Delta t$ .

- Deux processus  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont dits conjointement stationnaires si les statistiques conjointes de  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont identiques aux statistiques conjointes de  $X(t + \Delta t)$  et  $Y(t + \Delta t)$  pour tout  $\Delta t$ .
- Un processus complexe  $Z(t) = X(t) + jY(t)$  est stationnaire si les processus  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont conjointement stationnaires. De la définition, il s'ensuit que la densité d'ordre  $n$  d'un processus SSS doit être, pour tout  $\Delta t$ , telle que :

$$f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_X(x_1, \dots, x_n; t_1 + \Delta t, \dots, t_n + \Delta t) \quad (4.13)$$

Il en résulte que  $f_X(x; t) = f_X(x; t + \Delta t)$  pour tout  $\Delta t$ . Donc la densité de premier ordre de  $X(t)$  est indépendante de  $t$  :

$$f_X(x; t) = f_X(x) \quad (4.14)$$

De même,  $f_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t)$  est indépendante de  $t$  pour tout  $\Delta t$ , et particulièrement pour  $\Delta t = -t_2$ . Ceci mène à la conclusion que :

$$f_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t) = f_X(x_1, x_2; \tau) \quad \tau = t_1 - t_2 \quad (4.15)$$

Ainsi, la densité jointe des variables aléatoires  $X(t + \tau)$  et  $X(t)$  est indépendante de  $t$  et est égale à  $f_X(x_1, x_2; \tau)$ .

#### 4.4.2. Stationnarité au sens large

Un processus stochastique  $X(t)$  est appelé stationnaire au sens large (en abrégé SSL) si sa moyenne est constante :

$$E\{X(t)\} = \eta \quad (4.16)$$

Et son autocorrélation dépend seulement de  $\tau = t_1 - t_2$

$$E\{X(t + \tau)X^*(t)\} = R(\tau) \quad (4.17)$$

Puisque  $\tau$  est le décalage entre  $t$  et  $t + \tau$ , la fonction  $R(\tau)$  peut être écrite sous la forme symétrique suivante :

$$R(\tau) = E\left\{X\left(t + \frac{\tau}{2}\right)X^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\} \quad (4.18)$$

On remarque particulièrement que :

$$E\{|X(t)|^2\} = R(0)$$

Donc la puissance moyenne d'un processus stationnaire est indépendante de  $t$  et vaut  $R(0)$ .

#### Exemple 4.5 :

Supposons que  $X(t)$  est un processus SSL avec la fonction d'autocorrélation suivante :

$$R(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}$$

Nous déterminerons le moment du second ordre de la variable aléatoire  $X(8) - X(5)$ .

#### Solution

On pose  $t_1 = 8$  et  $t_2 = 5$  alors on aura  $\tau = t_1 - t_2 = 8 - 5 = 3$

$$\begin{aligned} E\{[X(8) - X(5)]^2\} &= E\{X^2(8)\} + E\{X^2(5)\} - 2E\{X(8)X(5)\} \\ &= R(0) + R(0) - 2R(3) = 2A - 2Ae^{-3\alpha} \end{aligned}$$

**Remarque :**

L'autocorrélation d'un processus stationnaire  $X(t)$  peut être définie comme la puissance moyenne. Supposant pour simplifier que  $X(t)$  est réel, on conclue à partir (4.17) que :

$$E\{[X(t + \tau) - X(t)]^2\} = 2[R(0) - R(\tau)] \quad (4.19)$$

A partir de (4.17), il s'en suit que l'auto-covariance d'un processus SSL dépend seulement de  $\tau = t_1 - t_2$

$$C(\tau) = R(\tau) - |\eta|^2 \quad (4.20)$$

Et son coefficient de corrélation est égal à :

$$r(\tau) = C(\tau)/C(0) \quad (4.21)$$

Donc ;  $C(\tau)$  et  $r(\tau)$  sont respectivement la covariance et le coefficient de corrélation des variables aléatoires  $X(t + \tau)$  et  $X(t)$ .

Deux processus  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont conjointement SSL si chacun est SSL et leur inter-corrélation dépend seulement de  $\tau = t_1 - t_2$ .

$$R_{XY}(\tau) = E\{X(t + \tau)Y^*(t)\} \quad C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \eta_X\eta_Y^* \quad (4.22)$$

Si  $X(t)$  est un bruit blanc SSL, alors on a :

$$C(\tau) = q\delta(\tau) \quad (4.23)$$

Si  $X(t)$  est un processus a-dépendant, alors  $C(\tau) = 0$  pour  $|\tau| > a$ . Dans ce cas, la constante a est appelée le temps de corrélation de  $X(t)$ . Ce terme est également utilisé pour des processus arbitraires et il est défini comme le rapport :

$$\tau_c = \frac{1}{C(0)} \int_0^\infty C(\tau) d\tau \quad (4.24)$$

En général  $C(\tau) \neq 0$  pour tout  $\tau$ . Cependant, pour la plupart des processus réguliers :

$$C(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad R(\tau) \rightarrow |\eta|^2 \quad \text{lorsque} \quad |\tau| \rightarrow \infty.$$

**Remarque :** Si un processus est SSS, il est également SSL. L'inverse, cependant, n'est pas vrai en général.

**Exemple 4.6 :**

Nous établirons les conditions nécessaires et suffisantes pour la stationnarité du processus suivant :

$$X(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (4.25)$$

La moyenne de ce processus est égale à :

$$E\{X(t)\} = E\{a\} \cos(\omega t) + E\{b\} \sin(\omega t)$$

Cette fonction doit être indépendante du temps. Donc la condition

$$E\{a\} = E\{b\} = 0 \quad (4.26)$$

est nécessaire pour chaque forme de stationnarité. Nous supposons qu'elle est établie.

**Stationnarité au sens large :**

Le processus  $X(t)$  est SSL si et seulement si les variables aléatoires **a** et **b** sont un-corrélées avec variance égale :

$$E\{ab\} = 0 \quad E\{a^2\} = E\{b^2\} = \sigma^2 \quad (4.27)$$

Si ceci est vérifié, alors

$$R(\tau) = \sigma^2 \cos(\omega \tau) \quad (4.28)$$

**Preuve :**

Si  $X(t)$  est SSL, alors

$$E\{X^2(0)\} = E\{X^2(\pi/2\omega)\} = R(0)$$

Mais  $X(0) = a$  et  $X(\pi/2\omega) = b$  ; donc  $E\{a^2\} = E\{b^2\}$ . En utilisant ce qui précède, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E\{X(t + \tau)X(t)\} &= E\{[a \cos \omega(t + \tau) + b \sin \omega(t + \tau)][a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)]\} \\ &= \sigma^2 \cos(\omega \tau) + E\{ab\} \sin \omega(2t + \tau) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Ceci est indépendant de t seulement si  $E\{ab\} = 0$  et (4.27) est obtenue.

Si (4.27) est vérifiée, alors, comme nous le voyons de (4.29) (9.65), l'autocorrélation de  $X(t)$  est égale à  $\sigma^2 \cos(\omega\tau)$ .

**Stationnarité au sens strict :**

Le processus  $X(t)$  est SSS si et seulement si la densité conjointe  $f(a, b)$  des variables aléatoires **a** et **b** possède une symétrie circulaire, c'est-à-dire, si :

$$f(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4.30}$$

**Preuve :**

Si  $X(t)$  est SSS, les variables aléatoires

$$X(0) = a \quad X(\pi/2\omega)$$

et

$$X(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad X(t + \pi/2\omega) = b \cos(\omega t) - a \sin(\omega t)$$

ont la même densité conjointe pour chaque  $t$ . Par conséquent,  $f(a, b)$  doit avoir une symétrie circulaire. Nous allons maintenant montrer que, si  $f(a, b)$  a une symétrie circulaire, alors  $X(t)$  est SSS. Avec  $\tau$  un nombre donné et

$$a_1 = a \cos(\omega\tau) + b \sin(\omega\tau) \quad b_1 = b \cos(\tau) - a \sin(\tau)$$

On forme le processus

$$X_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = X(t + \tau)$$

Clairement, les statistiques  $X(t)$  et  $X_1(t)$  sont déterminées en fonction des densités jointes  $f(a, b)$  et  $f(a_1, b_1)$  des variables aléatoires  $(a, b)$  et  $(a_1, b_1)$ . Mais ces variables aléatoires ont la même densité jointe. Par conséquent, les processus  $X(t)$  et  $X(t + \tau)$  ont les mêmes statistiques pour tout  $\tau$ .

**Corollaire**

Si le processus  $X(t)$  est SSS et que les variables aléatoires  $a$  et  $b$  sont indépendantes, alors elles sont normales.

**Exemple 4.7 :**

Étant donné une variable aléatoire  $\omega$  de densité  $f(\omega)$  et une variable aléatoire  $\varphi$  uniforme dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  et indépendante de  $\omega$ , on forme le processus  $X(t)$  tel que :

$$X(t) = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.31)$$

Nous allons montrer que  $X(t)$  est SSL avec une moyenne nulle et une autocorrélation exprimée par :

$$R(\tau) = \frac{a^2}{2} E\{\cos(\omega\tau)\} = \frac{a^2}{2} \text{Re}(\Phi_\omega(\tau)) \quad (4.32)$$

Où ;

$$\Phi_\omega(\tau) = E\{e^{j\omega\tau}\} = E\{\cos(\omega\tau)\} + jE\{\sin(\omega\tau)\} \quad (4.33)$$

est la fonction caractéristique de  $\omega$ .

**Preuve :**

$$E\{a \cos(\omega t + \varphi)\} = E\{E\{a \cos(\omega t + \varphi)/\omega\}\}$$

De l'indépendance de  $\omega$  et  $\varphi$ , il s'en suit que :

$$E\{a \cos(\omega t + \varphi)/\omega\} = \cos(\omega t) E\{\cos\varphi\} - \sin(\omega t) E\{\sin\varphi\}$$

Donc  $E\{X(t)\} = 0$  car

$$E\{\cos\varphi\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi d\varphi = 0 \quad E\{\sin\varphi\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 0$$

En résonant de même, on obtient  $E\{\cos(2\omega t + \omega\tau + 2\varphi)\} = 0$ . Et puisque

$$2 \cos[\omega(t + \tau) + \varphi] \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega\tau) + \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\varphi)$$

On conclue que :

$$R(\tau) = a^2 E\{\cos[\omega(t + \tau) + \varphi] \cos(\omega t + \varphi)\} = \frac{a^2}{2} E\{\cos(\omega\tau)\}$$

En outre, le processus  $Z(t) = ae^{j(\omega t + \varphi)}$  est SSL avec une moyenne nulle et autocorrélation exprimée par :

$$E\{Z(t + \tau)Z^*(t)\} = a^2 E\{e^{j\omega\tau}\} = a^2 \Phi_\omega(\tau)$$

#### 4.4.3. Centrage d'un processus stochastique

Soit un processus  $X(t)$  de moyenne  $\eta(t)$  et d'auto-covariance  $C_X(t_1, t_2)$ , nous formons la différence suivante :

$$\bar{X}(t) = X(t) - \eta(t) \quad (4.34)$$

Cette différence est appelée processus centré associé au processus  $X(t)$ . Notons que :

$$E\{\bar{X}(t)\} = 0 \quad R_{\bar{X}}(t_1, t_2) = C_X(t_1, t_2) \quad (4.35)$$

Il s'ensuit que si le processus  $X(t)$  est stationnaire à covariance, c'est-à-dire si

$$C_X(t_1, t_2) = C_X(t_1 - t_2), \text{ alors son processus centré } \bar{X}(t) \text{ est SSL.}$$

#### 4.4.4. Autres formes de stationnarité.

- Un processus  $X(t)$  est asymptotiquement stationnaire si les statistiques des variables aléatoires  $X(t_1 + \Delta t), \dots, X(t_n + \Delta t)$  ne dépendent pas de  $\Delta t$  si ce dernier est grand. Plus précisément, la fonction  $f(x_1, \dots, x_n, t_1 + \Delta t, \dots, t_n + \Delta t)$  tend vers une limite (qui ne dépend pas de  $\Delta t$ ) lorsque  $\Delta t \rightarrow \infty$ . Le signal télégraphique semi-aléatoire en est un exemple.
- Un processus  $X(t)$  est stationnaire du  $n^{\text{ième}}$  ordre si (4.13) n'est pas vérifiée pour tout  $n$ , mais seulement pour  $n \leq N$ .
- Un processus  $X(t)$  est stationnaire dans un intervalle si (4.13) est vérifiée pour chaque  $t_i$  et  $t_i + \Delta t$  dans cet intervalle.
- On dit que  $X(t)$  est un processus avec des accroissements stationnaires si ses accroissements  $Y(t) = X(t + h) - X(t)$  forment un processus stationnaire pour chaque  $h$ . Le processus de Poisson en est un exemple.

