

CHAPITRE 2

NOTIONS DE VARIABLE ALEATOIRES

2.1. Notions physique des phénomènes aléatoires

Dans beaucoup d'expériences pratiques, les phénomènes observés dans des conditions apparemment identiques présentent des variations imprévisibles. Ces phénomènes sont dits **aléatoires**.

On peut citer comme exemples :

- Le bruit de fond d'un récepteur radiophonique.
- Le signal sonore d'un compteur de particules.
- Pour un système de communication, non seulement le bruit de fond mais aussi le message émis par la source, présente un caractère **aléatoire** pour le destinataire.
- Le signal de parole ne peut être décrit par une expression analytique exacte (même en absence de bruit).

Les phénomènes sont **aléatoires** ne peuvent pas être décrits avec des formules mathématiques. Donc, pour étudier leur évolution, on a recours à des modèles probabilistes. Le signal observé est représenté par une famille de **variables aléatoires indexées par le temps**. Chaque variable décrit l'aspect incertain du phénomène à un instant donné.

2.2. Rappels sur les probabilités et statistiques

Définition 1 : soit (Ω, \mathcal{F}, p) un espace de probabilité. Une **variable aléatoire (v.a)** X est une application mesurable de Ω sur \mathcal{R} (voir figure 2.1).

\mathcal{F} : l'ensemble de tous les événements c-à-d $\Omega \in \mathcal{F}$. Ω : est une collection d'événements.

$B(\mathcal{R})$: σ -algèbre sur \mathcal{R} engendrée par les intervalles de \mathcal{R} .

$X(\omega) \in B(\mathcal{R})$, $X^{-1}(A) \in \Omega$

(Ω, \mathcal{F}) : espace de probabilité (espace des événements, de mesure).

$(\mathcal{R}, B(\mathcal{R}))$: espace probabilisable (P_X : probabilité induite par la v.a X).

Une variable aléatoire est un nombre $X(\xi)$ attribué à chaque résultat ξ d'une expérience. Ce nombre peut être le gain dans un jeu de hasard, la tension d'une source aléatoire, le coût d'une

composante aléatoire, ou autre grandeur numérique qui présente un intérêt pour la réalisation de l'expérience.

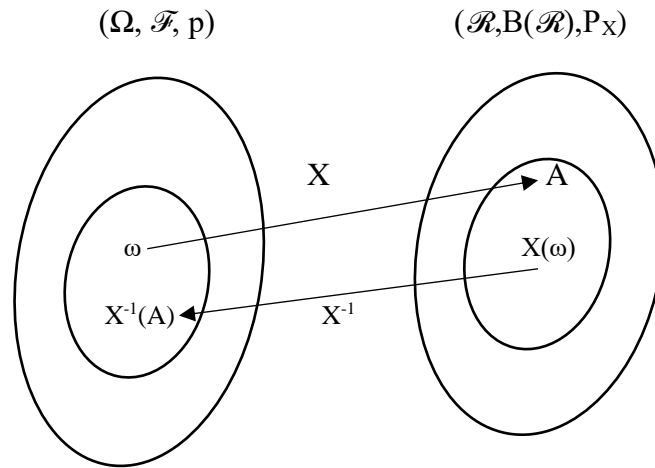


Figure 2.1 : Application mesurable de Ω sur \mathcal{R}

Exemple 2.1

- (a) Dans l'expérience de lancement d'un dé, nous attribuons aux six résultats f_i les nombres $X(f_i) = 10 i$. Donc, on aura :

f_i	1	2	3	4	5	6
$X(f_i)$	10	20	30	40	50	60

- (b) Dans la même expérience, nous pouvons attribuer le numéro 1 à chaque résultat pair et le numéro 0 à chaque résultat impair. Ce qui nous donne :

f_i	1	2	3	4	5	6
$X(f_i)$	0	1	0	1	0	1

Définition 2 : une variable aléatoire X est dite **discrète** si $X(\Omega)$ est fini et dénombrable. Dans le cas où $X(\Omega)$ est infini et non dénombrable, la variable aléatoire X est dite **continue**.

2.2.1. Densité de probabilité

a) Définition : soit une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{F}, p) , on appelle densité de X , la fonction $f_X(x)$ telle que :

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= P(X = x), \quad f_X(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
f_X(x) &= P(X = x) = p(\omega \in \Omega: X(\omega) = x) \\
f_X(x) &= P(X^{-1}(x)) = P_X(x)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Exemple 2.2 : on lance une pièce de monnaie.

