

CHAPITRE 3

TRAITEMENT DES SIGNAUX ALEATOIRES

1.1. Introduction

Pour un signal déterministe, on peut toujours déterminer ses valeurs futures en connaissant son expression analytique (modèle mathématique). C'est-à-dire, on peut prédire n'importe quelle valeur future de ce signal avec précision. Cette propriété n'est pas valide (cette constatation n'est vraie vraie) pour un signal aléatoire. Ce dernier, possède un caractère non reproductible dont l'évolution au cours du temps semble être imprévisible même si les phénomènes sont observés dans des situations identiques. Mathématiquement, un signal aléatoire est considéré comme la réalisation d'un processus aléatoire.

Certaines caractéristiques semblent être conservées d'un signal à l'autre comme la moyenne, la variance, la vitesse de variation. Chaque courbe de la figure 3.1 représente un signal aléatoire.

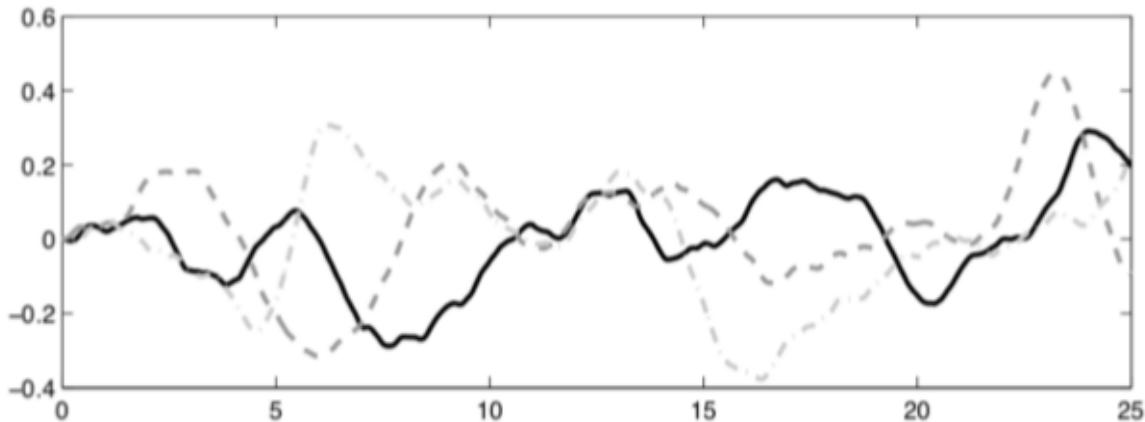


Figure 3.1 : Processus aléatoire (Processus stochastique)

1.2. Représentation statistique et temporelle d'un processus aléatoire

Un signal aléatoire est une réalisation d'un processus aléatoire (représentation temporelle) et la valeur prise à un instant donné est une variable aléatoire (représentation statistique).

On définit un processus aléatoire, noté par $X(s, t)$, comme étant une application, qui à chaque issue d'une expérience aléatoire fait correspondre une fonction de la variable t . Donc, ce dernier étant indexé par la variable s .

Une réalisation particulière du processus aléatoire sera notée $X(t)$ et désignée par $X_i(t)$ ou $X(s_i, t)$, obtenue pour $s = s_i$. $X(s_i, t)$

Lorsque t est fixé, le processus aléatoire se réduit alors à une simple variable aléatoire.

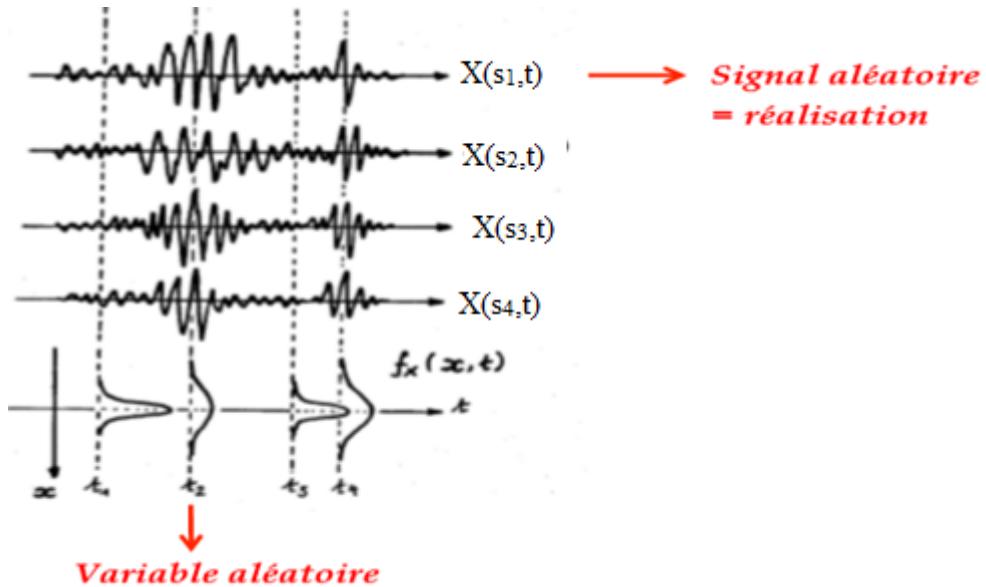


Figure 3.2 : Représentation statistique et temporelle d'un processus aléatoire.

1.3. Stationnarité et propriétés statistiques des signaux aléatoires

1.3.1. Statistiques d'un processus aléatoire

a) Densité de probabilité et fonction de répartition

Soit un processus aléatoire $X(t)$.

- **Ordre 1 :** En considérant un seul instant t_1 , nous obtenons une v.a notée $X(t_1)$ ayant une fonction de répartition désignée par :

$$F_X(x, t_1) \triangleq P(X(s, t_1) \leq x) , x \in R \quad (3.1)$$

et une densité de probabilité exprimée par :

$$f_X(x, t_1) \triangleq \frac{dF_X(x, t_1)}{dx} , x \in R \quad (3.2)$$

La moyenne probabiliste est donnée par :

$$E[g(X(s, t_1))] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x, t_1) dx \quad (3.3)$$

- **Ordre 2 :** En considérant deux instants, on obtient un vecteur aléatoire tel que : $X(s, t_1)$ et $X(s, t_2)$ sont deux variables aléatoires ayant la fonction de répartition et la densité de probabilité conjointes suivantes :

$$F_X(x_1, x_2, t_1, t_2) \triangleq P(X(s, t_1) \leq x_1, (X(s, t_2) \leq x_2), x_1, x_2 \in R^2 \quad (3.4)$$

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) \triangleq \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}, x_1, x_2 \in R^2 \quad (3.5)$$

$$\downarrow$$

$$F_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3.6)$$

$$E[g(X(s, t_1), X(s, t_2))] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3.7)$$

- **Ordre n :** En considérant les instants t_1, t_2, \dots, t_n , on obtient n variables aléatoires et les statistiques précédentes deviennent :

$$F_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) \triangleq P(X(s, t_1) \leq x_1, \dots, (X(s, t_n) \leq x_n), x_1, \dots, x_n \in R^n \quad (3.8)$$

$$f_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) \triangleq \frac{\partial^2 F_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}, x_1, \dots, x_n \in R^n \quad (3.9)$$

$$\downarrow$$

$$F_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3.10)$$

$$E[g(X(s, t_1), \dots, X(s, t_n))] = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_n) f_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3.11)$$

Remarques :

- Les équations précédentes concernent les processus aléatoires continus, pour le cas discret les intégrales deviennent des sommes et le paramètre t sera désigné par n .
- En pratique, on va jusqu'à l'ordre 2.
- La connaissance totale d'un processus aléatoire requiert la connaissance des densités de probabilités à chaque instant t .

b) Exemple d'un signal aléatoire

Soit un générateur d'un signal sinusoïdal, $X(s, t) = A(s)\cos(\omega t + \theta(s))$ avec A et θ deux variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$ et $[0, 2\pi]$ respectivement. La figure 3.3, montre quatre réalisations de ce processus. Chaque réalisation représente un signal aléatoire. On voit que l'amplitude A et la phase initiale θ de ce signal sont aléatoires.