#### 4.4.5. Périodicité en moyenne quadratique.

Un processus  $X(t)$  est dit périodique au sens MS (Mean Square) si pour chaque  $t$  on a :

$$E\{|X(t + T) - X(t)|^2\} = 0 \quad (4.36)$$

Il s'ensuit que, pour un  $t$  spécifique et avec une probabilité égale à 1, on a :

$$X(t + T) - X(t) = 0 \quad (4.37)$$

Comme nous voyons de (4.37), la moyenne d'un processus MS périodique est périodique. Nous allons examiner les propriétés de  $R(t_1, t_2)$  :

Un processus  $X(t)$  est dit MS périodique si son autocorrélation est doublement périodique, c'est-à-dire, si pour tout entier  $m$  et  $n$  on a :

$$R(t_1 + mT, t_2 + nT) = R(t_1, t_2) \quad (4.38)$$

#### 4.4.6. Ergodicité d'un processus stochastique

La propriété d'ergodicité lie les moyennes statistiques (effectuées sur l'espace des réalisations sous-jacentes à la définition des variables aléatoires qui constituent le processus) et les moyennes temporelles (effectuées sur les fonctions du temps qui sont les *réalisations* du processus).

L'ergodicité ajoute encore une liaison supplémentaire entre les caractéristiques statistiques et temporelles d'un processus. Si on dispose de  $k$  réalisations  $x_k(t)$  d'un processus aléatoire  $X(t)$ , on pourrait estimer la moyenne à l'aide de la formule suivante :

$$\hat{m}_X(t) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k(t) f_X(x, t) \quad (4.39)$$

- **Ergodicité en moyenne**

Un processus aléatoire est dit ergodique, si les moyennes temporelles prises sur un temps suffisamment long, sont voisines avec une probabilité qui tend vers 1 des moyennes statistiques prises sur l'ensemble de ses réalisations. Et l'on écrit :

$$E[X] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_k(t) dt = \hat{m}_X \quad (4.40)$$

Avec  $T$  est la durée d'observation du processus.

- **Ergodicité en corrélation**

La fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire stationnaire  $X(t)$  est définie par :

$$R_{XX}(\tau) = E\{X(t)X(t + \tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_k(t)x_k(t + \tau) dt \quad (4.41)$$

On dit que le processus aléatoire est ergodique relativement à la fonction d'autocorrélation lorsque :

1) Il est ergodique en moyenne,

2) La limite de la fonction d'autocorrélation lorsque T tend vers l'infini existe, est certaine, ne dépend pas de  $t$  et est égale à la fonction d'autocorrélation statistique.

Dans ce cas, on dit que ce processus est ergodique au sens large.

**Remarques :**

- Un processus ergodique au sens large est stationnaire au sens large. L'inverse n'est pas vrai.
- L'ergodicité permet d'estimer les paramètres statistiques à partir des paramètres temporels.
- Un processus aléatoire est *ergodique* si ses moments peuvent être obtenus comme des moyennes à partir d'une seule de ses réalisations. Ceci doit être vrai en particulier pour les moments d'ordre 1 et 2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_T x(t, \omega) dt &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} m_x(t) & \frac{1}{T} \int_T x(t, \omega) dt &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} m_x \\ \frac{1}{T} \int_T x(t, \omega)x(t + \tau, \omega) dt &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} R_x(t, t + \tau) & \frac{1}{T} \int_T x(t, \omega)x(t + \tau, \omega) dt &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} R_x(\tau) \end{aligned} \quad \rightarrow$$

- Le membre gauche la première équation ne dépend pas du temps, et donc que pour que cette équation puisse être vérifiée, il faut que le processus ait une *moyenne constante*. De la même façon, pour que la deuxième équation soit possible le processus doit être *stationnaire au sens large*, on aura alors les expressions à droite ; ergodicité  $\Rightarrow$  stationnarité. L'affirmation contraire est fausse.

**4.5. Systèmes à entrées stochastiques**

Étant donné un processus stochastique  $X(t)$ , nous attribuons selon une règle à chacun de ses échantillons  $X(t, \xi_i)$  une fonction,  $Y(t, \xi_i)$ . Nous avons ainsi créé un autre processus tel que :

$$Y(t, \xi_i) = T[X(t)] \tag{4.42}$$

dont les échantillons sont les fonctions  $Y(t, \xi_i)$ . Le processus  $Y(t)$  ainsi formé peut être considéré comme la sortie d'un système (transformation) avec en entrée le processus  $X(t)$ . Le système est complètement spécifié en termes de l'opérateur T.

- Le système est déterministe s'il n'opère que sur la variable  $t$  en traitant  $\xi$  comme paramètre. Cela signifie que si deux échantillons  $X(t, \xi_1)$  et  $X(t, \xi_2)$  de l'entrée sont identiques en  $t$ ,

alors les échantillons correspondants  $Y(t, \xi_1)$  et  $Y(t, \xi_2)$  de la sortie sont également identiques en  $t$ .

- Le système est dit stochastique si  $T$  opère sur les deux variables  $t$  et  $\xi$ . Cela signifie qu'il existe deux résultats  $\xi_1$  et  $\xi_2$  tels que  $X(t, \xi_1) = X(t, \xi_2)$  de manière identique en  $t$  mais

$$Y(t, \xi_1) \neq Y(t, \xi_2)$$

En principe, les statistiques de la sortie d'un système peuvent être exprimées en termes de statistiques de l'entrée. Cependant, en général, il s'agit d'un problème compliqué. Nous considérons ensuite deux cas particuliers importants.

#### 4.5.1. Systèmes sans mémoire

Un système est dit sans mémoire si sa sortie est donnée par :

$$Y(t) = g[X(t)] \quad (4.43)$$

où  $g(x)$  est une fonction de  $x$ . Ainsi, à un instant donné  $t = t_1$ , la sortie  $Y(t_1)$  ne dépend que de  $X(t_1)$  et non d'aucune autre valeur passée ou future de  $X(t)$ . Il s'ensuit que la densité du premier ordre  $f_Y(y; t)$  de  $Y(t)$  peut être exprimée en fonction de la densité correspondante  $f_X(x; t)$  de  $X(t)$ . Par ailleurs,

$$E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x; t) dx \quad (4.44)$$

De même, puisque  $Y(t_1) = g[X(t_1)]$  et  $Y(t_2) = g[X(t_2)]$ , la densité du second ordre  $f_Y(y_1, y_2; t_1, t_2)$  de  $Y(t)$  peut être déterminée en fonction de la densité correspondante  $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$  de  $X(t)$ . En outre,

$$E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) g(x_2) f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (4.45)$$

La densité d'ordre  $n$   $f_Y(y_1, \dots, y_n; t_1, \dots, t_n)$  de  $Y(t)$  peut être déterminée à partir de la densité correspondante de  $X(t)$ , où la transformation sous-jacente est le système suivant :

$$Y(t_1) = g[X(t_1)], \dots, Y(t_n) = g[X(t_n)] \quad (4.46)$$

#### - Stationnarité

Supposons que l'entrée d'un système sans mémoire est un processus SSS,  $X(t)$ . On montre que la sortie résultante  $Y(t)$  est également SSS.

**Preuve.**

Pour déterminer la densité d'ordre  $n$  de  $Y(t)$ , on résout le système suivant :

$$g(x_1) = y_1, \dots, g(x_n) = y_n \quad (4.47)$$

Si ce système possède une solution unique, on a :

$$f_Y(y_1, \dots, y_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{|g'(x_1) \dots g'(x_n)|} \quad (4.48)$$

De la stationnarité de  $X(t)$ , il s'ensuit que le numérateur dans (4.48) est invariant à un décalage de l'origine temporelle. Et puisque le dénominateur ne dépend pas de  $t$ , nous concluons que le membre gauche ne change pas si  $t_i$  est remplacé par  $t_i + \Delta t$ . Par conséquent  $Y(t)$  est SSS. On peut également montrer que cela est vrai même si (4.47) a plus d'une solution.

### Remarques :

1. Si  $X(t)$  est stationnaire d'ordre  $N$ , alors  $Y(t)$  est stationnaire d'ordre  $N$ .
2. Si  $X(t)$  est stationnaire dans un intervalle, alors  $Y(t)$  est stationnaire dans le même intervalle.
3. Si  $X(t)$  est stationnaire SSL, alors  $Y(t)$  pourrait ne pas être stationnaire dans un sens quelconque.

#### 4.5.1.1. Détecteur à loi quadratique

Un **Détecteur à loi quadratique** est un système sans mémoire dont la sortie est égale à

$Y(t) = X^2(t)$ . Nous déterminerons ses densités du premier et du second ordre.

- Si  $Y > 0$ , alors le système a les deux solutions  $\pm\sqrt{Y}$ . En outre,  $Y'(x) = \pm 2\sqrt{Y}$  ; donc :

$$f_Y(y; t) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}; t) + f_X(-\sqrt{y}; t)]$$

- Si  $y_1 > 0$  et  $y_2 > 0$ , alors le système :  $\begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases}$

admet les quatre solutions  $(\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2})$ . En outre, son jacobéen est égal à  $\pm 4\sqrt{y_1 y_2}$  ; donc :

$$f_Y(y_1, y_2; t_1, t_2) = \frac{1}{4\sqrt{y_1 y_2}} \sum f_X(\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}; t_1, t_2)$$

Où la somme a quatre termes.

Notons que, si  $X(t)$  est SSS, alors  $f_X(x; t) = f_X(x)$  est indépendante du temps  $t$  et  $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; \tau)$  dépend seulement de  $\tau = t_1 - t_2$ . Donc  $f_Y(y)$  est indépendante du temps  $t$  et  $f_Y(y_1, y_2; \tau)$  dépend seulement de  $\tau = t_1 - t_2$ .

### Exemple 4.8

Supposons que  $X(t)$  soit un processus stationnaire normal (sa densité de probabilité est une gaussienne) avec une moyenne nulle et une autocorrélation  $R_X(\tau)$ . Dans ce cas,  $f_X(x)$  est normale avec la variance  $R_X(0)$ .

Si  $Y(t) = X^2(t)$  (Fig. 4.3), alors  $E\{Y(t)\} = R_X(0)$  et  $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} e^{-\frac{y}{2R_X(0)}} U(y)$

On va montrer que :

$$R_Y(\tau) = R_X^2(0) + 2R_X^2(\tau) \quad (4.49)$$

### Preuve.

Les variables aléatoires  $X(t + \tau)$  et  $X(t)$  sont conjointement normales avec une moyenne nulle. D'où :

$$E\{X^2(t + \tau)X^2(t)\} = E\{X^2(t + \tau)\}E\{X^2(t)\} + 2E^2\{X(t + \tau)X(t)\}$$

Et ainsi (4.49) est obtenue.

Notons en particulier que :

$$E\{Y^2(t)\} = R_Y(0) = 3R_X^2(0) \quad \sigma_Y^2 = 2R_X^2(0)$$

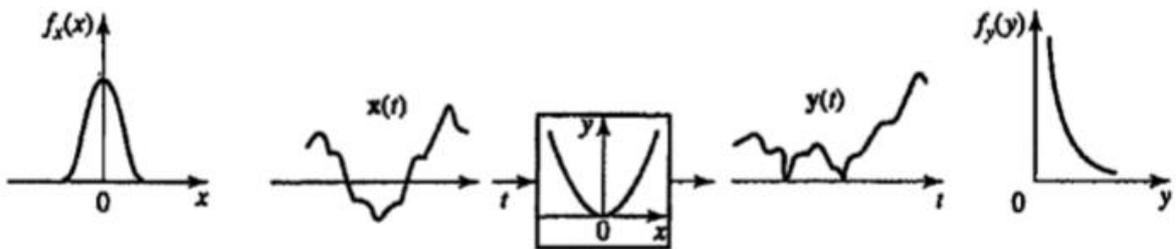


Figure 4.3 : Entrée et sortie d'un Détecteur à loi quadratique.

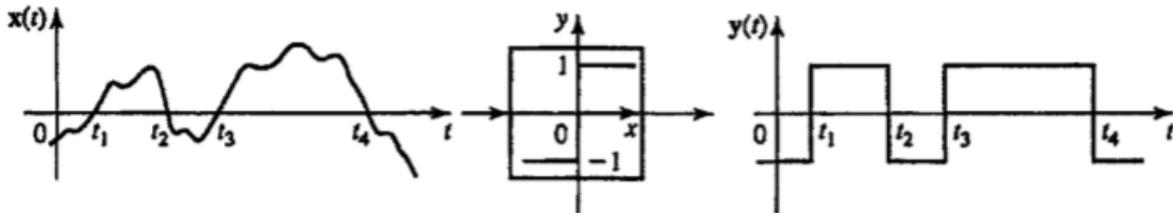


Figure 4.4 : Entrée et sortie d'un limiteur dur.