$\Omega = \{pile, face\}$, $\Omega = \sigma$ -algèbre sur \mathcal{F} . Avec

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possible}}$$

, on aura :

$$p(pile) = p(face) = \frac{1}{2}$$

On définit la v.a X tel que :

$$\begin{cases} X(pile) = 0 \\ X(face) = 1 \end{cases}$$

La densité de probabilité est : $f_X(x) = P(X = x)$ ce qui nous permet de calculer :

$$f_X(0) = P(X = 0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f_X(1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

En regroupant ces deux cas en une seule formule on obtient :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0,1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{2.2}$$

Exemple 2.3. : On lance un Dé bien équilibré à six faces et on définit la variable aléatoire Y comme suit :

$$Y = \{face n^0i\}$$

$$\Omega = \{face1, face2, face3, face4, face5, face6\}$$

v.a : $\Omega \xrightarrow{Y} \mathbb{R}$, les valeurs possibles de $Y = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $p(Y = face n^0i) = \frac{1}{6}$

La densité de probabilité de Y est :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} & y = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{2.3}$$

b) Propriétés de la densité de probabilité

La densité de probabilité $f_X(x)$ d'une v.a X doit vérifier les propriétés suivantes :

1. $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\{x \in \mathbb{R}, f_X(x) > 0\} = \text{fini ou dénombrable}$
3. $\sum_x f_X(x) = 1$

2.2.2. Fonction de répartition

a) Définition : soit X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{F}, p) , la fonction de répartition est définie par :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x), \quad F_X(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ F_X(x) &= P_X([-\infty, x]) = p(U(x=t), t \leq x) \\ &= \sum_{t \leq x} f_X(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La fonction de répartition de l'exemple 2.1 se calcule comme suit :

Pour la pièce de monnaie, la densité de probabilité est $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0,1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ ce qui mène à :

$$\begin{aligned} F_X(0) &= p(X < 0) = 0 \quad \text{si } x < 0 \\ F_X(x) &= p(X \leq x) = p(X = 0) = \frac{1}{2} \quad \text{si } 0 \leq x < 1 \\ F_X(x) &= p(X \leq x) = p(X = 0) + p(X = 1) = 1 \quad \text{si } x \geq 1 \end{aligned}$$

On regroupe ces trois expressions en une seule :

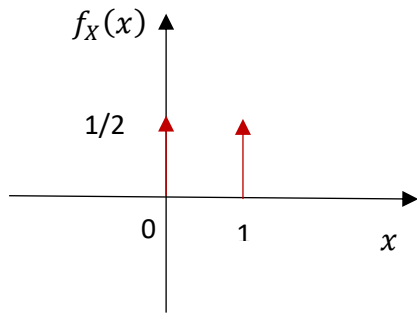
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

On peut représenter graphiquement $f_X(x)$ et $F_X(x)$ de cet exemple comme le montre la figure 2.2.

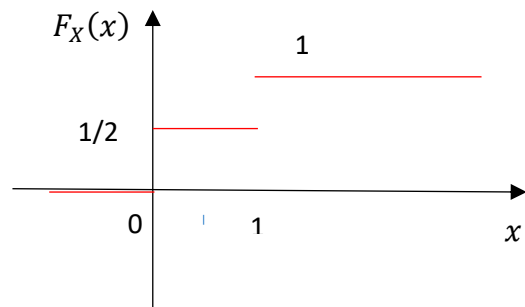
b) Propriétés de la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{F}, p) et $F_X(x)$ sa fonction de répartition alors :

1. $F_X(x)$ est une fonction croissante.
2. $F_X(x)$ est continue à droite.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
4. $P\{X > x\} = 1 - F_X(x)$



(a)



(b)

Figure 2.2 : (a) densité de probabilité

(b) fonction de répartition.

Exemple 2.4 : Soit G une fonction telle que :
$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 1 \leq y < 3 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 3 \leq y < 5 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 5 \leq y < 8 \\ 1 & \text{si } y \geq 8 \end{cases}$$

- 1) Montrer que $G(y)$ est une fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire Y .
- 2) Trouver la densité de probabilité $f_Y(y)$ de Y .