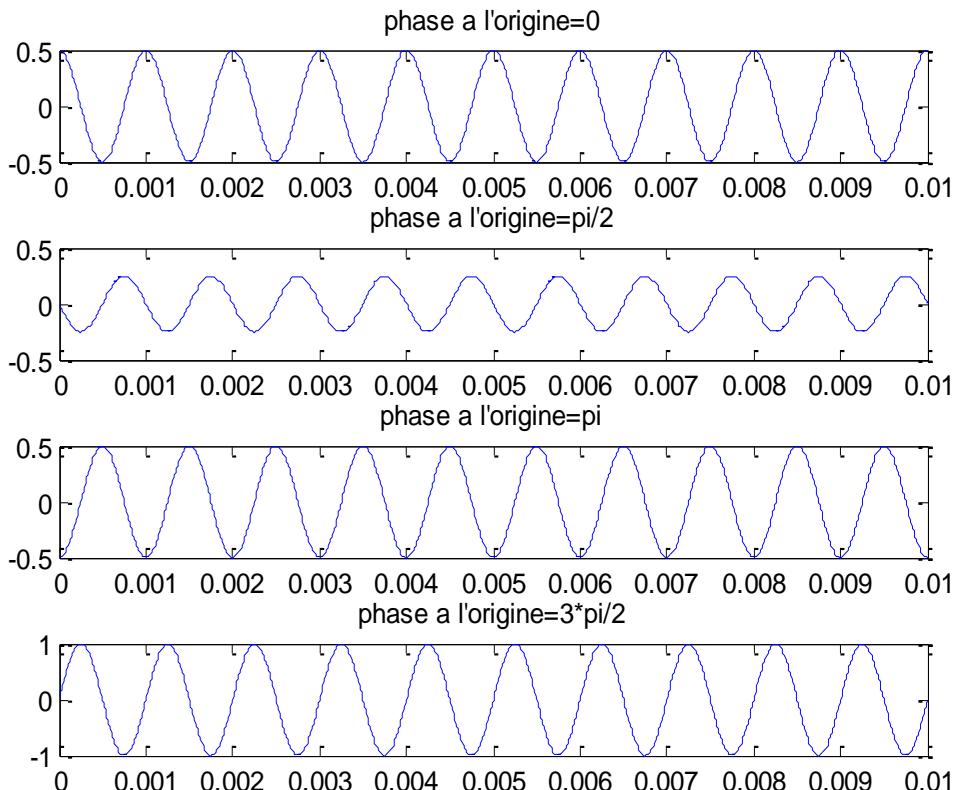


Figure 3.3 : Exemple d'un processus aléatoire

c) Moyenne d'un processus aléatoire

- **Moyenne** : la moyenne d'un processus aléatoire continu $X(t)$ représente le « **moment d'ordre 1** » c.-à-d. les statistiques pour un seul instant t et elle est exprimée par :
 - En temps continu :

$$m_X(t) = E[X(s, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_X(x, t) dx \quad (3.12)$$

- En temps discret :

$$m_X(n) = E[X(s, n)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i(n) f_X(x_i, n) \quad (3.13)$$

- **Moyenne d'ordre 2** :

Dans ce cas on prend deux instants t_1 et t_2 et on définit :

- **L'autocorrélation** pour les deux cas continu et discret respectivement est exprimée par :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E\{X(s, t_1)X^*(s, t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (3.14)$$

$$R_{XX}(n_1, n_2) = E\{X(n_1)X^*(n_2)\} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_i x_j^* f_X(x_i, x_j, n_1, n_2) \quad (3.15)$$

La fonction d'autocorrélation mesure le taux de ressemblance entre deux variables aléatoires.

- **L'auto-covariance** : C'est la moyenne d'ordre centrée

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= E\{(X(s, t_1) - m_X(t_1))(X(s, t_2) - m_X(t_2))^*\} \\ &= R_{XX}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X^*(t_2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour le cas discret le moment centré d'ordre 2 est exprimé par :

$$\begin{aligned} C_{XX}(n_1, n_2) &= E\{[X(n_1) - m_X(n_1)][X(n_2) - m_X(n_2)]^*\} \\ &= R_{XX}(n_1, n_2) - m_X(n_1)m_X^*(n_2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

- **Variance**

La variance d'une fonction aléatoire est déduite de l'auto corrélation en prenant $t_1 = t_2 = t$ ($n_1 = n_2 = n$) pour les deux cas continu et discret respectivement ce qui donne :

$$\sigma_X^2(t) = R_{XX}(t, t) = E\{X(s, t)X^*(s, t)\} = E\{|X(s, t)|^2\} \quad (3.18)$$

$$\sigma_X^2(n) = R_{XX}(n, n) = E\{X(s, n)X^*(s, n)\} = E\{|X(s, n)|^2\} \quad (3.19)$$

On peut généraliser les notions citées précédemment pour deux processus aléatoires $X(s, t)$ et $Y(s, t)$ et on aura :

$$\begin{aligned} & F_{XY}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m) \\ & \triangleq P(X(s, t_1) \leq x_1, \dots, X(s, t_n) \leq x_n, Y(s, t'_1) \leq y_1, \dots, Y(s, t'_m) \leq y_m) \end{aligned} \quad (3.20)$$

- L'inter-corrélation :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(s, t_1)Y^*(s, t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy^* f_X(x, y, t_1, t_2) dx dy \quad (3.21)$$

Pour le cas discret l'inter-corrélation est donnée par :

$$R_{XY}(n_1, n_2) = E\{X(n_1)Y^*(n_2)\} \quad (3.22)$$

- L'inter-covariance :

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E\{(X(s, t_1) - m_X(t_1))(Y(s, t_2) - m_Y(t_2))^*\} \\ &= R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y^*(t_2) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} C_{XY}(n_1, n_2) &= E\{[X(n_1) - m_X(n_1)][Y(n_2) - m_Y(n_2)]\} \\ &= R_{XY}(n_1, n_2) - m_X(n_1)m_Y^*(n_2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

C'est l'inter-corrélation des variables aléatoires centrées.

- Le coefficient de corrélation :

$$\begin{aligned} \rho_{XY}(t_1, t_2) &= \frac{C_{XY}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)} \\ \rho_{XY}(n_1, n_2) &= \frac{C_{XY}(n_1, n_2)}{\sigma_X(n_1)\sigma_Y(n_2)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\sigma_X^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_X(t)][x(t) - m_X(t)]^* f_X(s, t) dx \quad (3.26)$$

On appelle fonction de covariance $C_X(t_1, t_2)$, la fonction des deux variables t_1 et t_2 donnée par :

$$C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]^*\} = C_X^*(t_2, t_1) \quad (3.27)$$

- Indépendance statistique

On dit qu'un processus aléatoire possède des valeurs indépendantes si :

$$f_X[x(t_1), \dots, x(t_n)] = f_X[x(t_1)] \times \dots \times f_X[x(t_n)] \quad (3.28)$$

A tout instant, le futur est indépendant du présent et du passé. En temps discret on garde les mêmes définitions mais avec la notation $f_X[x(n)]$.

1.3.2. Stationnarité d'un signal aléatoire

1.3.2.1. Stationnarité au sens strict

Définition 1 : un processus aléatoire est stationnaire si les statistiques sont invariantes dans le temps.

$$f_X(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = f_X(x_1, \dots, x_n, t_{1+\varepsilon}, \dots, t_n + \varepsilon) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x_i \in \mathfrak{R}, \forall t_j \in \mathfrak{R}, \forall \varepsilon \in \mathfrak{R} \quad (3.29)$$

Définition 2 : un processus aléatoire est stationnaire au sens strict d'ordre k , si ceci est vrai pour $n \leq k$.

Cas particulier $n = 1$:

$$\bullet \quad f_X(x, t) = f_X(x, t + \varepsilon) = f_X(x) \quad (3.30)$$

Preuve : si on pose $\varepsilon = -t$ alors $f_X(x, t + \varepsilon) = f_X(x)$

$$\bullet \quad m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (3.31)$$

Alors, $m_X(t) = m_X = \text{constante}$ c'est-à-dire la moyenne ne dépend pas du temps.

Cas particulier $n = 2$:

$$\bullet \quad f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon) = f_X(x_1, x_2, t_1 - t_2) \quad (3.32)$$

Preuve : si on pose $\varepsilon = -t_2$, on aura $f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, t_1 - t_2, t_2 - t_2)$

$$= f_X(x_1, x_2, \Delta t)$$

L'autocorrélation :

- $R_{XX}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* f_X(x_1, x_2, t_1 - t_2) dx_1 dx_2$
 $= R_{XX}(t_1 - t_2) = R_{XX}(\tau)$ (3.33)

Avec $\tau = t_1 - t_2$

- $\sigma_X^2(t) = R_{XX}(t, t) = R_{XX}(\tau)$ (3.34)

Pour qu'un signal aléatoire soit stationnarité au sens strict il faut que les densités de probabilités conjointes ne dépendent pas de l'instant t_i et toutes ses propriétés statistiques soient invariantes dans le temps.

1.3.2.2. Stationnarité au sens large

Définition 2 : un processus aléatoire est stationnaire au sens large si et seulement si :

- $m_X(t) = m_X = \text{constante}$ et
- $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2) = R_{XX}(\tau)$

De ce fait, la variance est aussi constante puisque : $\sigma_X^2(t) = C_{XX}(t, t) = C_{XX}(0) = \sigma_X^2$

Si $X(s, t)$ est stationnaire au sens strict à l'ordre 2 alors il est stationnaire au sens large mais l'inverse est généralement faux.

Un processus aléatoire est stationnaire au sens large si ses statistiques d'ordre 1 et 2 (Moyenne, variance, fonction d'autocorrélation) sont invariantes dans le temps.

1.3.3. Exemples d'application

Exemple 3.1 : Soient deux variables aléatoires P et Q tel que :

Q : on jette une pièce de monnaie (pile ou face).

P : on jette un dé bien équilibré.

Q= pièce={0,1} et P=dé={1,2,3,4,5,6}

Soit $X(s, t) = P(s) + Q(s).t$.

$X(s, t)$, est-t-il un processus aléatoire ?

Pour répondre à cette question, il faut calculer les statistiques de ce processus.

- a) On trace quelques trajectoires de ce processus en utilisant le logiciel Matlab
- $P(s_1) = 3, Q(s_1) = 1 \Rightarrow X(s_1, t) = 3 + t$
 - $P(s_2) = 2, Q(s_2) = 0 \Rightarrow X(s_2, t) = 2$
 - $P(s_3) = 2, Q(s_3) = 1 \Rightarrow X(s_3, t) = 2 + t$

On remarque qu'on obtient une famille de droites aléatoires comme le montre la figure 3.4 ci-dessous.