#### 4.5.1.2. Limiteur dur (hard limiter)

Un **Limiteur dur (hard limiter)** est un système sans mémoire (Figure 4.4) avec :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

Sa sortie  $Y(t)$  prend les valeurs  $\pm 1$  et

$$P\{Y(t) = 1\} = P\{X(t) > 0\} = 1 - F_X(0)$$

$$P\{Y(t) = -1\} = P\{X(t) < 0\} = F_X(0)$$

Donc

$$E\{Y(t)\} = 1 \times P\{Y(t) = 1\} - 1 \times P\{Y(t) = -1\} = 1 - 2F_X(0)$$

Le produit  $Y(t + \tau)Y(t)$  est égal à 1 si  $X(t + \tau)X(t) > 0$  et -1 ailleurs. Donc

$$R_Y(\tau) = P\{X(t + \tau)X(t) > 0\} - P\{X(t + \tau)X(t) < 0\} \quad (4.51)$$

Alors, dans le plan des probabilités des variables aléatoires  $X(t + \tau)$  et  $X(t)$ ,  $R_Y(\tau)$  est égale aux masses du premier et troisième quadrant moins les masses du deuxième et quatrième quadrant.

#### Exemple 4.9

On va montrer que si  $X(t)$  est un processus normal stationnaire avec une moyenne nulle, alors l'autocorrélation de la sortie d'un limiteur dur vaut :

$$R_Y(\tau) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)} \quad (4.52)$$

Ce résultat est appelé « loi du *arcsinus* »

**Preuve :**

Les variables aléatoires  $X(t + \tau)$  et  $X(t)$  sont conjointement normales avec une moyenne nulle, variance  $R_X(0)$  et coefficient de corrélation  $\frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$ . D'où ,

$$P\{X(t + \tau)X(t) > 0\} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi}$$

$$P\{X(t + \tau)X(t) < 0\} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi}$$

$$\text{Avec ; } \sin\alpha = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

En insérant dans (4.51), nous obtenons :

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi}\right) = \frac{2\alpha}{\pi}$$

Et (4.52) s'ensuit.

#### 4.5.2. Systèmes linéaires

La sortie  $Y(t)$ , d'un système linéaire dont l'entrée est  $X(t)$ , est donnée par la notation suivante :

$$Y(t) = L[X(t)] \quad (4.53)$$

Ceci signifie que :

$$L[a_1X_1(t) + a_2X_2(t)] = a_1L[X_1(t)] + a_2L[X_2(t)] \quad (4.54)$$

Pour tout  $a_1, a_2, X_1(t), X_2(t)$ .

Ceci est la définition de la linéarité et elle est aussi retenue si les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  sont des variables aléatoires car, comme nous avons supposé, le système est déterministe, c'est-à-dire, il opère seulement sur la variable  $t$ .

#### Remarques :

- Si un système est spécifié par sa structure interne ou par une équation différentielle, alors (4.54) est vérifiée si  $Y(t)$  est la réponse à l'état initial. La réponse obtenue dans les conditions initiales (réponse sans entrée ou réponse à une entrée nulle) ne sera pas considérée.
- Un système est dit invariant dans le temps si sa réponse à  $X(t + \Delta t)$  est égale à

$Y(t + \Delta t)$ . Nous allons supposer tout au long de cette section que tous les systèmes linéaires sont invariants. Il est bien connu que la sortie d'un système linéaire est une convolution exprimée par :

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \alpha)h(\alpha) d\alpha \quad (4.55)$$

Où ;  $h(t) = L[\delta(t)]$  est sa réponse impulsionnelle. Dans ce qui suit, la plupart des systèmes vont être spécifiés par (4.55).

- Si  $X(t)$  est un processus normal, alors  $Y(t)$  il l'est aussi. Ceci est une extension de la propriété familière des transformations linéaires des variables aléatoires normales et peut être justifié si nous approximations l'intégrale de (4.55) par la somme:

$$Y(t_i) \cong \sum_k X(t_i - \alpha_k)h(\alpha_k) \Delta(\alpha)$$

- Si  $X(t)$  SSS, alors  $Y(t)$  est aussi SSS. En effet, comme  $Y(t + \Delta t) = L[X(t + \Delta t)]$  pour tout  $\Delta t$ , nous concluons que si les processus  $X(t)$  et  $X(t + \Delta t)$  ont les mêmes propriétés statistiques, il en va de même pour les processus  $Y(t)$  et  $Y(t + \Delta t)$ . Aussi, si  $X(t)$  SSL, les processus  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont conjointement SSL.

Ce qui suit est une explication de la raison d'introduction de la fonction  $R(t_1, t_2)$  dans les problèmes seulement avec la puissance moyenne. Supposons que,  $X(t)$  est l'entrée d'un système linéaire et  $Y(t)$  est la sortie résultante. Dans ce qui suit, nous montrerons que la moyenne de  $Y(t)$  peut être exprimée en fonction de la moyenne de  $X(t)$ . Cependant, la puissance moyenne de  $Y(t)$  ne peut pas être connue si seulement  $E\{X^2(t)\}$  est donnée. Pour la détermination de  $E\{Y^2(t)\}$ , la connaissance de la fonction  $R(t_1, t_2)$  est exigée, non seulement sur la diagonale  $t_1 = t_2$ , mais pour chaque  $t_1$  et  $t_2$ . L'identité suivante est une simple illustration :  $E\{[X(t_1) + X(t_2)]^2\} = R(t_1, t_1) + 2R(t_1, t_2) + R(t_2, t_2)$

#### 4.5.2.1. Théorème fondamental des systèmes linéaires

Pour tout système linéaire on a :

$$E\{L[X(t)]\} = L\{E\{X(t)\}\} \quad (4.56)$$

En d'autres termes, la moyenne  $\eta_Y(t)$  de la sortie  $Y(t)$  est égale à la réponse du système à la moyenne  $\eta_X(t)$  de l'entrée (fig.4.5a)

$$\eta_Y(t) = L[\eta_X(t)] \quad (4.57)$$

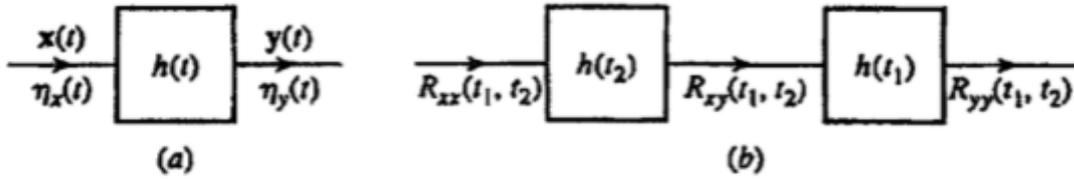


Figure 4.5 : statistiques d'ordre 1 et 2 de la sortie d'un système linéaire à entrée stochastique.

Ceci est une simple extension de la linéarité de valeurs espérées à des opérateurs linéaires arbitraires. Dans le contexte de (4.55), on peut l'en déduire si on écrit l'intégrale comme limite d'une somme. Ceci donne :

$$E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{X(t - \alpha)\}h(\alpha) d\alpha = \eta_x(t) * h(t) \quad (4.58)$$

**Interprétation fréquentielle :** Au  $i^{\text{ème}}$  essai, l'entrée de notre système est une fonction  $X(t, \xi_i)$  donnant comme sortie la fonction  $Y(t, \xi_i) = L[X(t, \xi_i)]$ . Pour un grand  $n$  on peut écrire :

$$E\{Y(t)\} \cong \frac{Y(t, \xi_1) + \dots + Y(t, \xi_n)}{n} = \frac{L[X(t, \xi_1)] + \dots + L[X(t, \xi_n)]}{n}$$

De la linéarité du système, il s'ensuit que le dernier terme est égal :

$$L \left[ \frac{X(t, \xi_1) + \dots + X(t, \xi_n)}{n} \right]$$

Cela est en concordance avec (4.56) parce que la fraction est presque égale à  $E\{X(t)\}$ .

**Remarques :**

1. De (4.57), il s'ensuit que si  $\bar{X}(t) = X(t) - \eta_x(t)$   $\bar{Y}(t) = Y(t) - \eta_y(t)$  donc :

$$L\{\bar{X}(t)\} = L\{X(t)\} - L\{\eta_x(t)\} = \bar{Y}(t) \quad (4.59)$$

Alors, la réponse d'un système linéaire à un signal d'entrée centré  $\bar{X}(t)$  est égale au signal de sortie centré  $\bar{Y}(t)$ .

2. Supposons que  $X(t) = f(t) + v(t)$  avec  $E\{v(t)\} = 0$ . Dans ce cas,  $E\{x(t)\} = f(t)$  ;  
donc,  $\eta_y(t) = f(t) * h(t)$

Si  $X(t)$  est la somme d'un signal déterministe  $f(t)$  et d'une composante aléatoire  $(t)$ , pour déterminer la moyenne de la sortie, on peut ignorer  $v(t)$  puisque  $E\{v(t)\} = 0$ .

Le théorème (4.56) peut être utilisé pour exprimer les moments conjoints de n'importe quel ordre de la sortie  $Y(t)$  d'un système linéaire en termes des moments correspondants à l'entrée. Les cas particuliers suivants sont d'une importance fondamentale dans l'étude des systèmes linéaires avec des entrées stochastiques.

#### 4.5.2.2. Autocorrélation de sortie

Nous souhaitons exprimer l'autocorrélation  $R_{YY}(t_1, t_2)$  de la sortie  $Y(t)$  d'un système linéaire en fonction de l'autocorrélation  $R_{XX}(t_1, t_2)$  de l'entrée  $X(t)$ . Comme nous le verrons dans la suite, il est plus facile de trouver d'abord la corrélation croisée (inter-corrélation)  $R_{XY}(t_1, t_2)$  entre  $X(t)$  et  $Y(t)$ .

#### Théorème

$$a) \quad R_{XY}(t_1, t_2) = L_2[R_{XX}(t_1, t_2)] \quad (4.60)$$

Dans cette notation,  $L_2$  signifie que le système fonctionne avec la variable  $t_2$ , en traitant  $t_1$  comme un paramètre. Dans le contexte de (4.55) ça signifie que :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1, t_2 - \alpha)h(\alpha) d\alpha \quad (4.61)$$

$$b) \quad R_{YY}(t_1, t_2) = L_1[R_{XY}(t_1, t_2)] \quad (4.62)$$

Dans ce cas, le système fonctionne avec la variable  $t_1$  et on a :

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t_1 - \alpha, t_2)h(\alpha) d\alpha \quad (4.63)$$

#### Preuve :

En multipliant (4.53) par  $X(t_1)$  et en utilisant (4.54), nous obtenons :

$$X(t_1)Y(t) = L_t[X(t_1)X(t)]$$

Où ;  $L_t$  signifie que le système fonctionne avec la variable  $t$ . Donc [voir (4.56)]

$$E\{X(t_1)Y(t)\} = L_t[E\{X(t_1)X(t)\}]$$

et (4.60) s'ensuit avec  $t = t_2$ . La preuve de (4.62) est similaire :

Nous multiplions (4.53) par  $Y(t_2)$  et utilisons (4.56). Ceci donne :

$$E\{Y(t)Y(t_2)\} = L_t[E\{X(t)Y(t_2)\}]$$

et (4.62) s'ensuit avec  $t = t_1$

Le théorème précédent est illustré dans la Figure 4.5b : si  $R_{XX}(t_1, t_2)$  est l'entrée du système donné et le système fonctionne avec la variable  $t_2$ , la sortie est égale à  $R_{XY}(t_1, t_2)$ . Si  $R_{XY}(t_1, t_2)$  est l'entrée et le système fonctionne avec  $t_1$ , la sortie est égale à  $R_{YY}(t_1, t_2)$ . En insérant (4.61) dans (4.63), nous obtenons :

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1 - \alpha, t_2 - \beta) h(\alpha) h(\beta) d\alpha d\beta$$

Ceci exprime directement  $R_{YY}(t_1, t_2)$  en fonction de  $R_{XX}(t_1, t_2)$ . Cependant, conceptuellement et opérationnellement, il est préférable de trouver  $R_{XY}(t_1, t_2)$ .