Solution

- 1) $G(y)$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition : elle est croissante, continue à droite et ses limites inférieure et supérieure sont égales respectivement à 0 et 1, donc :

$\exists Y$ telle que $F_Y(y) = G(y)$

- 2) Calcul de $f_Y(y)$

$$\begin{aligned} f_Y(1) &= F_Y(1) - F_Y(1^-) = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8} \\ f_Y(3) &= F_Y(3) - F_Y(3^-) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \\ f_Y(5) &= F_Y(5) - F_Y(5^-) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ f_Y(8) &= F_Y(8) - F_Y(8^-) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

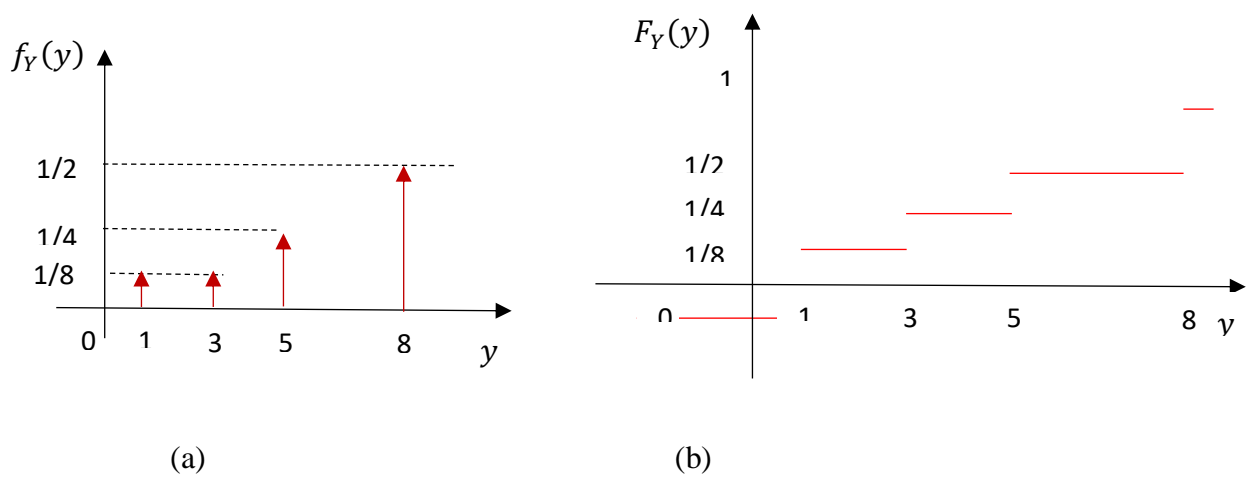


Figure 2.3 : (a) densité de probabilité

(b) fonction de répartition

$f_Y(y)$ est définie pour les points de discontinuité.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & y = 1,3 \\ \frac{1}{4} & y = 5 \\ \frac{1}{2} & y = 8 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2. 3. Loïs de probabilité usuelles

Dans les sections précédentes, nous avons défini des variables aléatoires à partir d'expériences connues. Dans cette section, nous considérerons souvent des variables aléatoires ayant des fonctions de répartition ou de densité spécifiques sans aucune référence à un espace de probabilité particulier.

2.3.1. Théorème de l'existence

Pour ce faire, il faut montrer que, étant donné une fonction $f_X(x)$ ou son intégrale

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad (2.6)$$

On peut construire une expérience et une variable aléatoire X ayant une fonctions de répartition $F_X(x)$ ou de densité de probabilité $f_X(x)$. Il existe deux types de variables aléatoires :

2. 3.2. Variables aléatoires discrètes

La plus simple parmi l'ensemble discret de variables aléatoires est la variable aléatoire de Bernoulli qui correspond à n'importe quelle expérience avec seulement deux résultats possibles : échec ou succès (pile ou face) comme dans les exemples 2.3.1 (lancer d'une pièce de monnaie).

a) Loi de Bernoulli.