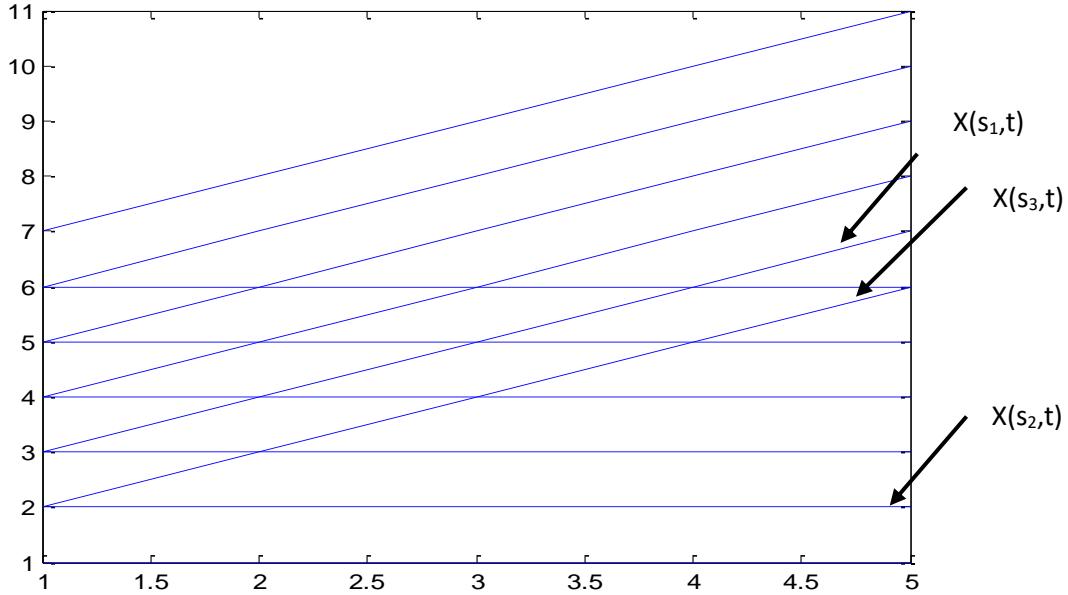


Figure 3.4 : Réalisations du processus aléatoire donné.

Calcul des statistiques de ce processus :

1) Moyenne de $X(s, t)$:

$$m_X(t) = E[X(s, t)] = E[P(s) + Q(s).t] = E[P(s)] + t.E[Q(s)]$$

$P(s)$ et $Q(s)$ sont deux variables aléatoires discrètes dont les densités de probabilités sont les suivantes :

loi de P

y_i	1	2	3	4	5	5
$f_Y(y_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

loi de Q

x_i	0	1
$f_X(x_i)$	1/2	1/2

$$E[Q] = \sum_{i=1}^2 x_i f_X(x_i) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 1/2$$

$$E[P] = \sum_{i=1}^6 y_i f_Y(y_i) = 1/6 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6$$

D'où ;

$$m_X(t) = \frac{21}{6} + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}(7 + t)$$

2) Autocorrélation de $X(s, t)$:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X^*(t_2)] = E[(P + Q \cdot t_1)(P + Q \cdot t_2)^*] \\ &= E[P^2 + P \cdot Q \cdot t_2 + P \cdot Q \cdot t_1 + Q^2 t_1 t_2] \\ &= E[P^2] + (t_1 + t_2)E[P \cdot Q] + t_1 t_2 E[Q^2] \end{aligned}$$

Avec ;

$$E[P \cdot Q] = E[P]E[Q] = \frac{1}{2} \times \frac{21}{6} = 7/4$$

$$E[P^2] = \sum_{i=1}^6 y_i^2 f_Y(y_i) = 1/6 \times (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = 91/6$$

$$E[Q^2] = \sum_{i=1}^2 x_i^2 f_X(x_i) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} = 1/2$$

Alors,

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[P^2] + (t_1 + t_2)E[P \cdot Q] + t_1 t_2 E[Q^2] = \frac{91}{6} + \frac{7}{4}(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}t_1 t_2$$

3) La variance

$$\sigma_X^2(t) = R_{XX}(t, t) = \frac{91}{6} + 2 \times \frac{7}{4}t + \frac{1}{2}t^2 = \frac{91}{6} + \frac{7}{2}t + \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\left(t^2 + 7t + \frac{91}{3}\right)$$

Ce processus n'est pas stationnaire ni au sens strict ni au sens large car les moments d'ordre 1(moyenne) et 2(autocorrélation) dépendent du temps.

Exemple 3.2 :

Soit $y(n)$ une séquence de variables aléatoires gaussiennes non corrélées de moyenne nulle et de variance unité : $\sigma^2(n) = 1$.

- a) Caractériser la séquence (n) .
- b) On définit $x(n) = y(n) + y(n - 1)$, déterminer sa moyenne et son autocorrélation. Caractériser $x(n)$.

Solution

- a) Puisque la non-corrélation implique l'indépendance (pour la Gaussienne), la séquence aléatoire $y(n)$ est indépendante. Puisque la moyenne et la variance sont constantes le processus est stationnaire au sens faible. L'autocorrélation est donnée par :

$$R_{YY}(n_1, n_2) = \sigma^2 \delta(n_1 - n_2) = \delta(n_1 - n_2)$$

- b) Pour chaque n la moyenne de $y(n)$ est nulle, ce qui implique une moyenne nulle pour $x(n)$. Considérons maintenant l'autocorrélation :

$$\begin{aligned} R_{YY}(n_1, n_2) &= E\{x(n_1)x(n_2)\} = E\{[y(n_1) + y(n_1 - 1)][y(n_2) + y(n_2 - 1)]\} \\ &= R_{YY}(n_1, n_2) + R_{YY}(n_1, n_2 - 1) + R_{YY}(n_1 - 1, n_2) + R_{YY}(n_1 - 1, n_2 - 1) \\ &= \sigma^2 \delta(n_1 - n_2) + \sigma^2 \delta(n_1 - n_2 + 1) + \sigma^2 \delta(n_1 - 1 - n_2) + \sigma^2 \delta(n_1 - 1 - n_2 + 1) \\ &= 2\sigma^2 \delta(n_1 - n_2) + \sigma^2 \delta(n_1 - n_2 + 1) + \sigma^2 \delta(n_1 - n_2 - 1) \end{aligned}$$

$$R_{YY}(n_1, n_2) = 2\delta(\tau) + \delta(\tau + 1) + \delta(\tau - 1)$$

Par conséquent : $x(n)$ est stationnaire au sens large mais c'est une séquence aléatoire non indépendante car $x(n)$ et $x(n + 1)$ dépendent de $y(n)$.

Exemple 3.3 : Soit le vecteur aléatoire constitué des deux v.a réelles $X_1(t)$ et $X_2(t)$ définies par :

$$X_1(t) = \cos(\omega t + \varphi) \quad X_2(t) = \sin(\omega t + \varphi)$$

φ est une VA aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$. On note : $X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}$.

La moyenne des fonctions aléatoires est nulle. En effet :

$$E[X_1(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega t}^{\omega t + 2\pi} \cos(\emptyset) d\emptyset = 0 \quad \text{avec} \quad \emptyset = \omega t + \varphi$$

$$E[X_1(t)] = E[X_2(t)] = 0$$

Ainsi, nous n'avons pas besoin de centrer pour calculer la covariance. Cette dernière est donnée par :

$$C_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X^T(t_2)] = E\left\{\begin{bmatrix} X_1(t_1) \\ X_2(t_1) \end{bmatrix} [X_1(t_2) \ X_2(t_2)]\right\}$$

$$C_{XX}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} C_{X_1 X_1}(t_1, t_2) & C_{X_1 X_2}(t_1, t_2) \\ C_{X_2 X_1}(t_1, t_2) & C_{X_2 X_2}(t_1, t_2) \end{bmatrix}$$

$$C_{X_1 X_1}(t_1, t_2) = E[X_1(t_1)X_1(t_2)] = E[\cos(\omega t_1 + \varphi)\cos(\omega t_2 + \varphi)] = \frac{1}{2}\cos(\omega\tau)$$

$$C_{X_1 X_1}(t_1, t_2) = C_{X_2 X_2}(t_1, t_2) \text{ et } C_{X_1 X_2}(t_1, t_2) = -C_{X_2 X_1}(t_1, t_2) = -\frac{1}{2}\sin(\omega\tau)$$

Le fait que la matrice de covariance dépende uniquement de la différence $t_1 - t_2$ montre que la fonction vectorielle considérée ici est stationnaire au sens large.

1.3.4. Caractéristiques temporelles

a) Moyenne temporelle

Elle est prise sur une réalisation x_i du processus aléatoire pour une durée d'observation qui tend vers l'infini.

$$\bar{x}_i(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_i(t) dt \quad (3.35)$$

b) Autocorrélation temporelle

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_i(t)x_i^*(t - \tau) dt \quad (3.36)$$

Où : * signifie le complexe conjugué.

Propriétés :

- La matrice de corrélation d'un processus stochastique discret stationnaire est une matrice de Toeplitz carrée (une matrice carrée est dite de Toeplitz si tous les éléments d'une même diagonale ou sous diagonale sont égaux).
- La matrice de corrélation d'un processus stochastique discret stationnaire est généralement définie positive (une matrice est définie positive si toutes ses valeurs propres sont positives)

Aussi, pour un processus réel on a :

$$C_{XX}(\tau) = C_{XX}(-\tau) \quad (3.37)$$

1.4. Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance, notée DSP représente la répartition de puissance d'un signal suivant les fréquences. La DSP permet de caractériser les signaux stationnaires gaussiens et ergodiques.