#### Exemple 4.10

Un processus stationnaire  $V(t)$  avec une autocorrélation  $R_{VV}(\tau) = q\delta(\tau)$  (bruit blanc) est appliqué à  $t = 0$  à un système linéaire avec :

$$h(t) = e^{-ct}U(t)$$

Nous montrons que l'autocorrélation de la sortie résultante  $Y(t)$  est égale à :

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \frac{q}{2c} (1 - e^{-2ct}) e^{-c|t_2 - t_1|} \quad (4.64)$$

Pour  $0 < t_1 < t_2$ .

**Preuve :** Nous pouvons utiliser les résultats précédents si nous supposons que l'entrée du système est le processus  $X(t) = V(t)U(t)$ .

Avec cette hypothèse, toutes les corrélations sont nulles si  $t_1 < 0$  ou  $t_2 < 0$ . Pour  $t_1 < 0$  et  $t_2 > 0$ , on a :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E\{V(t_1)V(t_2)\} = q\delta(t_1 - t_2)$$

Comme nous voyons de (4.60),  $R_{XY}(t_1, t_2)$  est égale à la réponse du système à  $q\delta(t_1 - t_2)$  considérée comme une fonction de  $t_2$ . Puisque  $\delta(t_1 - t_2) = \delta(t_2 - t_1)$  et  $L[\delta(t_1 - t_2)] = h(t_1 - t_2)$  (invariance dans le temps), nous concluons que :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = qh(t_1 - t_2) = qe^{-c(t_1 - t_2)}U(t_1 - t_2)U(t_1)$$

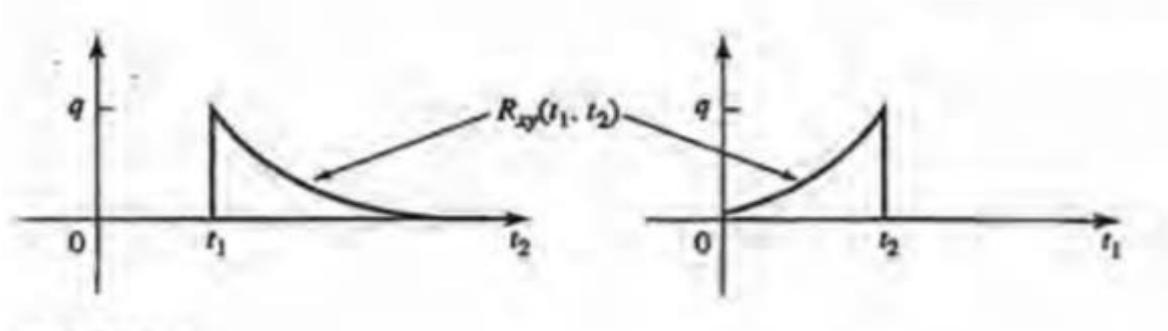


Figure 4.6 : Allure de l'inter-corrélation  $R_{XY}(t_1, t_2)$

Dans la Figure 4.6, nous montrons  $R_{XY}(t_1, t_2)$  comme une fonction de  $t_1$  et  $t_2$ . En insérant dans (4.63), nous obtenons :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = q \int_0^{t_1} e^{c(t_1-\alpha-t_2)} e^{-c\alpha} d\alpha \quad t_1 < t_2$$

et (4.64) est obtenue. On remarque que :

$$E\{Y^2(t)\} = R_{YY}(t, t) = \frac{q}{2c} (1 - e^{-2ct}) = \int_0^t h^2(\alpha) d\alpha$$

### Corollaire

L'auto-covariance  $C_{YY}(t_1, t_2)$  de  $Y(t)$  est l'autocorrélation du processus  $\bar{Y}(t) = Y(t) - \eta_Y(t)$  et, comme nous voyons de (4.59),  $\bar{Y}(t)$  est égal à  $L[\bar{X}(t)]$ . En appliquant (4.61 et (4.63 aux processus centrés  $\bar{X}(t)$  et  $\bar{Y}(t)$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} C_{XY}(t_1, t_2) &= C_{XX}(t_1, t_2) * h(t_2) \\ C_{YY}(t_1, t_2) &= C_{XY}(t_1, t_2) * h(t_1) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Où les convolutions sont en  $t_1$  et  $t_2$  respectivement.

### 4.5.2.3. Processus complexes

Les résultats précédents peuvent être facilement étendus aux processus complexes et aux systèmes avec des valeurs complexes de  $h(t)$ .

En raisonnant comme dans le cas réel, on obtient :

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= R_{XX}(t_1, t_2) * h^*(t_2) \\ R_{YY}(t_1, t_2) &= R_{XY}(t_1, t_2) * h(t_1) \end{aligned} \quad (4.66)$$

#### 4.5.2.4. Réponse d'un système au bruit blanc

Nous déterminerons la puissance moyenne  $E \{|Y(t)|^2\}$  de la sortie d'un système piloté par le bruit blanc (white noise). C'est un cas particulier de (4.66), cependant, en raison de son importance, il est énoncé comme un théorème.

**Théorème :** Si l'entrée  $X(t)$  d'un système linéaire est un bruit blanc avec l'autocorrélation

$$R_{XX}(t_1, t_2) = q(t_1)\delta(t_1 - t_2)$$

alors

$$E \{|Y(t)|^2\} = q(t) * |h(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} q(t - \alpha) |h(\alpha)|^2 d\alpha \quad (4.67)$$

#### Preuve

De (4.67), il s'ensuit que :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = q(t_1)\delta(t_2 - t_1) * h^*(t_2) = q(t_1)h^*(t_2 - t_1)$$

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t_1 - \alpha)h^*[t_2 - (t_1 - \alpha)] h(\alpha)d\alpha$$

Et avec  $t_1 = t_2 = t$ , (4.67) est obtenue.

#### Cas particuliers :

a) Si  $X(t)$  est un bruit blanc stationnaire, alors  $q(t) = q$  et (4.67) donne :

$$E\{Y^2(t)\} = qE \quad \text{où ; } E = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt \text{ est l'énergie de } h(t).$$

b) Si  $h(t)$  est de courte durée par rapport aux variations de  $q(t)$ , alors

$$E\{Y^2(t)\} \cong q(t) \int_{-\infty}^{\infty} |h(\alpha)|^2 d\alpha = Eq(t) \quad (4.68)$$

Cette relation justifie le terme « intensité moyenne » utilisée pour décrire la fonction  $q(t)$ .

c) Si  $R_{VV}(\tau) = q\delta(\tau)$  et  $V(t)$  est appliqué au système à  $t = 0$ , alors  $q(t) = qU(t)$  et (4.67) donne :

$$E\{Y^2(t)\} = q \int_{-\infty}^t |h(\alpha)|^2 d\alpha$$

#### 4.5.2.5. Différentiateurs

Un différentiateur est un système linéaire dont la sortie est la dérivée de l'entrée c'est à dire  $L\{X(t)\} = X'(t)$ .

Nous pouvons, donc, utiliser les résultats précédents pour trouver la moyenne et l'autocorrélation de  $X'(t)$ .

De (4.57), il s'en suit que :

$$\eta_{X'}(t) = L[\eta_X(t)] = \eta_X'(t) \quad (4.69)$$

De la même façon [voir (4.60)]

$$R_{XX'}(t_1, t_2) = L_2[R_{XX}(t_1, t_2)] = \frac{\partial R_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_2} \quad (4.70)$$

car, dans ce cas,  $L_2$  signifie la différentiation par rapport à  $t_2$ . Finalement,

$$R_{X'X'}(t_1, t_2) = L_1[R_{XX'}(t_1, t_2)] = \frac{\partial R_{XX'}(t_1, t_2)}{\partial t_1} \quad (4.71)$$

En combinant (4.70) et (4.71), nous obtenons :

$$R_{X'X'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \quad (4.72)$$

**Processus Stationnaire :** Si  $X(t)$  est SSL, alors  $\eta_X(t)$  est constante; donc :

$$E\{X'(t)\} = 0 \quad (4.73)$$

En plus, comme  $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau)$ , nous concluons avec  $\tau = t_1 - t_2$  que

$$\frac{\partial R_{XX}(t_1 - t_2)}{\partial t_2} = -\frac{dR_{XX}(\tau)}{d\tau} \quad \frac{\partial^2 R_{XX}(t_1 - t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = -\frac{d^2 R_{XX}(\tau)}{d\tau^2}$$

Donc

$$R_{XX'}(\tau) = -R'_{XX}(\tau) \quad R_{X'X'}(\tau) = -R''_{XX}(\tau) \quad (4.74)$$

#### 4.5.2.6. Equations différentielles

Une équation différentielle déterministe avec une excitation aléatoire est de la forme suivante :

$$a_n Y^{(m)}(t) + \dots + a_0 Y(t) = X(t) \quad (4.75)$$

Où, les coefficients  $a_k$  sont des constantes données et l'excitation  $X(t)$  est un processus stochastique. Nous allons considérer sa solution  $Y(t)$  en supposant que les conditions initiales sont nulles. Avec cette hypothèse,  $Y(t)$  est unique (réponse à l'état zéro) et satisfait la condition de la linéarité (4.54).

Nous pouvons, donc, interpréter  $Y(t)$  comme la sortie d'un système linéaire spécifié par (4.75). En général, la détermination des statistiques complètes de  $Y(t)$  est compliqué. Dans ce qui suit, nous évaluons seulement ses moments du second ordre en utilisant les résultats précédents.

La sortie  $Y(t)$  de ce système est un processus avec les conditions initiales nulles vérifiant (4.75).

#### a) La moyenne :

Comme nous le savons [voir (4.57)] la moyenne  $\eta_Y(t)$  de  $Y(t)$  est la sortie de  $L$  avec l'entrée  $\eta_X(t)$ . Donc elle vérifie l'équation

$$a_n \eta_Y^{(n)}(t) + \dots + a_0 \eta_Y(t) = \eta_X(t) \quad (4.76)$$

et les conditions initiales sont :

$$\eta_Y(0) = \dots = \eta_Y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (4.77)$$

Ce résultat peut être établi directement par :

$$E \{Y^{(k)}(t)\} = \eta_Y^{(k)}(t) \quad (4.78)$$

Prenant l'espérance des deux membres de (4.75) et utilisant (4.78), nous obtenons (4.76). L'équation (4.77) vient de (4.78) car  $Y^{(k)}(0) = 0$  par hypothèse.

#### b) La corrélation.

Pour déterminer  $R_{XY}(t_1, t_2)$ , nous utilisons (4.60).

$$R_{XY}(t_1, t_2) = L_2[R_{XX}(t_1, t_2)]$$

Dans ce cas,  $L_2$  signifie que  $R_{XY}(t_1, t_2)$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$a_n \frac{\partial^n R_{XY}(t_1, t_2)}{\partial t_2^n} + \dots + a_0 R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2) \quad (4.79)$$

avec les conditions initiales ;

$$R_{XY}(t_1, 0) = \dots = \frac{\partial^{n-1} R_{XY}(t_1, 0)}{\partial t_2^{n-1}} = 0 \quad (4.80)$$

De la même manière, puisque [voir (4.62)]

$$R_{YY}(t_1, t_2) = L_1[R_{XY}(t_1, t_2)]$$

Nous concluons comme précédemment que :

$$a_n \frac{\partial^n R_{YY}(t_1, t_2)}{\partial t_1^n} + \dots + a_0 R_{YY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) \quad (4.81)$$

$$R_{YY}(0, t_2) = \dots = \frac{\partial^{n-1} R_{YY}(0, t_2)}{\partial t_1^{n-1}} = 0 \quad (4.82)$$

Ces résultats peuvent être établis directement :

de (4.79), il s'en suit que :  $X(t_1)[a_n Y^{(n)}(t_2) + \dots + a_0 Y(t_2)] = X(t_1)X(t_2)$

Ceci donne (4.79) car

$$E \{X(t_1)Y^{(k)}(t_2)\} = \frac{\partial^k R_{XY}(t_1, t_2)}{\partial t_2^k}$$

De même, (4.81) est une conséquence de l'identité suivante :

$$[a_n Y^{(n)}(t_1) + \dots + a_0 Y(t_1)]Y(t_2) = X(t_1)Y(t_2)$$

Car

$$E \{Y^{(k)}(t_1)Y(t_2)\} = \frac{\partial^k R_{YY}(t_1, t_2)}{\partial t_1^k}$$

Finalement, les valeurs espérées de  $X(t_1)Y^{(k)}(0) = 0$  et  $Y^{(k)}(0)Y(t_2) = 0$  donne (4.80) et (4.82).

#### 4.5.2.7. L'intégrale d'un processus stochastique

L'intégrale  $S = \int_a^b X(t)dt$ , d'un processus stochastique  $X(t)$  est une variable aléatoire  $S$  et sa valeur  $S(\xi)$  pour un essai spécifique  $\xi$  est l'aire sous la courbe  $X(t, \xi)$  dans l'intervalle  $[a, b]$ .