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli si elle prend deux valeurs 1 et 0 avec (Fig. 2.2) les probabilités suivantes :

$$P\{X = 1\} = p \quad P\{X = 0\} = q = 1 - p \quad (2.7)$$

Dans un essai indépendant de n expériences de Bernoulli, p représentant la probabilité de réussite de chaque expérience, alors que q est celle d'échec.

b) Loi binomiale

X est dite variable aléatoire binomiale avec les paramètres n et p si elle prend les valeurs 0, 1, 2, ..., n avec :

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} ; \text{ tel que : } p + q = 1 \text{ et } k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

La fonction de répartition correspondante est une fonction en escalier comme illustré sur la Fig. 2.4. Une autre distribution étroitement liée à la distribution binomiale est la distribution de Poisson, qui représente le nombre d'occurrences d'un événement rare dans un grand nombre d'essais. Des exemples typiques incluent le nombre d'appels téléphoniques échangés sur une durée fixe, le nombre de billets gagnés parmi ceux achetés dans une grande loterie, le nombre d'erreurs d'impression dans un livre, etc.

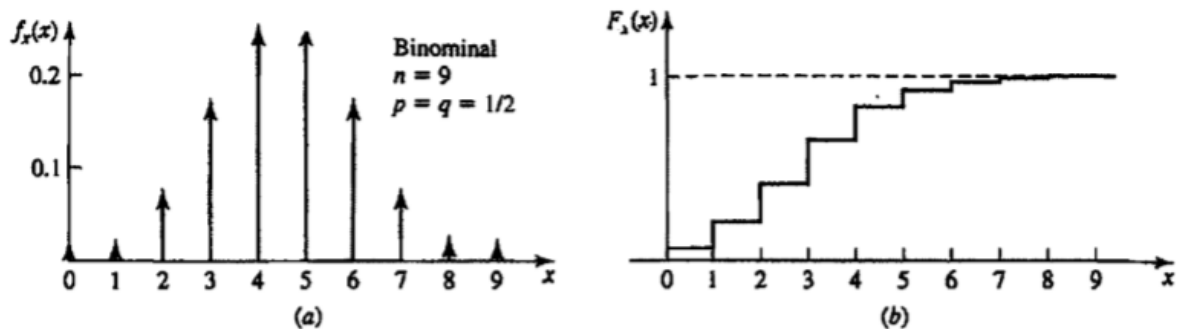


Figure 2.4 : Densité de probabilité (a) et fonction de répartition (b) d'une loi binomiale.

c) Loi de poisson

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ , si elle prend les valeurs $0, 1, 2, \dots, \infty$, avec une densité de probabilité donnée par :

$$P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (2.9)$$

Avec $p_k = P\{X = k\}$, il s'ensuit que (voir fig4.21)

$$\frac{p_{k-1}}{p_k} = \frac{\frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!}}{\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}} = \frac{k}{\lambda}$$

- Si $k < \lambda$ alors $P\{X = k - 1\} < P\{X = k\}$,
- Si $k > \lambda$, alors $P\{X = k - 1\} > P\{X = k\}$
- Si $k = \lambda$, on aura $P\{X = k - 1\} = P\{X = k\}$.

De là, nous concluons que $P(X = k)$ augmente avec k de 0 jusqu'à $k \leq \lambda$ et diminue au-delà de λ . Si λ est un entier $P(X = k)$ a deux valeurs maximales à $k = \lambda - 1$ et $k = \lambda$. La fonction de répartition correspondante est également une fonction en marche d'escalier similaire à celle de la figure 2.4b mais contenant un nombre infini de marches. En résumé, si le rapport $\frac{p_{k-1}}{p_k}$ est inférieur à 1, c'est-à-dire que, si $k < \lambda$, alors à mesure que k augmente ce dernier augmente pour atteindre son maximum pour $k = \lambda$. Donc :

- Si $\lambda < 1$, alors p_k est maximum pour $k = 0$.
- Si $\lambda > 1$ mais non pas un entier, p_k augmente avec k , atteignant son maximum pour $k = \lambda$;
- Si $k = \lambda$ est un entier, alors p_k est maximum pour $k = \lambda - 1$ et $k = \lambda$:

La Figure 2.5 montre une densité de probabilité d'une loi de Poisson pour $\lambda = 3$.

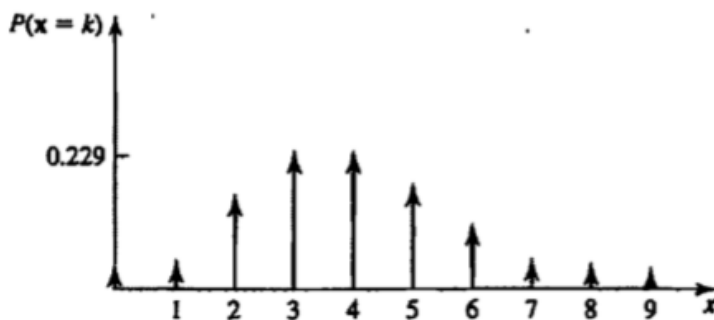


Figure 2.5 : densité de probabilité d'une loi de Poisson pour $\lambda = 3$.