Les propriétés énergétiques des signaux aléatoires stationnaires sont décrites à l'aide des moments d'ordre deux, c'est-à-dire des fonctions d'auto et d'inter corrélation, dans le domaine temporel, et à l'aide des densités spectrales de puissance, dans le domaine de Fourier.

Un signal aléatoire $X(t)$ stationnaire est généralement considéré comme un signal à énergie infinie mais à puissance moyenne finie. Donc, on ne peut pas calculer sa transformée de Fourier (problème de convergence de la série).

3.4.1. Théorème d'Einstein-Wiener-Khintchine

La densité spectrale de puissance (Spectre de puissance) d'un signal aléatoire stationnaire ergodique est la transformée de Fourier (à temps discret) de sa fonction d'autocorrélation. Ainsi, la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation et son inverse sont donnés par :

$$S_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau$$

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) e^{2\pi j f \tau} df \quad (3.38)$$

Dans le cas discret, la DSP s'exprime par :

$$S_{XX}(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-2\pi j f \tau}$$

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-1/2}^{+1/2} S_{XX}(f) e^{-2\pi j f \tau} df$$

$$\sigma_{XX}^2 = R_{XX}(0) = \int_{-1/2}^{+1/2} S_{XX}(f) df \quad (3.39)$$

3.4.2. Propriétés du spectre de puissance

Le spectre de puissance est à valeurs réelles (et non à valeurs complexes comme lorsqu'on calcule le spectre d'un signal déterministe par TFtd). La densité spectrale de puissance est positive ou nulle :

$$S_{XX}(f) \geq 0 \quad \forall f \quad (3.40)$$

Le spectre de puissance d'un signal à valeurs réelles est pair :

$$S_{XX}(-f) = S_{XX}(f) \quad (3.41)$$

3.4.3. Théorème de Parseval

Parseval a montré que la puissance moyenne du signal peut se calculer soit en intégrant la distribution temporelle de puissance, soit en intégrant sa distribution fréquentielle de puissance.

Ainsi, la puissance totale du signal est calculée par :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f) df \quad (3.42)$$

La puissance sur une plage de fréquences est donnée par :

$$P_{f_1 \rightarrow f_2} = \int_{-f_2}^{+f_1} S_{XX}(f) df + \int_{f_1}^{f_2} S_{XX}(f) df \quad (3.43)$$

On a deux termes car $S_{XX}(f)$ est symétrique comme le montre la figure 3.5 ci-dessous.

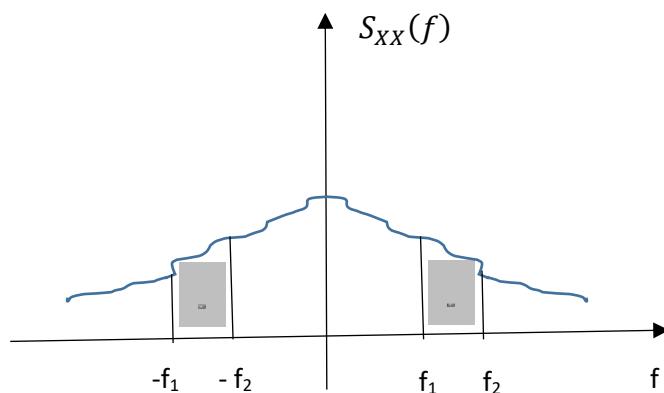


Figure 3.5 : Spectre de puissance d'un signal.

3.4.4. Interprétation physique des moments statistiques

Dans le cas d'un signal stationnaire ergodique :

- $m_X = E[X]$, correspond à la valeur moyenne (composante continue du signal).
- $(E[X])^2$, correspond à la puissance de la composante continue du signal.
- $E[X^2]$, correspond à la puissance totale du signal.
- σ_X^2 , correspond à la puissance des fluctuations autour de la valeur moyenne.

Les trois termes sont liés par la relation suivante :

$$E[X^2] = (E[X])^2 + \sigma_X^2 \quad (3.44)$$

1.5. Echantillonnage des signaux aléatoires

Un signal aléatoire à temps discret peut être construit directement à temps discret, ou être intrinsèquement de nature discrète, ou peut résulter de l'échantillonnage d'un signal aléatoire à temps continu.

1.5.1. Fonction d'autocorrélation

Soient $X_a(t)$ un processus aléatoire continu et $X(n)$ sa version numérique obtenue par échantillonnage de $X_a(t)$ à la période $T_e = \frac{1}{f_e}$:

$$X(n) = X_a(nT_e) \quad (3.45)$$

On cherche à exprimer les fonctions d'autocorrélation et la densité spectrale de $X(n)$ en connaissant celles de $X_a(t)$.

$$\begin{aligned} R_{XX}(n, n-m) &= E[X(n)X(n-m)] = E[X_a(nT_e)X_a((n-m)T_e)] \\ &= R_{X_a}(mT_e) \end{aligned} \quad (3.46)$$

La fonction d'autocorrélation du signal échantillonné s'obtient donc en échantillonnant la fonction d'autocorrélation du signal continu.

$X(n), n \in \mathbb{Z}$, obtenu par échantillonnage régulier de $X_a(t)$ est encore stationnaire au second ordre si $X_a(t)$ vérifie cette propriété.

1.5.2. Densité spectrale de puissance

Soit $S_a(f)$ la DSP de $X_a(t)$ et notons $S_n(f)$ celle de $X(n)$. Puisque $R_{XX}(m) = R_{X_a}(mT_e)$, l'application du théorème d'échantillonnage donne :

$$S_n(f) = f_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_a(f + kf_e) \quad (3.47)$$

On remarque que l'échantillonnage en temps de $R_{XX}(m)$ entraîne la périodisation en fréquence de $S_n(f)$. Le spectre d'un signal aléatoire échantillonné à la période $T_e = 1/f_e$ est périodique de période f_e .

Si la DSP du signal continu est nulle en dehors de la bande de fréquence $[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}]$, on aura :

$$S_n(f) = f_e S_a(f) \quad \forall f \in [-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}] \quad (3.48)$$

1.6. Filtrage des signaux aléatoires

Dans cette section, on verra comment sont transformés les signaux aléatoires et nous allons nous intéresser au filtrage de signaux aléatoires et leur conséquence sur le signal filtré dans les domaines temporels et fréquentiels.

On rappelle qu'un filtre est un système linéaire invariant dans le temps (stationnaire), que l'on peut décrire par une équation différentielle à coefficients constants ou par une intégrale de convolution.

1.6.1. Filtrage temporel d'un signal aléatoire stationnaire au sens large

Soit $X(t)$ un signal aléatoire stationnaire au sens large de moyenne m_X et de fonction d'autocorrélation $R_{XX}(\tau)$, et $Y(t)$ le signal obtenu par filtrage de $X(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ (réelle) (voir fig. 3.6).

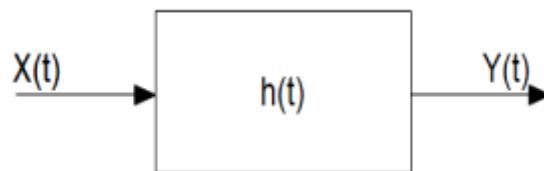


Figure 3.6 : Filtrage d'un signal aléatoire $X(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$.

Le signal à la sortie du filtre $Y(t)$ s'exprime en fonction de $X(t)$ selon :

- En continu : $Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)X(t - \tau)d\tau$
- En discret : $Y(n) = X(n) * h(n) = \sum_k h(k)X(n - k)$

Les caractéristiques de $Y(t)$ peuvent être calculées comme suit :

- **Moyenne :**

$$E[Y(t)] = E[X(t) * h(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau)h(\tau)d\tau\right]$$

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t - \tau)]h(\tau)d\tau \quad (3.49)$$

Si le processus $X(t)$ est stationnaire on a : $E[X(t - \tau)] = E[X(t)]$ ce qui mène à :

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t)]h(\tau)d\tau = E[X(t)] \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau \quad (3.50)$$

Avec : $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = H[0]$ c'est la valeur du spectre $H(f)$ pour $f = 0$.

Enfin :

$$E[Y(t)] = E[X(t)]H[0] \text{ ou } m_Y(t) = H[0]m_X(t) \quad (3.51)$$

- **L'autocorrélation :**

$$R_{YY}(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * R_{XX}(\tau) \quad (3.52)$$

1.6.2. Filtrage fréquentiel d'un signal aléatoire stationnaire au sens large

Théorème : Soit $X(t)$ un signal aléatoire stationnaire au sens large de DSP $S_{XX}(f)$. Soit $Y(t)$ le signal obtenu en filtrant $X(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de gain complexe $H(f)$. Alors, la DSP de $Y(t)$, $S_{YY}(f)$, s'exprime en fonction de $S_{XX}(f)$ comme suit :

$$S_{YY}(f) = |H(f)|^2 S_{XX}(f) \quad (3.53)$$

Et l'inter-spectre de $X(t)$ et $Y(t)$ est donné par :

$$S_{YX}(f) = H(f)S_{XX}(f) \quad (3.54)$$

Exercice d'application :

Soit le signal stationnaire au sens large(SSL) à temps continu, $X(t)$ avec la fonction d'autocorrélation $R_{XX}(\tau) = e^{-100|\tau|} + 4$ et de moyenne $E[X(t)] = 2$. Le signal $X(t)$ est échantillonné à fréquence $f_s = 100\text{Hz}$ conduisant au signal discret $X(n)$.