En interprétant ce qui précède comme une intégrale de Riemann, on conclut de la linéarité des espérances que :

$$\eta_S = E\{S\} = \int_a^b E\{X(t)\} dt = \int_a^b \eta(t) dt \quad (4.83)$$

De la même manière. Puisque,  $S^2 = \int_a^b \int_a^b X(t_1)X(t_2)dt_1 dt_2$ , nous concluons, en utilisant à nouveau la linéarité des espérances, que :

$$E\{S^2\} = \int_a^b \int_a^b E\{X(t_1)X(t_2)\}dt_1 dt_2 \quad (4.84)$$

### Exemple 4.11

On va déterminer l'autocorrélation  $R(t_1, t_2)$  du processus  $X(t) = r \cos(\omega t + \varphi)$ .

Nous supposons que les variables aléatoires  $r$  et  $\varphi$  sont indépendantes et  $\varphi$  est uniforme dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ . En utilisant des identités trigonométriques simples, nous trouvons :

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = \frac{1}{2}E\{r^2\}E\{\cos\omega(t_1 - t_2) + \cos(\omega t_1 + \omega t_2 + 2\varphi)\}$$

Et puisque

$$E\{\cos(\omega t_1 + \omega t_2 + 2\varphi)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\omega t_1 + \omega t_2 + 2\varphi) d\varphi = 0$$

On conclut que :

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{2}E\{r^2\}\cos\omega(t_1 - t_2) \quad (4.85)$$

### Exemple 4.12

L'intégrale  $Y = \int_0^t V(\alpha)d\alpha$  peut être considérée comme la sortie d'un système linéaire avec  $X(t) = V(t)U(t)$  et réponse impulsionnelle  $h(t) = U(t)$ . Si, en plus,  $V(t)$  est un bruit blanc avec une intensité moyenne  $q(t)$ , alors  $X(t)$  est un bruit blanc avec une intensité moyenne  $q(t)U(t)$ , et (4.67) donne :

$$E\{Y^2(t)\} = q(t)U(t) * U(t) = \int_0^t q(\alpha)d\alpha$$

### Exemple 4.13

Si  $X(t)$  est SSL et  $S = \int_{-T}^T X(t)dt$  alors ;

$$\sigma_S^2 = \int_{-T}^T \int_{-T}^T C(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|) C(\tau) d\tau \quad (4.86)$$

La dernière égalité s'en suit avec  $\tau = t_1 - t_2$  (voir Fig. 4.7) ; les détails, cependant, sont omis.

#### Cas particuliers :

a) Si  $C(\tau) = q\delta(\tau)$ , alors on a :

$$\sigma_S^2 = q \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|) \delta(\tau) d\tau = 2Tq$$

b) Si  $X(t)$  est un processus a-dépendant et  $a \ll T$  alors :

$$\sigma_S^2 = \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|) C(\tau) d\tau \cong 2T \int_{-a}^a C(\tau) d\tau$$

$$\int_{-T}^T \int_{-T}^T C(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-2T}^{2T} (2T - |\tau|) C(\tau) d\tau$$

Ceci montre que, dans l'évaluation de la variance de S, un processus a-dépendant avec un

$a \ll T$ , peut être remplacé par du bruit blanc avec  $q = \int_{-a}^a C(\tau) d\tau$ .

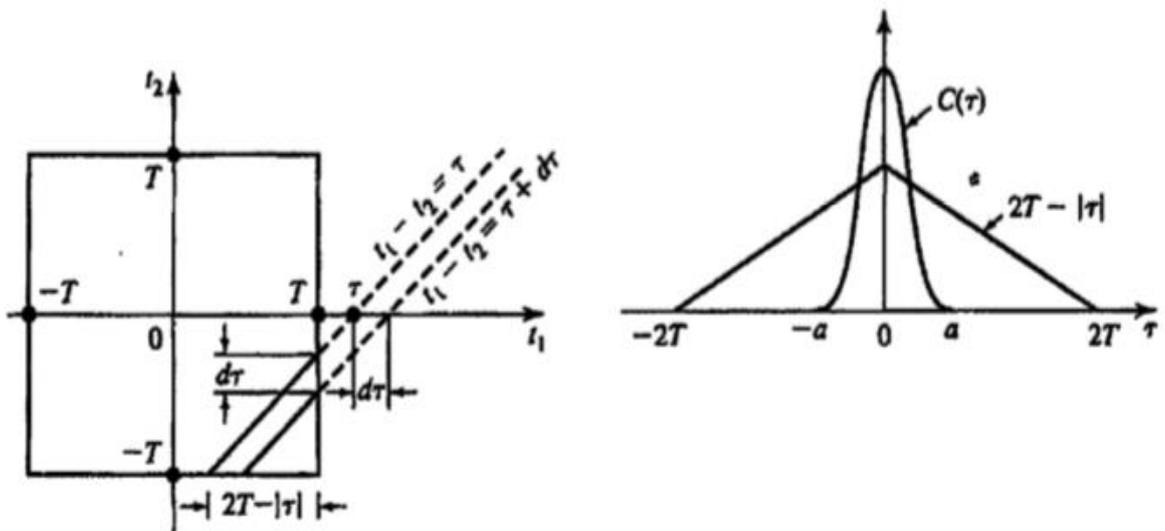


Figure 4.7 : Evaluation de l'intégrale d'un processus stochastique.

## 4.6. Exemples de processus stochastiques

Dans cette section, on expose les processus stochastiques les plus connus et les plus utilisés pour décrire les phénomènes aléatoires rencontrés dans la nature.

### 4.6.1. Processus de Poisson.

Un processus de Poisson est régi par la loi de probabilité discrète dite de « Poisson ». Pour établir un tel processus, on introduit la notion de points de Poisson qui sont spécifiés par les propriétés suivantes :

$P_i$  : Le nombre  $n(t_1, t_2)$  des points  $t_i$  dans un intervalle  $(t_1, t_2)$  de longueur  $t = t_1 - t_2$  est une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $\lambda t$  tel que :

$$P\{n(t_1, t_2) = k\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \quad (4.86)$$

$P_2$  : Si les intervalles  $[t_1, t_2]$  et  $[t_3, t_4]$  ne se chevauchent pas, alors les variables aléatoires  $n(t_1, t_2)$  et  $n(t_3, t_4)$  sont indépendantes. En utilisant les points  $t_i$ , on forme le processus stochastique  $X(t) = n(0, t)$ , illustré à la figure 4.8a. Il s'agit d'un processus à l'état discret constitué d'une famille de fonctions en escalier croissantes avec des discontinuités aux points  $t_i$ .

Pour un  $t$  spécifique,  $X(t)$  est une variable aléatoire de Poisson de paramètre  $\lambda t$  ; par conséquent :  $E\{X(t)\} = \eta(t) = \lambda t$ .

Son autocorrélation vaut :

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \leq t_2 \end{cases} \quad (4.87)$$

Ou l'équivalent qui est :  $C(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2) = \lambda t_1 U(t_2 - t_1) + \lambda t_2 U(t_1 - t_2)$

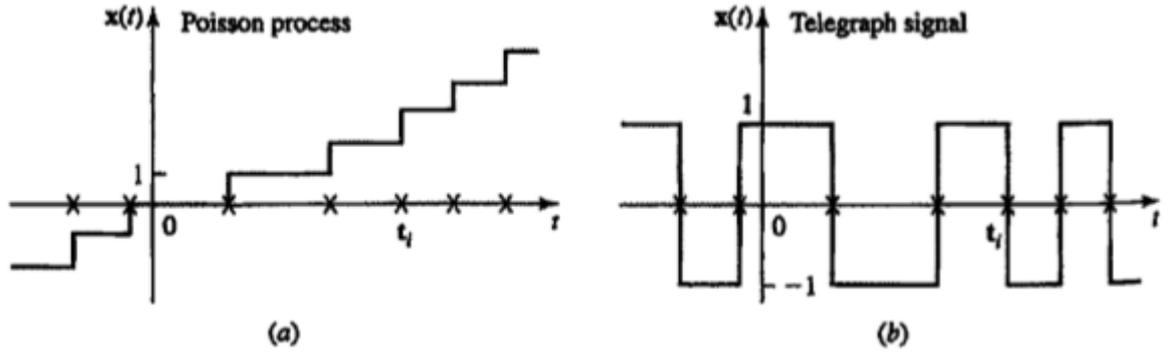


Figure 4.8 : Processus stochastique de Poisson  $X(t) = n(0, t)$

**Preuve :** Ce qui précède est vrai pour  $t_1 = t_2$  (statistiques de la loi de Poisson), on a :

$$E\{X^2(t)\} = \lambda t + \lambda^2 t^2 \quad (4.88)$$

Puisque  $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$ , il suffit de prouver (4.87) pour  $t_1 < t_2$ . Les variables aléatoires  $X(t_1)$  et  $X(t_2) - X(t_1)$  sont indépendants car les intervalles  $[0, t_1]$  et  $[t_1, t_2]$  ne se chevauchent pas. En outre, ce sont des distributions de Poisson de paramètres  $\lambda t_1$  et  $\lambda(t_2 - t_1)$  respectivement. D'où

$$E\{X(t_1)[X(t_2) - X(t_1)]\} = E\{X(t_1)\} E\{X(t_2) - X(t_1)\} = \lambda t_1 \lambda (t_2 - t_1)$$

En utilisant l'identité

$$X(t_1)X(t_2) = X(t_1)[X(t_1) + X(t_2) - X(t_1)]$$

Nous concluons de ce qui précède et de (4.88) que :

$$R(t_1, t_2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1 \lambda (t_2 - t_1)$$

et (4.87) est obtenue.

**a) Cas non uniforme**

Si les points  $t_i$  ont une densité non uniforme  $\lambda(t)$ , alors les résultats précédents sont toujours valables à condition que le produit  $\lambda(t_2 - t_1)$  soit remplacé par l'intégrale de  $\lambda(t)$  de  $t_1$  à  $t_2$ . Ainsi

$$E\{X(t)\} = \int_0^t \lambda(\alpha) d\alpha \quad (4.89)$$

Et

$$R(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \lambda(t) dt \left[ 1 + \int_0^{t_2} \lambda(t) dt \right] \quad t_1 \leq t_2 \quad (4.90)$$

**Exemple 4.14 :** signal télégraphique

En utilisant les points de Poisson  $t_i$ , on forme un processus  $X(t)$  tel que  $X(t) = 1$  si le nombre de points dans l'intervalle  $[0, t]$  est pair, et  $X(t) = -1$  si ce nombre est impair (Fig.4.8b. En notant  $p(k)$  la probabilité que le nombre de points dans l'intervalle  $[0, t]$  soit égal à  $k$ , nous concluons que [voir (4.86)] que :

$$\begin{aligned} P\{X(t) = 1\} &= p(0) + p(2) + \dots \\ &= e^{-\lambda t} \left[ 1 + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots \right] = e^{-\lambda t} \cosh(\lambda t) \\ P\{X(t) = -1\} &= p(1) + p(3) + \dots \\ &= e^{-\lambda t} \left[ \lambda t + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \right] = e^{-\lambda t} \sinh(\lambda t) \end{aligned}$$

D'où

$$E\{X(t)\} = e^{-\lambda t} [\cosh(\lambda t) - \sinh(\lambda t)] = e^{-2\lambda t} \quad (4.91)$$

Pour déterminer  $R(t_1, t_2)$ , on note que, si  $\tau = t_1 - t_2 > 0$  et  $X(t_2) = 1$ , alors  $X(t_1) = 1$  si le nombre de points dans l'intervalle  $[t_1 - t_2]$  est pair. D'où

$$P\{X(t_1) = 1 | X(t_2) = 1\} = e^{-\lambda \tau} \cosh(\lambda \tau) \quad \tau = t_1 - t_2$$

En multipliant par  $P\{X(t_2) = 1\}$ , on obtient :

$$P\{X(t_1) = 1, X(t_2) = 1\} = e^{-\lambda t} \cosh(\lambda t) e^{-\lambda t_2} \cosh(\lambda t_2)$$

De la même façon,

$$P\{X(t_1) = -1, X(t_2) = -1\} = e^{-\lambda t} \cosh(\lambda t) e^{-\lambda t_2} \sinh(\lambda t_2)$$

$$P\{X(t_1) = 1, X(t_2) = -1\} = e^{-\lambda t} \sinh(\lambda t) e^{-\lambda t_2} \sinh(\lambda t_2)$$

$$P\{X(t_1) = -1, X(t_2) = 1\} = e^{-\lambda t} \sinh(\lambda t) e^{-\lambda t_2} \cosh(\lambda t_2)$$

Puisque le produit  $X(t_1) X(t_2)$  est égal à 1 ou -1, nous concluons en omettant les détails que :

$$R(t_1, t_2) = e^{-2\lambda|t_1-t_2|} \quad (4.92)$$

Ce processus est appelé signal télégraphique semi-aléatoire car sa valeur  $X(0) = 1$  à  $t = 0$  n'est pas aléatoire. Pour supprimer cette certitude, nous formons le produit  $Y(t) = \mathbf{a} X(t)$  où  $\mathbf{a}$  est une variable aléatoire indépendante de  $X(t)$  et prenant les valeurs +1 et -1 avec une probabilité égale 1/2. Le processus  $Y(t)$  ainsi formé est appelé signal télégraphique aléatoire. Puisque

$E\{\mathbf{a}\} = 0$  et  $E\{\mathbf{a}^2\} = 1$ , la moyenne de  $Y(t)$  est égale à  $E\{\mathbf{a}\}E\{X(t)\} = 0$  et son autocorrélation est donnée par :

$$E\{Y(t_1) Y(t_2)\} = E\{\mathbf{a}^2\}E\{X(t_1) X(t_2)\} = e^{-2\lambda|t_1-t_2|}$$

On note que lorsque  $t \rightarrow \infty$  les processus  $X(t)$  et  $Y(t)$  ont des statistiques asymptotiquement égales.