Exemple 2.5 : Dans l'expérience des points de Poisson, un résultat s est un ensemble de points t_i ; sur l'axe des temps.

- a) Étant donné une constante t_0 , nous définissons la variable aléatoire ζ telle que sa valeur $n(\zeta)$ soit égale au nombre de points t_i ; dans l'intervalle $(0, t_0)$. Clairement, $n = k$ signifie que le nombre de points dans l'intervalle $(0, t_0)$ est égal à k .

$$P\{n = k\} = e^{-\lambda t_0} \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} \quad (2.10)$$

Ainsi, le nombre de points de Poisson dans un intervalle de longueur t_0 est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $a = \lambda t_0$, où λ est la densité des points.

- b) On note t_1 le premier point aléatoire à droite du point fixe t_0 et on définit la variable aléatoire X comme la distance de t_0 à t_1 (Fig. 2.6a). De la définition, il résulte que :
- $n(\zeta) \geq 0$ pour tout ζ . Par conséquent, la fonction de répartition de X est 0 pour $x < 0$ et pour $x \geq 0$ elle est donnée par $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Preuve :

Comme nous le savons, $F_X(x)$ est égale à la probabilité que $X \leq x$, où x est un nombre spécifique. Mais $X \leq x$ signifie qu'il y a au moins un point entre t_0 et $t_0 + x$. Donc $1 - F_X(x)$ est égale à la probabilité p_0 qu'il n'y ait pas de points dans l'intervalle $(t_0, t_0 + x)$. Et puisque la longueur de cet intervalle est égale à x , (2.10) donne $p_0 = e^{-\lambda x} = 1 - F_X(x)$

et la densité de probabilité correspondante est :

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} U(x) \quad (2.11)$$

est une exponentielle (figure 2.6).

d) Loi uniforme discrète.

La variable aléatoire X est dite discrète uniforme si :

$$P\{X = k\} = \frac{1}{N} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

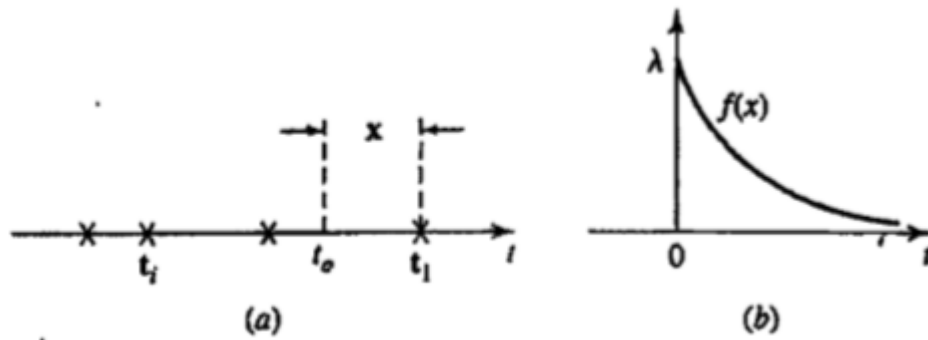


Figure 2.6 : Expérience des points de Poisson

2. 3.3. Variables aléatoires continues

Une variable aléatoire X est continue si $X(\Omega)$ est un intervalle dans \mathbb{R} (union de plusieurs intervalles). Une variable aléatoire X est continue, s'il existe une fonction $f_X(x)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ telle que :

$$\forall I \subset \mathbb{R} \quad P(X \in I) = \int_I f_X(x) dx \quad (2.13)$$

Où I est un intervalle dans \mathbb{R} . La fonction $f_X(x)$, est appelée densité de probabilité de X , ayant les propriétés suivantes :

$$f_X(x) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$$

Parmi les lois de probabilités continues on peut citer :

a) La loi de probabilité uniforme

Une variable aléatoire X est dite uniforme dans l'intervalle $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, si :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.14)$$