- a) Donner $R_{XX}(k)$ et $E[X(n)]$ (autocorrélation et moyenne du signal échantillonné $X(n)$)

On donne un système avec une réponse impulsionnelle $h(n)$ et le signal échantillonné $X(n)$ mentionné ci-dessus comme entrée. La sortie est notée $Y(n)$.

- b) En supposant que, $h(n) = a^n u(n)$, avec $u(n)$ est l'échelon unité discrète, $|a| < 1$ et $E[Y(t)] = 8$. Calculer la constante a .

Pour le reste des questions, supposons que $R_{XX}(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

- c) Donner la réponse en amplitude $|H(\varphi)|$ qui dé-corrélerait complètement le signal $X(n)$.

Supposons maintenant $h(n) = \delta(n - 3)$

- d) Calculer la fonction d'inter-corrélation $R_{XY}(k)$ entre l'entrée et la sortie.
e) Calculer la fonction d'autocorrélation $R_{YY}(k)$ de la sortie.

Solution

- a) $E[X(k)] = E[X(t)] = 2$

$$R_{XX}(k) = R_{XX}(kT_s) = e^{-100|kT_s|} + 4 \quad \text{avec } T_s = \frac{1}{f_s} = 1/100, \text{ on obtient :}$$

$$R_{XX}(k) = e^{-|k|} + 4$$

$$\text{b) } E[Y(n)] = E[X(n) * h(n)] = E[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)X(k - n)]$$

$$= E[X(k - n)] \sum_{k=0}^{+\infty} a^k$$

$$m_Y(k) = m_X(k) \cdot \frac{1}{1-a} = \frac{2}{1-a} = 8$$

Donc ; $a=3/4$

$$\text{c) } S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) \quad \text{et} \quad |H(\omega)| = \sqrt{\frac{S_{YY}(\omega)}{S_{XX}(\omega)}}$$

Sortie décorrélée signifie $R_{YY}(k) = c \cdot \delta(k)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow{TF} S_{XX}(\omega) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\cos(2\pi\omega)} = \frac{3/4}{\frac{5}{4} - \cos(2\pi\omega)}$$

$$c \cdot \delta(k) \xrightarrow{TF} S_{YY}(\omega) = c$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{c(\frac{5}{4} - \cos(2\pi\omega))}{3/4}}$$

d) $R_{XY}(k) = h(k) * R_{XX}(\tau)$, $h(n) = \delta(n - 3)$

$$R_{XY}(k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \delta(j - 3) \left(\frac{1}{2}\right)^{|k-3|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k-3|}$$

e) Un retard ne modifiera pas l'autocorrélation de l'entrée, donc $R_{YY}(k) = R_{XX}(k)$.

Aussi, nous pouvons la calculer par :

$$\begin{aligned} R_{YY}(k) &= h^*(-k) * R_{XY}(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(-i) R_{XY}(k - i) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(-i + 3) R_{XY}(k - i) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(-i + 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k-3-i|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \\ R_{YY}(k) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \end{aligned}$$

1.7. Le filtrage adapté : Un exemple d'application

Principe : filtrage de $z(t)$ par le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ qui maximise le « rapport signal à bruit » à l'instant T (fin du signal) :

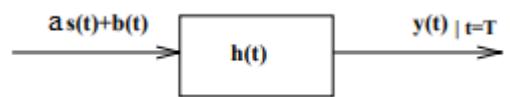


Figure 3.7 : Filtre adapté

Où ; $s(t)$: signal déterministe connu, de support $[0, T]$ et $b(t)$: bruit blanc

1.7.1. Contexte

En sonar ou en radar, on cherche à localiser une « cible » qui peut être le sol, un bâtiment, une interface (en sismique réflexion) ou un avion ennemi (pour les guerriers). Pour cela, on procède de la façon suivante : on émet un signal $s(t)$, qui parcourt la distance d jusqu'à la cible, sur laquelle il est réfléchi en direction d'un récepteur. Le récepteur est souvent couplé à l'émetteur, et reçoit alors le signal atténué, retardé et bruité :

$$Y(t, \omega) = as(t - t_0) + B(t, \omega). \quad (3.55)$$

L'atténuation a est supposée connue ; le bruit additif est en général supposé gaussien, pas nécessairement blanc, et il s'agit de déterminer le retard t_0 , correspondant au temps d'aller-retour, $t_0 = 2d/c$.

1.7.2. Maximisation du rapport signal-à-bruit

Considérons simplement pour le moment le modèle suivant :

$$Y(t, \omega) = x(t) + B(t, \omega). \quad (3.56)$$

L'approche habituelle consiste à rechercher à minimiser l'effet du bruit d'observation. On cherche alors à construire un filtre $h(t)$ tel que le rapport signal-à-bruit en sortie soit maximal, à un instant T , appelé instant de décision. Cet instant T devra être défini pour que l'observation ait été effectuée et que le filtre ait agi.

Notons $Z(t, \omega)$ la sortie du filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. On a alors :

$$Z(t, \omega) = (h * Y)(t, \omega) = (h * x)(t) + (h * B)(t, \omega). \quad (3.57)$$

On écrit ainsi la sortie comme la somme de la sortie non-bruitée et de la contribution du bruit. Le rapport signal-à-bruit vaut ainsi ;

$$\rho(t) = \frac{|(h * x)(t)|^2}{E\{|(h * B)(t, \omega)|^2\}} \quad (3.58)$$

Où; le numérateur représente la puissance instantanée de la sortie non bruitée et le dénominateur la puissance liée au bruit. On évalue ce rapport signal-à-bruit à l'instant de décision T.

$$\rho(T) = \frac{|(h * x)(T)|^2}{E\{|(h * B)(T, \omega)|^2\}} \quad (3.59)$$

En développant les produits de convolution, on obtient :

$$\rho(T) = \frac{|\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x((T-u)du)|^2}{E\{|\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)B(T-u, \omega)du|^2\}} \quad (3.60)$$

En ce qui concerne tout d'abord le dénominateur, il s'agit là de la puissance d'un signal aléatoire à la sortie d'un filtre, et l'on a donc :

$$E\{|(h * B)(T, \omega)|^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{BB}(f)df = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \quad (3.61)$$

où σ^2 est la puissance du bruit d'entrée. L'inégalité de Schwartz permet de majorer le numérateur :

$$|\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x((T-u)du)|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)|^2 du \int_{-\infty}^{+\infty} |x^*(T-u)|^2 du \quad (3.62)$$

avec égalité lorsque les vecteurs $h(u)$ et $x^*(T-u)$ sont colinéaires. L'égalité de Parseval - Plancherel, qui exprime la conservation du produit scalaire entraîne que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

On en déduit donc que le rapport signal-à-bruit est majoré selon

$$\rho(T) \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |x^*(T-u)|^2 du}{\sigma^2} = \frac{E_x}{\sigma^2} \quad (3.63)$$

où E_X est l'énergie du signal $x(t)$. L'égalité est atteinte lorsque $h(u)$ et $x^*(T - u)$ sont colinéaires, c'est-à-dire :

$$h(u) = kx^*(T - u) \quad (3.64)$$

où k est une constante arbitraire. Le filtre optimal maximisant le rapport signal-à-bruit en sortie, à l'instant T , est ainsi le filtre dont la réponse impulsionale est la copie retournée et décalée dans le temps du signal que l'on cherche à retrouver. En ce sens, le filtre est adapté au signal. La relation de filtrage de $Y(t, \omega)$ avec une « copie retournée » équivaut en fait à effectuer une inter-corrélation (au sens déterministe).

En effet,

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)y(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(T-u)y(t-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(T+v)y(t+v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(T-t+v)y(v)dv \end{aligned} \quad (3.65)$$

soit

$$z(t) = R_{yx}(T - t). \quad (3.66)$$

Le récepteur optimal consiste donc à calculer l'inter-corrélation entre le signal reçu $y(t)$ et le signal espéré $x(t)$. On parle alors souvent de récepteur à corrélation.

1.7.3. Application en Sonar-Radar

Dans le développement précédent, on a supposé connaître $x(t)$. Or, dans le contexte sonar-radar, le signal à détecter est $as(t - t_0)$, où a et t_0 sont inconnus. On utilisera le filtre adapté à $s(t)$, soit : $h(t) = ks^*(T - t)$.

Dans ce cas, la sortie du filtre est, en terme d'inter-corrélation, $R_{ys}(T - t)$. En reprenant $y(t) = as(t - t_0) + b(t)$, on obtient :

$$z(t) = R_{ys}(T - t) = aR_{ss}(T + t_0 - t) + R_{bs}(T - t). \quad (3.67)$$

L'effet du filtrage est alors de minimiser le terme de « bruit » $R_{bs}(T - t)$. Par ailleurs, on sait que l'autocorrélation est maximale en 0. Dans notre cas de figure, la sortie $z(t)$ sera

maximale pour $t = T + t_0$. À partir de ce maximum, on peut alors déduire la valeur du retard t_0 et la valeur du facteur d'échelle a . Le choix du signal s est important : on cherchera à ce qu'il présente un pic d'autocorrélation R_{ss} très prononcé, afin de localiser facilement le maximum et permettre éventuellement la détection simultanée de plusieurs échos.

1.7.4. Filtre de Wiener

Est un filtrage optimal qui permet d'extraire un signal noyé dans le bruit comme le montre la figure ci-dessous.