### b) Somme de deux processus de Poisson

Si  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  représentent deux processus de Poisson indépendants avec les paramètres  $\lambda_1 t$  et  $\lambda_2 t$ , respectivement, il s'ensuit facilement que leur somme  $X_1(t) + X_2(t)$  est aussi un processus de Poisson de paramètre  $(\lambda_1 + \lambda_2)t$ .

### c) Différence de deux processus de Poisson

Qu'en est-il de la différence de deux processus de Poisson indépendants ? Que dire de la fonction de répartition d'un tel processus ?

Posons :

$$Y(t) = X_1(t) - X_2(t) \quad (4.93)$$

Alors

$$P\{Y(t) = n\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_1(t) = n+k\}P\{X_2(t) = k\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^{n+k}}{(n+k)!} e^{-\lambda_2 t} \frac{(\lambda_2 t)^k}{(k)!} \\
&= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{\lambda_1 \lambda_2})^{n+k}}{k!(n+k)!} \\
&= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n/2} I_{|n|}(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}t) \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (4.94)
\end{aligned}$$

Où ;

$$I_n(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \quad (4.95)$$

représente la fonction de Bessel modifiée d'ordre n. De (4.88) et (4.93) , il s'ensuit que :

$$E\{Y(t)\} = (\lambda_1 - \lambda_2)t \quad Var\{Y(t)\} = (\lambda_1 + \lambda_2)t \quad (4.96)$$

Ainsi, la différence de deux processus de Poisson indépendants n'est pas un processus de Poisson. Cependant, il est facile de montrer qu'une sélection aléatoire à partir d'un processus de Poisson donne un processus de Poisson !

#### d) Sélection aléatoire des points de Poisson

Soit  $X(t) \sim P(\lambda t)$  représentant un processus de Poisson de paramètre  $\lambda t$  comme précédemment, et supposons que chaque occurrence de  $X(t)$  soit étiquetée indépendamment avec la probabilité p. Soit encore  $Y(t)$  le nombre total d'événements marqués dans l'intervalle  $[0, t]$  et soit  $Z(t)$  le nombre total d'événements non marqués dans  $[0, t]$ . Puis

$$Y(t) \sim P(\lambda pt) \quad Z(t) \sim P(\lambda qt) \quad (4.97)$$

Où ;  $q = 1 - p$

**Preuve.** Soit  $A_n$  représente les « n événements se produisant dans  $[0, t]$  et k d'entre eux sont étiquetés ». Puis

$$\begin{aligned}
P(A_n) &= P\{k \text{ événements sont étiquetés} | X(t) = n\} \\
&= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}$$

De plus, l'événement  $\{Y(t) = k\}$  représente l'union mutuellement exclusive des événements  $A_k, A_{k+1}, \dots$ . Donc :

$$\{Y(t) = k\} = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

tel que :

$$\begin{aligned} P\{Y(t) = k\} &= \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = e^{-\lambda t} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda_p t)^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda_q t)^r}{r!} \\ &= e^{-\lambda(1-q)t} \frac{(\lambda_p t)^k}{k!} = e^{-\lambda_p t} \frac{(\lambda_p t)^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.98) \end{aligned}$$

représente un processus de Poisson de paramètre  $\lambda_p t$ . De même, les événements non marqués  $Z(t)$  forment un processus de Poisson indépendant avec le paramètre  $\lambda_q t$ .

#### Exemple 4.15

Si les clients arrivent à un guichet de poste selon un processus de Poisson avec le paramètre  $\lambda t$ , et la probabilité qu'un client soit un homme est de  $p$ , alors les clients masculins forment un processus de Poisson de paramètre  $\lambda_p t$ , et les clients féminins forment un processus de Poisson indépendant de paramètre  $\lambda_q t$  (pour une sélection déterministe de points de Poisson.)

On montre que la probabilité conditionnelle d'un sous-ensemble d'un événement de Poisson est en fait binomiale.

#### e) Points de Poisson points et la loi binomiale :

Considérons, pour  $t_1 < t_2$ , la probabilité conditionnelle suivante :

$$\begin{aligned} &P\{X(t_1) = k | X(t_2) = n\} \\ &= \frac{P\{X(t_1) = k | X(t_2) = n\}}{P\{X(t_2) = n\}} \\ &= \frac{P\{X(t_1) = k, N(t_1, t_2) = n - k\}}{P\{X(t_2) = n\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda t_1} (\lambda t_1)^k e^{-\lambda(t_2-t_1)} [\lambda(t_2-t_1)]^{n-k}}{k! (n-k)!} \frac{n!}{e^{-\lambda t_2} (\lambda t_2)^n} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^k \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)^{n-k} \sim \binom{n, t_1}{k, t_2} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.99) \end{aligned}$$

ce qui prouve l'affirmation précédente. En particulier, soit  $k = n = 1$ , et soit  $\Delta$  le sous-intervalle au début d'un intervalle de longueur  $T$ . Alors de (4.99), on obtient :

$$P\{N(\Delta) = k | N(t, t + T) = 1\} = \frac{\Delta}{T}$$

Mais l'événement  $\{N(\Delta) = 1\}$  est équivalent à  $\{t < t_i < t + \Delta\}$ , où  $t_i$  désigne l'instant d'arrivée aléatoire. La dernière expression représente donc :

$$P\{\{t < t_i < t + \Delta\} | N(t, t + T) = 1\} = \frac{\Delta}{T} \quad (4.100)$$

C'est-à-dire, étant donné qu'une seule occurrence de Poisson a eu lieu dans un intervalle de longueur  $T$ . La densité de probabilité conditionnelle de l'instant d'arrivée correspondant est uniforme dans cet intervalle. En d'autres termes, une arrivée de Poisson est également susceptible de se produire n'importe où dans un intervalle  $T$ , étant donné qu'une seule occurrence a eu lieu dans cet intervalle.

Plus généralement si  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$  représente les  $n$  instants d'arrivée d'un processus de Poisson dans l'intervalle  $[0, T]$ , alors la fonction de répartition conditionnelle jointe de

$t_1 < t_2 < \dots < t_n$  jusqu'à ce que  $X(T) = n$  se simplifie en :

$$\begin{aligned} & P\{t_1 \leq x_1, t_2 \leq x_2, \dots, t_n \leq x_n | X(T) = n\} \\ &= \frac{P\{t_1 \leq x_1, t_2 \leq x_2, \dots, t_n \leq x_n | X(T) = n\}}{P\{X(T) = n\}} \\ &= \frac{1}{e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!}} \sum_{\{m_1, m_2, \dots, m_n\}} \prod_{i=1}^n e^{-\lambda(x_i - x_{i-1})} \frac{[\lambda(x_i - x_{i-1})]^{m_i}}{m_i!} \\ &= \sum_{\{m_1, m_2, \dots, m_n\}} \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_n!} \left(\frac{x_1}{T}\right)^{m_1} \left(\frac{x_2 - x_1}{T}\right)^{m_2} \dots \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{T}\right)^{m_n} \end{aligned} \quad (4.101)$$

avec  $x_0 = 0$ . La sommation porte sur tous les entiers non négatifs  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  pour lesquels  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = n$  et  $m_1 + m_2 + \dots + m_k \geq k = 1, 2, \dots, n - 1$ . La formule ci-dessus en (4.101) représente la distribution de  $n$  points indépendants classés par ordre croissant ; dont chacun est uniformément réparti sur l'intervalle  $[0, T]$ . Il s'ensuit qu'un processus de Poisson

$X(t)$  distribue des points au hasard sur l'intervalle infini  $[0, \infty]$ . De la même manière que la variable aléatoire uniforme distribue des points dans un intervalle fini.

**Exemple 4.16 : Impulsions de Poisson**

Si l'entrée  $X(t)$  d'un différentiateur est un processus de Poisson, la sortie résultante  $Z(t)$  est un train d'impulsions (Fig.4.9)

$$Z(t) = \sum_i \delta(t - t_i) \tag{4.102}$$

On mentionne que,  $Z(t)$  est un processus stationnaire avec une moyenne

$$\eta_Z = \lambda \tag{4.103}$$

et une autocorrélation

$$R_{ZZ}(\tau) = \lambda^2 + \lambda\delta(\tau) \tag{4.104}$$

**Preuve :**

La première équation s'en suit de (4.69) car  $\eta_X(t) = \lambda t$ . Pour prouver la seconde, nous observons que [voir(4.87)]

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2) \tag{4.105}$$

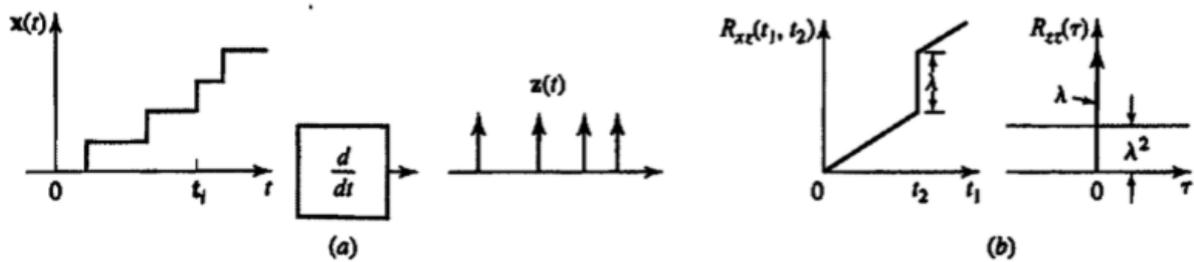


Figure 4.9 : Dérivation d'un processus de poisson

Et comme  $Z(t) = X'(t)$ , (4.70) donne :

$$R_{ZZ}(t_1, t_2) = \frac{R_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \lambda^2 t_1 + \lambda U(t_1, t_2)$$

Le graphe de cette fonction est donné par la Fig. 4.9b, où la variable indépendante est  $t_1$ . Comme nous voyons, elle est discontinue en  $t_1 = t_2$  et sa dérivée par rapport  $t_1$  contient l'impulsion  $\lambda\delta(t_1 - t_2)$ . Ceci donne [voir (4.71)] :

$$R_{ZZ}(t_1, t_2) = \frac{R_{XZ}(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \lambda^2 + \lambda\delta(t_1 - t_2)$$

#### 4.6.2. Processus gaussien

Il y a plusieurs façons de définir un processus gaussien (**normal**). On présente ici deux de ces définitions :

- **Définition 1** : Un P.S. est gaussien si toute combinaison linéaire (de coefficients qui ne sont pas identiquement nuls) est une variable aléatoire gaussienne.
- **Définition 2** : Un P.S. est gaussien si ses densités d'ordre  $n$  sont conjointement gaussiennes, pour toutes valeurs de  $n$ .

En adoptant la deuxième définition, un processus  $X(t)$  est dit normal, si les variables aléatoires  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  sont conjointement normales (gaussiennes) pour tout  $n$  et  $t_1, \dots, t_n$ . Les statistiques d'un processus normal sont complètement déterminées en fonction de la moyenne  $\eta(t)$  et de l'auto-covariance  $C(t_1, t_2)$ .