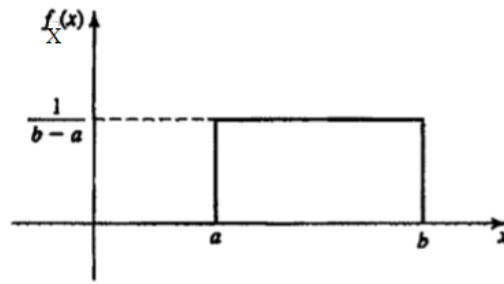


Figure 2.7 : Densité de probabilité d'une loi uniforme continue sur l'intervalle $[a, b]$

On écrira $X \sim U(a, b)$. La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & x \geq b \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & x < a \end{cases} \quad (2.15)$$

b) La loi de probabilité normale

La distribution normale (gaussienne) est l'une des distributions les plus couramment utilisées.

On dit que X est une variable aléatoire normale ou gaussienne de paramètres μ et σ^2 ($\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$), si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (2.16)$$

Il s'agit d'une courbe en forme de cloche (voir Fig.2.8), symétrique par rapport au paramètre μ et sa fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(v) dv = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(v-\mu)^2/2\sigma^2} dv \triangleq G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (2.17)$$

où la fonction

$$G(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv \quad (2.18)$$

est souvent disponible sous forme de table. Puisque $f_X(x)$ dépend de deux paramètres μ et σ^2 , la notation $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ sera utilisée pour représenter la loi Gaussienne de (2.16).

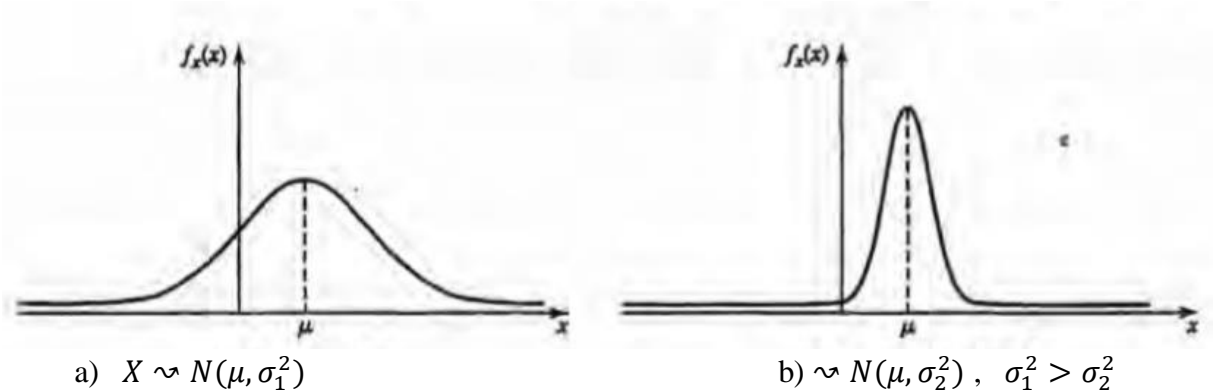


Figure 2.8 : densité de probabilité de la loi normale (loi Gaussienne).

La constante $\sqrt{2\pi\sigma^2}$ de (2.16) est la constante de normalisation qui maintient l'aire sous $f_X(x)$ à l'unité.

Exercice : Vérifier que cette loi est une densité de probabilité.

Pour répondre à cette question il faut vérifier $f_X(x) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$, ce qui nous mène à calculer :

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

On pose $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow dz = \frac{dx}{\sigma}$

Il s'ensuit que :

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-z^2/2\sigma^2} \cdot \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2\sigma^2} dz$$

Comme cette intégrale n'existe pas on passe aux coordonnées polaires pour la calculer. Nous allons utiliser la transformation $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, de sorte que $dx dy = r dr d\theta$ et donc :

$$\begin{aligned} Q^2 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \times 2\pi\sigma^2 \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1 \quad (2.19)$$

c) La loi de probabilité normale centrée

Le cas particulier $X \sim N(0,1)$ est désigné comme « variable aléatoire normale centrée ».

Sa densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (2.20)$$

La courbe représentative de cette fonction est symétrique par rapport à l'origine (figure 2.9).

La fonction de répartition est exprimée par :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \end{aligned} \quad (2.21)$$

Cette intégrale est donnée par une table (voir annexe).