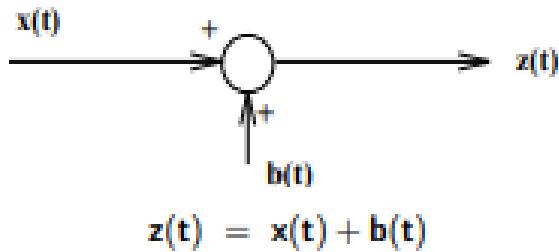


Figure 3.8 : Modélisation d'un signal noyé dans le bruit.

Où ;

$x(t)$: Signal inconnu ou aléatoire.

$z(t)$: Signal bruité.

$b(t)$: Bruit aléatoire.

$x(t)$ et $b(t)$ sont des processus aléatoires stationnaires, centrés, non corrélés.

- a) **Filtrage « optimal » du bruit** : le filtre de Wiener est le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ tel que :

$$\hat{x}(t) = z(t) * h(t) \quad (3.68)$$

Avec, $[(x(t) - \hat{x}(t))^2]$ est minimum.

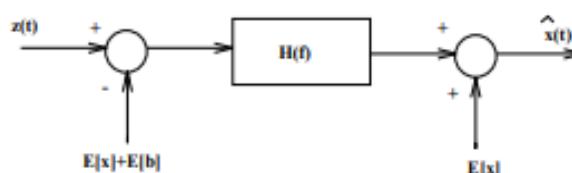


Figure 3.9 : Schéma de principe d'un filtre de Wiener.

La réponse en fréquence du filtre de Wiener est :

$$H(f) = \frac{S_X(f)}{S_X(f) + S_b(f)} = \frac{1}{1 + \frac{S_b(f)}{S_X(f)}} \quad (3.69)$$

b) Propriétés du filtre de Wiener :

- Il est non causal (\exists une version causale).
- Il permet de reconstituer $x(t)$ à partir de $z(t)$ en éliminant au mieux le bruit sans trop distordre le signal.
- Si les signaux ne sont pas centrés (de moyennes non nulles), il faut préalablement soustraire les moyennes $E[x]$ et $E[b]$. Si, $E[b] = 0$, $E[x]$ peut être estimée par moyennage du signal dégradé : $E[x] \cong E[z]$.
- Si le bruit est blanc $S_b(f) = \text{constante}$.
- Généralisation du filtre de Wiener aux signaux non stationnaires : filtre de Kalman.

c) Filtrage de Wiener d'un signal bruité tel que :

- Le signal $x(n)$ est inconnu : fonction porte.
- Bruit blanc gaussien discret de variance σ_b^2 .

Le modèle utilisé pour l'autocorrélation du signal est : $R_X(k) = \sigma_X^2 \rho^{|k|}$, $\rho = 0.99$.

L'expression du filtre de Wiener discret est :

$$H(z) = \frac{S_X(z)}{S_X(z) + S_b(z)} = \frac{\sigma_X^2(1 - \rho^2)}{\sigma_X^2(1 - \rho^2) + \sigma_b^2(1 - \rho z^{-1})(1 - \rho z)} \quad (3.70)$$

1.8. Estimation statistique et estimation spectrale

La description d'un signal aléatoire $X(t)$ passe par la détermination de ses caractéristiques statistiques (moments, D.S.P, etc.).

En pratique, on ne dispose souvent que d'une seule réalisation du signal, sur une durée d'observation finie. Lorsque le signal est stationnaire ergodique ses caractéristiques peuvent

alors être approchées par des moyennes temporelles sur des intervalles temporels finis : on parle d'« estimation ».

On pose donc ici le problème de l'estimation des caractéristiques statistiques d'un signal à partir de l'observation d'une réalisation du signal : sur une fenêtre de durée T (signal à temps continu) ; sur une suite de N échantillons (signal à temps discret).

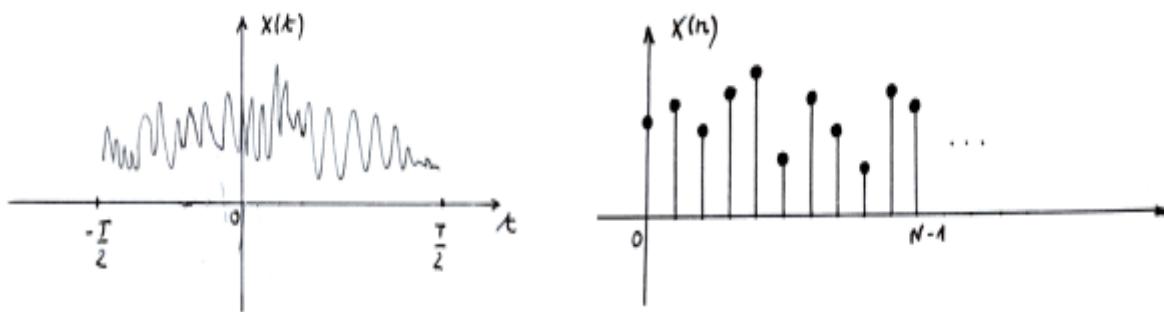


Figure 3.10 : Réalisations d'un signal aléatoire a) continu, b) discret.

1.8.1. Estimation paramétrique

L'estimation statistique paramétrique concerne la détermination des paramètres d'un modèle statistique particulier (par exemple le paramètre λ d'un processus de Poisson, la moyenne et la variance d'un processus gaussien, etc.).

a) Caractéristiques d'un estimateur

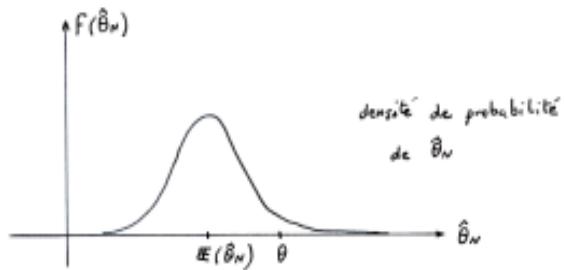


Figure 3.11 : densité de probabilité d'un estimateur.

On considère un estimateur $\hat{\theta}_N$ d'une grandeur θ caractérisant un signal aléatoire discret $X(n, \omega)$ (moment d'ordre n , fonction d'autocorrélation, paramètre d'une loi statistique, etc.). $\hat{\theta}_N$ est une variable aléatoire dépendant des échantillons de $X(n, \omega)$ sur $\{0, \dots, N - 1\}$.

L'estimateur $\hat{\theta}_N$ est dit non biaisé si :

$$E[\hat{\theta}_N] = \theta \quad (3.71)$$

Le biais de l'estimateur est défini par :

$$b[\hat{\theta}_N] = E[\hat{\theta}_N] - \theta \quad (3.72)$$

La variance de l'estimateur est définie par :

$$\sigma^2(\hat{\theta}_N) = E[(\hat{\theta}_N - E(\hat{\theta}_N))^2] \quad (3.73)$$

L'erreur quadratique moyenne (eqm) de l'estimateur est définie par :

$$eqm(\hat{\theta}_N) = E[(\hat{\theta}_N - \theta)^2] = \sigma^2(\hat{\theta}_N) \text{ si } b(\hat{\theta}_N) = 0 \quad (3.74)$$

Un bon estimateur doit présenter un biais et une variance les plus faibles possibles. Un estimateur $\hat{\theta}_N$ de θ est dit "efficace" si son biais est nul et si sa variance est plus faible que celle de tout autre estimateur de θ .

Un estimateur est dit « consistant » si sa variance et son biais tendent vers 0 lorsque le nombre d'échantillons N augmente. Cette propriété est fortement souhaitée.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} b(\hat{\theta}_N) = 0 \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma^2(\hat{\theta}_N) = 0 \quad (3.75)$$

Dans la pratique il est parfois difficile de concilier un biais nul avec une variance faible. On préférera alors un estimateur légèrement biaisé, mais de variance faible, à un estimateur non biaisé, mais présentant une variance importante.

b) Exemple : Estimation de la valeur moyenne statistique

On se pose le problème de l'estimation de la valeur moyenne statistique d'un signal aléatoire stationnaire ergodique $X(n, \omega)$. On considère le cas particulier d'un bruit blanc discret $X(n, \omega)$ de moyenne non nulle m_X et de variance σ_X^2 .

A estimer : $m_X = E[X(n, \omega)]$, en observant une seule réalisation de N échantillons de ce bruit : $\{X(0, \omega), X(1, \omega), \dots, X(N - 1, \omega)\}$.

On considère les deux estimées suivantes pour la moyenne statistique :

- estimée 1 : $\widehat{M}_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n, \omega)$ moyenne empirique
- estimée 2 : $\widehat{M}_2 = X(0, \omega)$ premier échantillon

Les estimateurs \widehat{M}_1 et \widehat{M}_2 dépendent tous deux de l'épreuve ω . Ce sont donc des variables aléatoires dont on souhaite connaître les caractéristiques statistiques (moyenne, variance, etc.).

Pour mesurer la qualité de cet estimateur, on utilise les notions de « biais » et de « variance ». L'estimateur devra posséder les propriétés suivantes :

- d) **Estimateur sans biais** : « en moyenne » l'estimateur \widehat{M}_i doit donner la vraie valeur du paramètre : $E[\widehat{M}_i] = m_X$
- e) **Le biais b** de l'estimateur \widehat{M}_i est : $b(\widehat{M}_i) = E[\widehat{M}_i] - m_X$
- f) **Variance faible** : la dispersion des valeurs de \widehat{M}_i autour de sa valeur moyenne doit rester faible, ce qui garantit en général d'avoir, suite à une mesure, une valeur proche de la bonne valeur : $\sigma^2[\widehat{M}_i] = E[(\widehat{M}_i - E[\widehat{M}_i])^2]$. Cette valeur doit être faible.