En effet, puisque  $E\{X(t)\} = \eta(t)$   $\sigma_X^2(t) = C(t, t)$ , on conclut que la densité du premier ordre  $f_X(x, t)$  de  $X(t)$  est la densité normale  $N[\eta(t), \sqrt{C(t, t)}]$ . De même, puisque la fonction  $r(t_1, t_2)$  dans (4.114) est le coefficient de corrélation des variables aléatoires  $X(t_1)$  et  $X(t_2)$ , la densité du second ordre  $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$  de  $X(t)$  est la densité conjointement normale suivante :

$$N[\eta(t_1), \eta(t_2); \sqrt{C(t_1, t_1)}, \sqrt{C(t_2, t_2)}; r(t_1, t_2)] \quad (4.106)$$

La fonction caractéristique d'ordre  $n$  du processus  $X(t)$  est donnée par :

$$\exp \left\{ j \sum_i \eta(t_i) \omega_i - \frac{1}{2} \sum_{i,k} C(t_i, t_k) \omega_i \omega_k \right\} \quad (4.107)$$

Son inverse  $f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$  est la densité d'ordre  $n$  de  $X(t)$

#### 4.6.2.1. Théorème d'existence

Étant donné une fonction arbitraire  $\eta(t)$  et une fonction de densité de probabilité  $C(t_1, t_2)$ , on peut construire un processus normal de moyenne  $\eta(t)$  et d'auto-covariance  $C(t_1, t_2)$ . Ceci s'ensuit si on utilise en (4.107) les fonctions données  $\eta(t)$  et  $C(t_1, t_2)$ . L'inverse de la fonction caractéristique résultante est une densité car la fonction  $C(t_1, t_2)$  est une densité de probabilité par hypothèse.

#### 4.6.2.2. Les propriétés générales d'un processus stochastique

Les propriétés statistiques d'un processus stochastique réel  $X(t)$  sont complètement déterminées par sa fonction de répartition d'ordre  $n$  :

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \quad (4.108)$$

Les statistiques conjointes de deux processus réels  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont déterminées à partir de la fonction de répartition conjointe des variables aléatoires suivantes :

$$X(t_1), \dots, X(t_n), Y(t'_1), \dots, Y(t'_m)$$

Le processus complexe  $Z(t) = X(t) + jY(t)$  est spécifié en termes de statistiques conjointes des processus réels  $X(t)$  et  $Y(t)$ . Un processus vectoriel (processus à  $n$  dimensions) est une famille de  $n$  processus stochastiques.

- **Corrélation et covariance.**

L'autocorrélation d'un processus  $X(t)$ , réel ou complexe, est par définition la moyenne du produit  $X(t_1)X^*(t_2)$ . Cette fonction sera notée  $R(t_1, t_2)$  ou  $R_X(t_1, t_2)$  ou  $R_{XX}(t_1, t_2)$ . Ainsi,

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_2)\} \quad (4.109)$$

où le terme conjugué est associé à la deuxième variable dans  $R_{XX}(t_1, t_2)$ . Il en résulte que

$$R(t_1, t_2) = R^*(t_1, t_2) \quad (4.110)$$

Notons, en outre, que ;

$$R_{XX}(t, t) = E\{|X(t)|^2\} \quad (4.111)$$

Les deux dernières équations sont des cas particuliers de cette propriété : L'autocorrélation  $R_{XX}(t_1, t_2)$  d'un processus stochastique  $X(t)$  est une fonction définie positive, c'est-à-dire pour tout  $a_i$  et  $a_j$  on a :

$$\sum_{i,j} a_i a_j^* R(t_i, t_j) \geq 0 \quad (4.112)$$

Ceci résulte de l'identité suivante :

$$0 \leq E \left\{ \left| \sum_i a_i X(t_i) \right|^2 \right\} = \sum_{i,j} a_i a_j^* E\{X(t_i) X^*(t_j)\}$$

#### Exemple 4.17

a) Si  $X(t) = a e^{j\omega t}$ , alors

$$R(t_1, t_2) = E\{a e^{j\omega t_1} a^* e^{-j\omega t_2}\} = E\{|a|^2\} e^{j\omega(t_1 - t_2)}$$

b) Supposant que les variables  $a_i$  sont un-corrélées avec une moyenne nulle et une variance  $\sigma_i^2$ . Si

$$X(t) = \sum_i a_i e^{j\omega_i t}$$

Alors (4.109) donne :

$$R(t_1, t_2) = \sum_i \sigma_i^2 e^{j\omega_i(t_1 - t_2)}$$

- **L'auto-covariance d'un processus**

L'auto-covariance  $C(t_1, t_2)$  d'un processus  $X(t)$  est la covariance des variables aléatoires  $X(t_1)$  et  $X(t_2)$  exprimée par :

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \eta(t_1)\eta^*(t_2) \quad (4.113)$$

Dans (4.113),  $\eta(t) = E\{X(t)\}$  est la moyenne de  $X(t)$ . Le coefficient de corrélation du processus  $X(t)$  est le rapport suivant :

$$r(t_1, t_2) = \frac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{C(t_1, t_1)C(t_2, t_2)}}$$

$$(4.114)$$

**Remarque :** L'auto-covariance  $C(t_1, t_2)$  d'un processus  $X(t)$  est l'autocorrélation du processus centré  $\bar{X}(t) = X(t) - \eta(t)$ .

Le coefficient de corrélation  $r(t_1, t_2)$  de  $X(t)$  est l'autocovariance du processus normalisé  $X(t)/\sqrt{C(t, t)}$ .

$$|r(t_1, t_2)| \leq 1 \quad r(t, t) = 1 \quad (4.115)$$

### Exemple 4.18

Si  $S = \int_a^b X(t)dt$  alors  $S - \eta_s = \int_a^b \bar{X}(t)dt$

Où ;  $\bar{X}(t) = X(t) - \eta_X(t)$ .

En utilisant (4.84), nous concluons que :

$$\sigma_S^2 = E\{|S - \eta_s|^2\} = \int_a^b \int_a^b C_X(t_1, t_2)dt_1dt_2 \quad (4.116)$$

L'inter-corrélation de deux processus  $X(t)$  et  $Y(t)$  est la fonction suivante :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y^*(t_2)\} = R^*_{YX}(t_1, t_2) \quad (4.117)$$

De la même manière, l'inter covariance entre deux processus est définie par :

$$\begin{aligned} C_{XY}(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)Y^*(t_2)\} - \eta_X(t_1)\eta_Y^*(t_2) \\ &= R_{XY}(t_1, t_2) - \eta_X(t_1)\eta_Y^*(t_2) \end{aligned} \quad (4.118)$$

Deux processus sont dits (mutuellement) orthogonaux si :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = 0 \quad \text{pour tout } t_1 \text{ et } t_2 \quad (4.119)$$

Ils sont un-corrélés si :

$$C_{XY}(t_1, t_2) = 0 \quad \text{pour tout } t_1 \text{ et } t_2 \quad (4.120)$$

### 4.6.2.3. Processus a-dépendants

En général, les valeurs  $X(t_1)$  et  $X(t_2)$  d'un processus stochastique  $X(t)$  sont statistiquement dépendantes pour tout  $t_1$  et  $t_2$ . Cependant, dans la plupart des cas, cette dépendance diminue au fur et à mesure que  $|t_1 - t_2| \rightarrow \infty$ . Ceci conduit au concept suivant :

Un processus stochastique  $X(t)$  est dit a-dépendant si toutes ses valeurs  $X(t)$  pour  $t < t_0$  et pour  $t > t_0 + a$  sont indépendantes les unes des autres. De là, il s'ensuit que :

$$C(t_1, t_2) = 0 \quad \text{pour } |t_1 - t_2| > a \quad (4.121)$$

Un processus  $X(t)$  est appelé a-dépendant de la corrélation si son autocorrélation satisfait (4.121). Clairement, si  $X(t)$  a-dépendant de la corrélation, alors toute combinaison linéaire de ses valeurs pour  $t < t_0$  n'est pas corrélée avec toute combinaison linéaire de ses valeurs pour  $t > t_0 + a$ .

### 4.6.2.4. Bruit blanc

On dira qu'un processus  $V(t)$  est un bruit blanc si ses valeurs  $V(t_i)$  et  $V(t_j)$  ne sont pas corrélées pour tout  $t_i$  et  $t_j \neq t_i$  c.-à-d.  $C(t_i, t_j) = 0 \quad t_j \neq t_i$

Comme nous l'expliquons plus tard, l'auto-covariance d'un processus de bruit blanc non trivial doit être de la forme suivante :

$$C(t_1, t_2) = q(t_1)\delta(t_1 - t_2) \quad q(t) \geq 0 \quad (4.122)$$

Si les variables aléatoires  $V(t_i)$  et  $V(t_j)$  sont non seulement non corrélées mais aussi indépendantes, alors  $V(t)$  sera appelé strictement bruit blanc. Sauf indication contraire, on supposera que la moyenne d'un processus de bruit blanc est identiquement 0.

#### Exemple 4.19

Supposons que  $V(t)$  est un bruit blanc et

$$X(t) = \int_0^t v(\alpha) d\alpha \quad (4.123)$$

En insérant (4.122) dans (4.123), on obtient :

$$E\{X^2(t)\} = \int_0^t \int_0^t q(t_1) \delta(t_1 - t_2) dt_2 dt_1 = \int_0^t q(t_1) dt_1 \quad (4.124)$$

Car

$$\int_0^t \delta(t_1 - t_2) dt_2 = 1 \quad \text{pour } 0 < t_1 < t$$

### Exemple 4.20

Supposons que  $X(t)$  est processus normal avec :

$$\eta(t) = 3 \quad C(t_1, t_2) = 4e^{-0.2|t_1 - t_2|}$$

- a) Trouver la probabilité que  $X(5) \leq 2$ .

Clairement,  $X(5)$  est une variable aléatoire normale de moyenne  $\eta(5) = 3$  et de variance  $C(5, 5) = 4$ . Donc :

$$P\{X(5) \leq 2\} = G\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.309$$

- b) Trouver la probabilité que  $|X(8) - X(5)| \leq 1$ .

La différence  $S = X(8) - X(5)$  est une variable aléatoire normale de moyenne

$$\eta(8) - \eta(5) = 3 - 3 = 0 \text{ et de variance}$$

$$C(8, 8) + C(5, 5) - 2C(8, 5) = 8(1 - e^{-0.6}) = 3.608.$$

Donc ;

$$P\{|X(8) - X(5)| \leq 1\} = 2G\left(-\frac{1}{1.9}\right) = 0.4$$

### 4.6.3. Processus de Markov

Les processus de Markov jouent un rôle important dans la théorie du traitement du signal, parce qu'ils conduisent, dans beaucoup de circonstances, à des filtres de mémoire finie. On présente ici uniquement la définition pour des processus discrets (ensemble  $T$  dénombrable).

#### 4.6.3.1. Définition

Un processus  $X(t), t \in T$  est de Markov si

$$p(X(k+1)/X(k)X(k-1)\cdots) = p(X(k+1)/X(k)) \quad (4.125)$$

L'équation (4.125) décrit de façon formelle la propriété suivante :

Le **futur** et le **passé** sont conditionnellement indépendants, étant donné le **présent**.

Quand les variables aléatoires  $X(k)$  sont discrètes, définies dans un même ensemble dénombrable  $N$ , on appelle le processus de Markov une **chaîne de Markov**. Ces processus sont complètement caractérisés par :

- La distribution de leur valeur initiale :

$$p\{X(0) = a_i\} = p_i^0, \forall a_i \in N \quad (4.126)$$

- L'ensemble de probabilités conditionnelles :

$$p\{X(k) = a_i / X(k-1) = a_j\} = p_{ij}(k), \forall a_i, a_j \in N \quad (4.127)$$

Avec ;

$$\sum_i p_i^0 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_i p_{ij}(k) = 1, \forall j, \forall k = 1, 2, \dots$$

Si les probabilités  $p_{ij}(k) = p_{ij}$  ne dépendent pas de l'instant  $k$  considéré, on dira qu'il s'agit d'une chaîne de Markov de probabilité de transition stationnaire.

La probabilité pour que la chaîne prenne la valeur  $X(k) = a_i$  à l'instant  $k$ , sachant que sa valeur à l'instant  $n$  est  $X(n) = a_j$ , est donnée par :

$$p_{ij}(k, n) = p\{X(k) = a_i / X(n) = a_j\} = \sum_q p_{iq}(k, r) p_{qj}(r, n) \quad (4.128)$$

où  $r$  est un instant quelconque pris entre  $k$  et  $n$ . La formule de (4.128) est connue par le nom d'équation de **Chapman Kolmogorov**, et joue un rôle fondamental dans l'étude des processus Markov.