Les 2 estimateurs sont non biaisés (biais=0) car on a : $E[\widehat{M}_1] = m_X$; $E[\widehat{M}_2] = m_X$

L'estimateur \widehat{M}_1 est meilleur et sa variance tend vers 0 quand on augmente le nombre N d'échantillons : $\sigma^2[\widehat{M}_1] = \frac{\sigma_X^2}{N}$; $\sigma^2[\widehat{M}_2] = \sigma_X^2$

1.8.2. Estimation non paramétrique

L'estimation des caractéristiques statistiques générales (moment d'ordre n, D.S.P) est dite non paramétrique. Le problème de l'estimation spectrale (ou analyse spectrale) est d'estimer la D.S.P. $S_X(f)$ d'un signal aléatoire $X(t)$ à partir d'une réalisation de ce signal sur une fenêtre d'observation finie.

Deux familles d'approches sont actuellement employées :

- Les approches dites « classiques » qui reposent sur la T.F. du signal ou sur la T.F. de sa fonction d'autocorrélation.
- Les approches « modernes » s'appuyant sur une modélisation paramétrique de la D.S.P. :

Modèles autorégressifs, ARMA, méthode de Prony, de Capon, de Pisarenko, etc.

L'estimation du spectre de puissance (**Estimation spectrale des signaux aléatoires**) par les méthodes basées sur un modèle non paramétrique à partir d'un nombre fini de données N peut se faire avec :

1.8.2.1. Le périodogramme

C'est un estimateur de la D.S.P. qui consiste à calculer le module au carré de la T.F. de $X_T(t)$

(considéré comme un signal déterministe) (Schuster 1898) et il est exprimé par :

- Cas continu :

$$\hat{S}_T(f) = \frac{1}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} X(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2 \quad f \text{ en Hz, } \hat{S}_T \text{ en W.Hz}^{-1} \quad (3.76)$$

- Cas discret :

$$\hat{S}_N(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j2\pi kf} \right|^2 \quad (3.77)$$

f en cycles/échantillon, \hat{S}_N en W (cycles/échantillon) $^{-1}$. $\hat{S}_N(f)$ est périodique de période 1.

a) Exemple : Dans le cas d'un signal discret obtenu par échantillonnage d'un signal analogique à la fréquence $f_e = 1/T_e$ (figure 3.12), la formule précédente devient :

$$\hat{S}_N(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X(kT_e) e^{-j2\pi f kT_e} \right|^2 \quad (3.78)$$

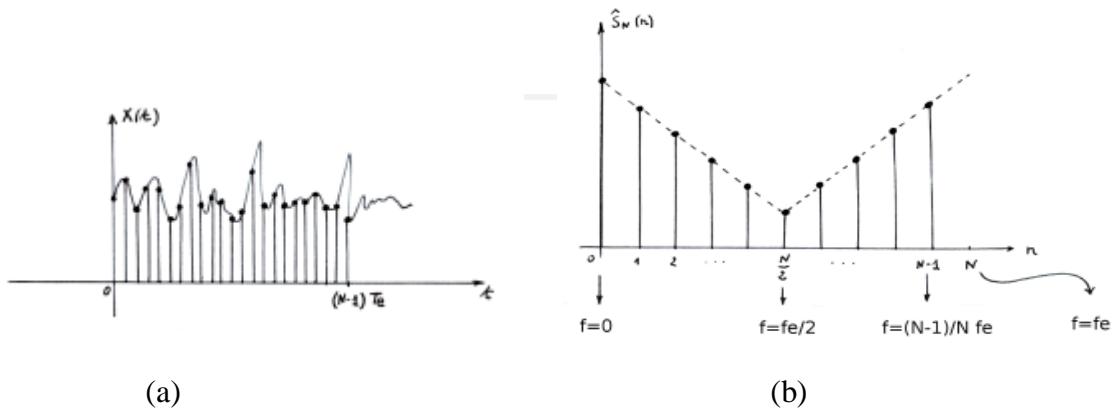


Figure 3.12 : (a) signal discret obtenu par échantillonnage d'un signal analogique.

(b) Sa densité spectrale estimée par périodogramme.

Pour le calcul numérique sur ordinateur, f étant une variable continue doit être discrétisée. On calcule la T.F.D. qui consiste à échantillonner $\hat{S}_N(f)$ sur une période par :

$$f = \frac{n}{N} f_e \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$\hat{S}_N(n) = \hat{S}_N\left(\frac{n}{N} f_e\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} X(kT_e) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \right|^2$$

(3.79)

Le calcul se fait par la Transformée de Fourier Rapide (FFT).

Abscisse : échelle des fréquences dans le cas d'une utilisation de la FFT : pour l'échantillon n , on a la fréquence : $f = \frac{n}{N} f_e$.

b) Propriétés du périodogramme

- Le périodogramme est un estimateur biaisé de la d.s.p. mais il est asymptotiquement non biaisé :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} b(\hat{S}_T(f)) = 0 \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} b(\hat{S}_N(f)) = 0$$

- Par contre sa variance ne diminue pas lorsque T (ou N) $\rightarrow +\infty$ (estimateur non consistant).

On montre que sa variance ne dépend pratiquement pas de T ou N :

$$\sigma^2(\hat{S}_T(f)) \propto |S_X(f)|^2 \quad \sigma^2(\hat{S}_N(f)) \propto |S_X(f)|^2$$

La variance est constante (en fonction de T (ou N)) et est maximale pour les pics du spectre de X . Le périodogramme est donc un mauvais estimateur spectral.

1.8.2.2. Le corrélogramme

C'est un estimateur de la D.S.P. qui consiste à calculer la T.F. d'une estimée de la fonction d'autocorrélation de $X(t)$.

- Cas continu :

$$\hat{S}_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_T(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$\hat{R}_T(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-\left(\frac{T}{2}-\frac{|\tau|}{2}\right)}^{\frac{T}{2}-\frac{|\tau|}{2}} X\left(t+\frac{\tau}{2}\right) X\left(\frac{t}{2}-\frac{\tau}{2}\right) dt & |\tau| \leq T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$

(3.80)

- Cas discret :

$$\hat{S}_N(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{R}_N(k) e^{-j2\pi kf}$$

Avec ;

$$\hat{R}_N(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|k|-1} X(n)X(n+k) & |k| \leq N-1 \\ 0 & |k| > N-1 \end{cases} \quad (3.81)$$

- Relation avec le périodogramme :

Si $X(t)$ est réel, le corrélogramme et le périodogramme coïncident. Les propriétés du corrélogramme sont donc les mêmes que celles du périodogramme (sont mauvaises). Pour améliorer ces propriétés on a recours à des versions « lissées » ou « moyennées » de ces estimateurs.

3.9. Bruit blanc

Un processus aléatoire (t) , faiblement stationnaire, est appelé bruit blanc s'il possède des valeurs dé-correlées, soit :

$$R_{XX}(\tau) = \sigma_X^2 \delta(\tau) \quad (3.82)$$

Où $R_{XX}(\tau)$ est la fonction de covariance de X et σ_X^2 , sa variance. Ceci dit, la DSP d'un bruit blanc est donnée par :

$$S_{XX}(f) = \sigma_X^2 \quad (3.83)$$

Alors, un bruit blanc est tout processus aléatoire stationnaire au sens large dont la DSP est uniformément distribuée sur $f =]-\infty, +\infty[$. S'il n'est pas à bande limitée sa puissance est infinie.

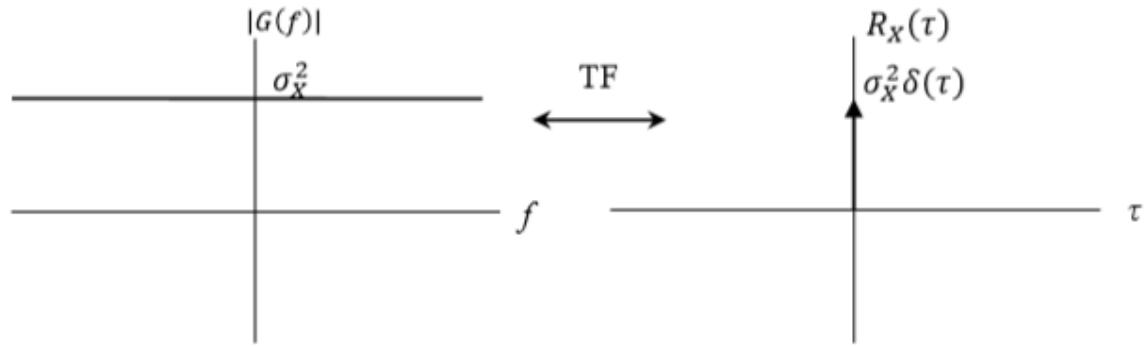


Figure 3.14 : Densité spectrale et fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc.

Où $R_{XX}(\tau) = 0$ pour $\tau \neq 0$ qui veut dire que deux échantillons pris à t et $t + \varepsilon$ sont indépendants. Le processus est dit sans mémoire.