Pour des chaînes avec des transitions stationnaires, la probabilité dépend uniquement de la distance entre les deux instants considérés :

$$p_{ij}(k - n) = p\{X(k) = a_i / X(n) = a_j\} = \sum_q p_{iq}(k - r) p_{qj}(r - n) \quad (4.129)$$

Si on pose,  $m = k - r$  et  $s = r - n$  ( $k - n = m + s$ ), on obtient :

$$p_{ij}(m + s) = \sum_q p_{iq}(m) p_{qj}(s) \quad (4.130)$$

Considérons maintenant le cas où l'ensemble de valeurs prises par la chaîne est **fini**.

Soit  $\mathbf{P}$  la matrice  $M \times M$  dont les entrées sont les valeurs de la probabilité de transition de la chaîne :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & & p_{M1} \\ & \ddots & \\ p_{1M} & & p_{MM} \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

Alors, la densité de transition  $\mathbf{P}^{(n)}$ , formée par les valeurs de la probabilité de transition en  $n$  étapes, est donnée par la puissance  $n$  de la matrice  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n \quad (4.132)$$

Les équations précédentes permettent le calcul de la loi de probabilité pour n'importe quel instant  $k$  :

$$p_i^{(k)} = p\{X(k) = a_i\} = P_i^{(n)} p_j^{(0)} \quad (4.133)$$

En définissant,  $p^{(k)}$  comme étant le vecteur  $p^{(k)} = \begin{bmatrix} p_1^{(k)} \\ \vdots \\ p_M^{(k)} \end{bmatrix}$ , on obtient l'équation suivante :

$$p^{(k)} = \mathbf{P}^{(k)} p^{(0)} = \mathbf{P}^n p^{(0)} \quad (4.134)$$

#### 4.6.3.2. Fermeture et ensembles fermés

On dit que l'état  $a_i$  peut être atteint à partir de l'état  $a_j$ , s'il existe un  $n \geq 0$  tel que :  $p_{ij}^{(n)} > 0$ .

- **Définitions**

- Un sous ensemble  $\mathbf{C}$  de l'espace d'états  $N$  est **fermé** si aucun état en dehors de  $\mathbf{C}$  ne peut être atteint à partir d'un état dans  $\mathbf{C}$ . Soit  $\mathbf{B}$  un sous ensemble arbitraire de  $N$ . On appelle **fermeture de  $\mathbf{B}$**  le plus petit sous ensemble de  $N$  contenant  $\mathbf{B}$  qui est fermé. Si la fermeture d'un élément  $a_i$  de  $N$  coïncide avec  $a_i$ , alors on dit que l'état  $a_i$  est **absorbant**.
- Une chaîne de Markov est **irréductible** si le seul sous ensemble fermé de  $N$  est  $N$ .

- Le sous ensemble  $C$  est fermé si et seulement si :

$$p_{ij} = 0, a_i \notin C, a_j \in C \quad (4.135)$$

Dans ce cas, on peut éliminer toutes les lignes et colonnes correspondantes aux états en dehors de  $C$ , et la matrice résultante est encore une probabilité de transition pour une chaîne réduite, qui a pour espace d'états  $N$ .

### Exemple 4.21

Considérons une chaîne de Markov avec la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 & .7 \\ 0 & .3 & .3 & 0 & .3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 0 \\ 1. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .2 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 & .3 \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

#### Remarques concernant cette matrice :

- On a 9 lignes et 9 colonnes, donc on a 9 états dans la chaîne de Markov et cette matrice donne les probabilités de transitions entre ces états.
- L'état 7 ne peut conduire qu'à lui-même. Il s'agit donc d'un état **absorbant** : si la chaîne rentre dans cet état, elle y restera toujours.
- L'état 6 peut conduire à lui-même ou à l'état 7. Donc,  $C_1 = \{e_6, e_7\}$  est un ensemble fermé.
- L'état 1 ne peut conduire qu'à l'état 4, et que celui-ci ne peut conduire qu'à 1 de nouveau ou à 9. Finalement, l'état 9 peut de nouveau conduire à 1 ou rester dans le même état. L'ensemble  $C_2 = \{e_1, e_4, e_9\}$  constitue donc un ensemble fermé.
- L'état 2 ne peut conduire qu'aux états 6 ou 7.  $C_3 = \{e_2, e_6, e_7\}$  est donc aussi un ensemble fermé.
- Les autres ensembles fermés de cette chaîne sont :

$$C_4 = \{e_2, e_3, e_6, e_7, e_8\}, C_5 = \{e_2, e_5, e_6, e_7\}.$$

- En changeant la numérotation des états (6, 7, 2, 5, 3, 8,1,4,9) permet d'écrire la matrice de transition de cette chaîne de la forme suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1. & 1. & .2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .3 & .3 & .3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .5 & .7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .5 & .3 \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

Si une chaîne a un sous ensemble fermé de dimension  $r$ , alors on peut toujours réordonner les états de façon à écrire sa matrice de transition sous la forme suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} Q & U \\ 0 & V \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

où la matrice  $Q$ , est de dimension  $r \times r$  et  $V$  est une matrice carrée de dimension  $M - r$ . Dans ce cas, on vérifie facilement que :

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q^n & U^n \\ 0 & V^n \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

Ceci indique qu'on peut étudier séparément l'évolution des états dans un ensemble fermé et dans son complément.

#### 4.6.3.3. Autres définitions

- Un état  $a_i$  admet une période  $T > 1$ , si  $p_{ij}^{(n)} = 0, n \neq kT$ , e  $T$  est le plus grand entier avec cette propriété.
- Soit  $f_{ij}^{(n)}$  la probabilité pour que, depuis l'état  $i$ , le premier retour à l'état  $j$  soit obtenu après  $n$  étapes. Par définition,  $f_{ij}^{(0)} = 0$ . Alors, la probabilité pour que la chaîne retourne à  $i$  après avoir passé par  $j$  est donnée par :

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \quad (4.140)$$

et le nombre moyen d'étapes nécessaires (temps moyen de récurrence) pour y retourner est

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} \quad (4.141)$$

Quand  $f_{ij}=1$ , les  $f_{ij}^{(n)}$  représentent une loi de probabilité, et on l'appelle la distribution du premier temps de passage.

- c) Un état  $a_i$  est **permanent** si  $f_{ij}=1$  et **transitoire** si  $f_{ij}<1$ . Un état persistant (permanent) est dit **nul** si son temps moyen de récurrence est infini. Un état apériodique persistant et non nul est dit : **ergodique**.

#### 4.7. Statistiques d'ordre supérieur (Moments Généraux).

Les moments de tout ordre de la sortie  $Y(t)$  d'un système linéaire peuvent être exprimés en fonction des moments correspondants à l'entrée  $X(t)$ . Comme illustration, nous allons déterminer le moment du troisième ordre  $R_{YYY}(t_1, t_2, t_3) = E \{Y_1(t)Y_2(t)Y_3(t)\}$  de  $Y(t)$  en fonction du moment du troisième ordre  $R_{XXX}(t_1, t_2, t_3)$  de  $X(t)$ . En procédant comme dans (4.60), nous obtenons :

$$\begin{aligned} E \{X(t_1)X(t_2)Y(t_3)\} &= L_3[E \{X(t_1)X(t_2)X(t_3)\}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XXX}(t_1, t_2, t_3 - \gamma)h(\gamma)d\gamma \end{aligned} \quad (4.142)$$

$$\begin{aligned} E \{X(t_1)Y(t_2)Y(t_3)\} &= L_2[E \{X(t_1)X(t_2)Y(t_3)\}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XXY}(t_1, t_2 - \beta, t_3)h(\beta)d\beta \end{aligned} \quad (4.143)$$

$$\begin{aligned} E \{Y(t_1)Y(t_2)Y(t_3)\} &= L_1[E \{X(t_1)Y(t_2)Y(t_3)\}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t_1 - \alpha, t_2, t_3)h(\alpha)d\alpha \end{aligned} \quad (4.144)$$

On remarque que pour l'évaluation de  $R_{YYY}(t_1, t_2, t_3)$  en des instants spécifiques  $t_1, t_2$  et  $t_3$ , la fonction  $R_{XXX}(t_1, t_2, t_3)$  doit être connue pour tout  $t_1, t_2$  et  $t_3$ .

##### 4.7.1. Accroissements non corrélés et indépendants

Si les accroissements  $X(t_2) - X(t_1)$  et  $X(t_4) - X(t_3)$  d'un processus  $X(t)$  sont non corrélés (indépendants) pour tout  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ , alors on dit que  $X(t)$  est un processus avec des accroissements non corrélés (indépendants). Le processus de Poisson est un processus à

accroissements indépendants. L'intégrale (4.123) du bruit blanc est un processus avec des accroissements non corrélés.

#### 4.7.2. Processus indépendants

Si deux processus  $X(t)$  et  $Y(t)$  sont tels que les variables aléatoires  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  et  $Y(t'_1), \dots, Y(t'_n)$  sont indépendantes l'une de l'autre, alors ces processus sont appelés indépendants.

#### 4.7.3. Processus ponctuel et renouvelable

Un processus ponctuel est un ensemble de points aléatoires  $t_i$  ; sur l'axe du temps. A chaque processus ponctuel on peut associer un processus stochastique  $X(t)$  égal au nombre de points  $t_i$  dans l'intervalle  $[0, t]$ . Un exemple est le processus de Poisson. A chaque processus ponctuel  $t_i$  on peut associer une suite de variables aléatoires  $Z_n$  telle que :

$$Z_1 = t_1 \quad Z_2 = t_2 - t_1, \dots, Z_n = t_n - t_{n-1} \quad (4.145)$$

Où ;  $t_1$  est le premier point aléatoire à droite de l'origine. Cette séquence est appelée processus de renouvellement. Un exemple est l'histoire de la vie des ampoules qui sont remplacées dès qu'elles tombent en panne. Dans ce cas,  $Z_i$  est le temps total de fonctionnement de la  $i^{\text{ème}}$  ampoule et  $t_i$  est le temps de sa panne. Nous avons ainsi établi une correspondance entre les trois concepts suivants (Fig.4.10) : (a) un processus ponctuel  $t_i$ , (b) un processus stochastique à états discrets  $X(t)$  croissant par pas unitaires aux points  $t_i$  , ( c) un processus de renouvellement constitué des variables aléatoires  $Z_i$  et tel que :  $t_n = Z_1 + \dots + Z_n$ .

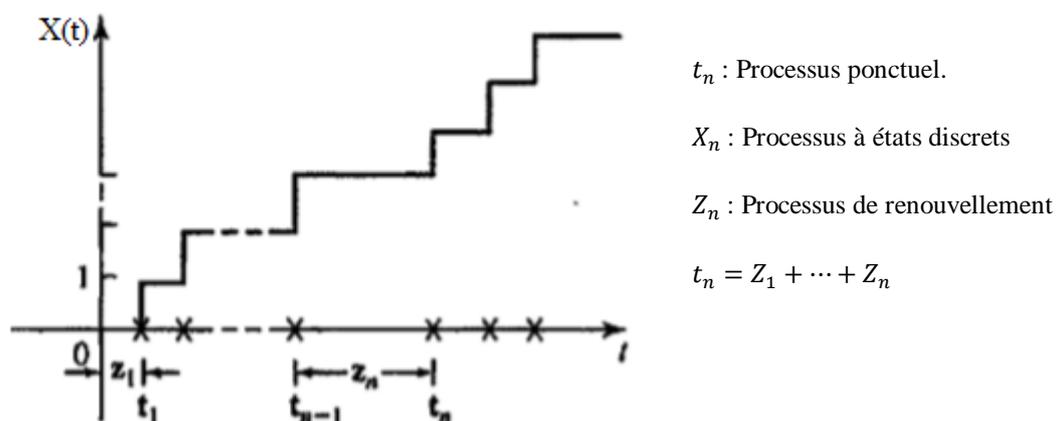


Figure 4.10 : processus ponctuel et renouvelable

## 4.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par présenter les notions de processus stochastiques. Ensuite, un rappel sur les stationnarités au sens large, au sens strict et de l'ergodicité est donné.

Les statistiques de la sortie d'un système, à entrée stochastiques, peuvent être exprimées en termes de statistiques de l'entrée. Une analyse de la réponse d'un tel système a été faite en examinant des opérateurs fondamentaux tels que : la dérivée, l'intégrale et d'autres transformations linéaires d'un processus stochastiques stationnaire.

On ne peut pas terminer ce cours sans donner des exemples de processus stochastiques les plus rencontrés pour décrire les phénomènes aléatoires existant dans la nature. Parmi les fameux processus stochastiques, nous avons mentionné : le processus de Poisson, le processus gaussien et le processus de Markov.

Avant de clôturer ce chapitre, nous avons présenté des statistiques d'ordre supérieur concernant les processus stochastiques.