3.9.1. Bruit blanc à bande limitée

Un signal aléatoire est considéré comme étant un bruit blanc à bande limitée s'il satisfait la condition suivante :

$$S_{XX}(f) = \sigma_X^2 \text{ pour } f \in [-b, +b] \quad (3.84)$$

La fonction d'autocorrélation est telle que :

$$R_{XX}(\tau) = 2\sigma_X^2 b \text{sinc}(\tau) \text{ pour } f \in [-b, +b] \quad (3.85)$$

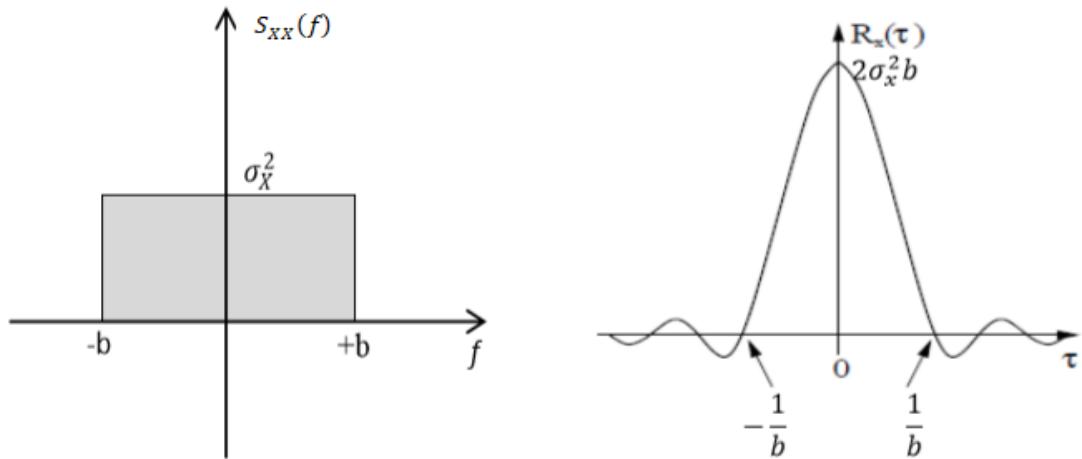


Figure 3.15 : Densité spectrale et fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc à bande limitée.

3.9.2. Quelques correspondances entre Corrélation-DSP

Processus $X(t)$	Corrélation $R_X(\tau)$	DSP $S_{XX}(f)$
$a \cdot X(t)$	$ a ^2 \cdot R_X(\tau)$	$ a ^2 \cdot S_{XX}(f)$
$\dot{X}(t) = \frac{dX(t)}{dt}$	$\frac{-d^2 R_X(\tau)}{d\tau^2}$	$(2\pi f)^2 \cdot S_{XX}(f)$
$X^{(n)}(t) = \frac{d^n X(t)}{dt^n}$	$\frac{(-1)^n d^{2n} R_X(\tau)}{d\tau^{2n}}$	$(2\pi f)^{2n} \cdot S_{XX}(f)$
$X(t) \cdot e^{\pm 2\pi j f_0 t}$	$R_X(\tau) \cdot e^{\pm 2\pi j f_0 \tau}$	$S_{XX}(f \pm f_0)$

3.10. Modèles de représentation des processus stochastiques

Pour pouvoir traiter, estimer et prédire un processus stochastique nous devons d'abord le modéliser. Pour y parvenir, nous devons exploiter le principe d'innovation ou la représentation de Wold.

3.10.1. Représentation de Wold

Considérons un filtre linéaire causal de transmittance

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n}$$

Si on excite l'entrée de ce filtre par un bruit blanc $W(n)$ de puissance σ^2 , la sortie sera un processus stationnaire $X(n)$ dont la DSP est : $S_{XX}(f) = \sigma^2 \cdot |H(f)|^2$. On dit que la séquence $W(n)$ constitue la séquence des innovations de $X(n)$ et $H(z)$ la réponse impulsionnelle du filtre d'innovation. De même, si $X(n)$ est un signal stationnaire traversant un filtre de transmittance $\frac{1}{H(z)}$, nous obtenons en sortie un bruit blanc. Alors, $L(z)$ est le filtre de blanchiment tandis que $w(n)$ est appelé processus d'innovation associé à $X(n)$.

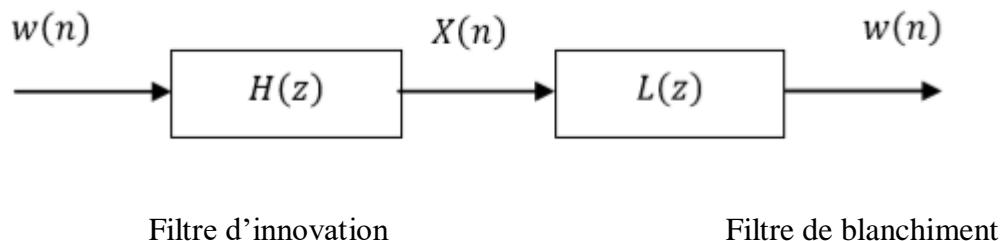


Figure 3.16 : Représentation de Wold

3.10.2. Modèles stochastiques (AR, MA, ARMA)

Dans cette représentation on considère un filtre linéaire causal ayant une fonction de transfert décrite par :

$$H(z) = \frac{B(z)}{1 + A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}$$

(3.86)

Alors, le signal de sortie est donné par :

$$X(n) + \sum_{k=1}^p a_k X(n-k) = \sum_{k=0}^q b_k w(n-k)$$

(3.87)

a) Processus Autorégressif (AR)

Un processus autorégressif est caractérisé par $B(z) = 1$, et donc par l'équation aux différences suivante :

$$X(n) + \sum_{k=1}^p a_k X(n-k) = w(n)$$

(3.88)

On peut également représenter ce processus par le schéma de la figure 3.17 suivante :

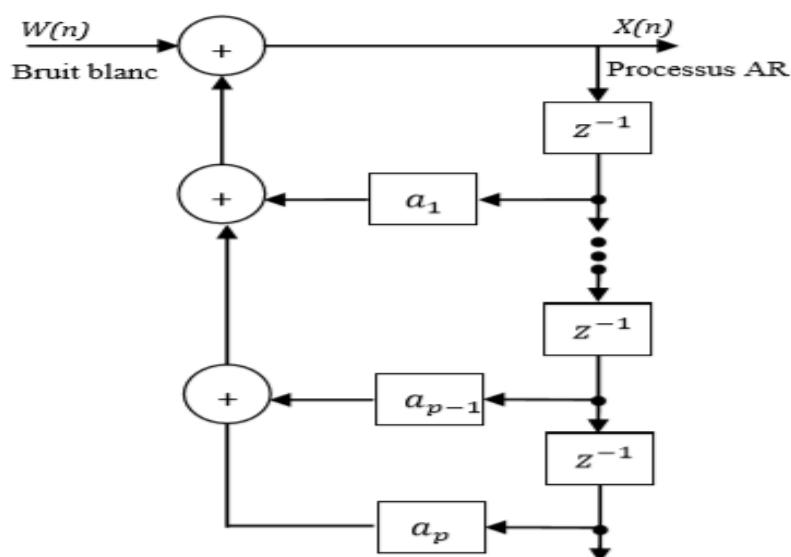


Figure 3.17 : Filtre générateur d'un processus AR.

b) Processus à moyenne mobile (MA : Moving Average)

C'est un processus autorégressif qui est caractérisé par $(z) = 1$, ce qui s'exprime par :

$$X(n) = \sum_{k=0}^q b_k w(n-k) \quad (3.89)$$

Ce processus est décrit par la figure 3.18 ci-dessous :

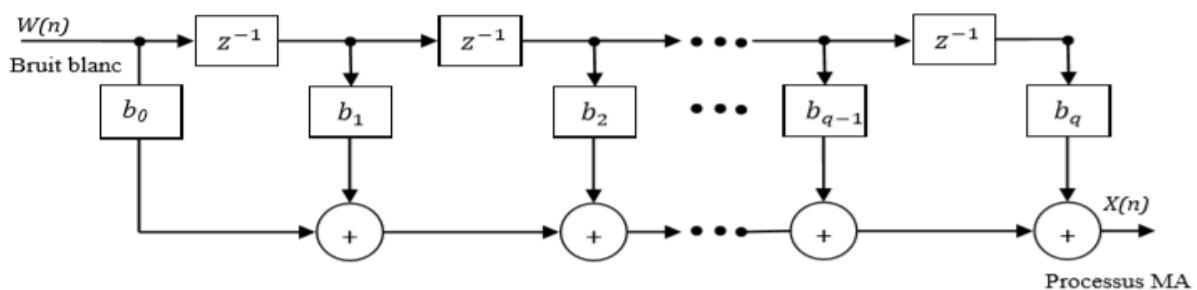


Figure 3.18 : Filtre générateur du processus MA

Remarque : le processus autorégressif à moyenne mobile ARMA , n'est que le processus général décrit au début.

3.11. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les signaux aléatoires (variables aléatoires qui évoluent au cours du temps) d'une manière statistique et temporelle. La stationnarité et les propriétés statistiques (moyenne, autocorrélation, variance, etc.) de tels signaux sont formulées par des expressions mathématiques. Ensuite, on s'est intéressé à la représentation de ces signaux dans le domine fréquentiel. Des grandeurs et opérations fondamentales (densité spectrale de puissance, échantillonnage, filtrage, estimation statistique et spectrale,..) concernant les processus stochastiques, ont été abordées. En particulier, les propriétés des signaux stationnaires au sens large (obtenus par des filtres générateurs excités par un bruit blanc) sont étudiées. Aussi, des méthodes d'estimation statistique et spectrale du spectre de puissance des signaux aléatoires sont exposées.

Enfin, une famille de modèles autorégressifs a été présentée pour permettre de calculer et de représenter les filtres générateurs.