Pour calculer les probabilités d'une loi gaussienne quelconque il faut utiliser la table de la loi centrée réduite. Le passage vers cette dernière se fait en utilisant le théorème suivant :

Théorème : Soit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

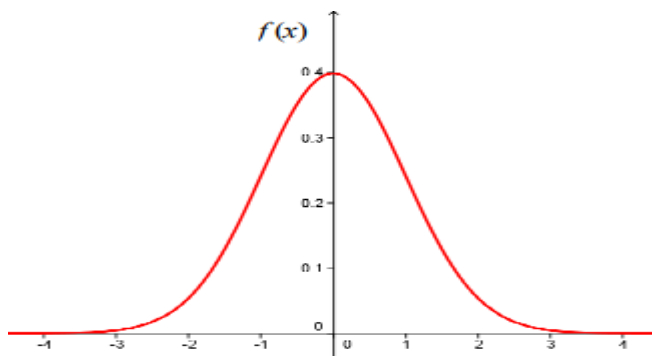


Figure 2.9 : Représentation graphique d'une loi normale centrée réduite

Exemple 2.6 Soit $X \sim N(2,9)$

- 1) Calculer $P(X > 0)$. 2) Calculer $P(-1 < X < 3)$.

Solution

1) $P(X > 0) = P\left(\frac{X-2}{3} > \frac{-2}{3}\right)$

On a la propriété suivante :

$$F_X(x) = 1 - F_X(-x)$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X-2}{3} > \frac{-2}{3}\right) &= 1 - P\left(\frac{X-2}{3} \leq \frac{-2}{3}\right) \\ &= 1 - F_Y\left(-\frac{2}{3}\right) = F_Y\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= 0.7454 \end{aligned}$$

Cette valeur est donnée par la table de la loi centrée réduite (voir annexe).

$$\begin{aligned} 2) P(-1 < X < 3) &= P\left(\frac{-1-2}{3} < \frac{X-2}{3} < \frac{3-2}{3}\right) \\ &= P\left(-1 < \frac{X-2}{3} < \frac{1}{3}\right) \\ &= P\left(\frac{X-2}{3} < \frac{1}{3}\right) - P\left(\frac{X-2}{3} < -1\right) \\ &= F_Y\left(\frac{1}{3}\right) - F_Y(-1) = F_Y\left(\frac{1}{3}\right) - 1 + F_Y(1) \\ &F_Y\left(\frac{1}{3}\right) \text{ et } F_Y(1) \text{ se calculent à partir de la table.} \end{aligned}$$

$$P(-1 < X < 3) = 0.4706$$

d) Loi de probabilité exponentielle (distribution exponentielle)

On dit que **X** suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est donnée par (voir Fig.2.10) :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.22)$$

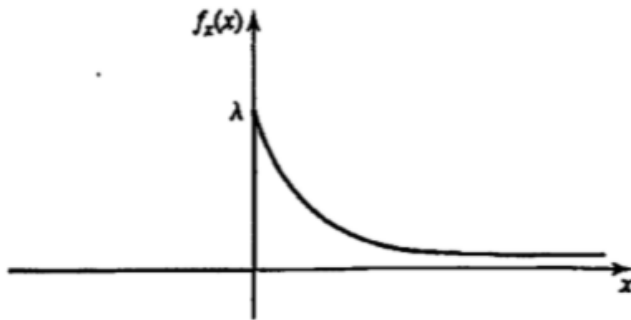


Figure 2.10 : Densité de probabilité d'une loi exponentielle.

La fonction de répartition de cette loi est exprimée par :

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \\
 &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du \\
 &= -e^{-\lambda u} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \\
 F_X(x) &= 1 - e^{-\lambda x}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Exemple 2.7 : Supposons que la durée de vie d'un appareil ait une distribution exponentielle avec $\lambda = 10$ ans. Un appareil usagé est acheté par quelqu'un. Quelle est la probabilité qu'il n'échoue pas dans les 5 prochaines années ?

Solution

En raison de la propriété « sans mémoire » de la loi exponentielle (le passé n'a pas d'importance), cela n'a pas d'importance si l'appareil a été en service pendant de nombreuses années avant son achat. Par conséquent, si X est la variable aléatoire représentant la durée de vie de l'appareil et sa durée de vie réelle jusqu'à l'instant présent, alors :

$$P\{X > t_0 + 5 | X > t_0\} = P\{X > 5\} = e^{-5/10} = e^{-0.5} = 0.368$$

Exemple 2.8 : Supposons que le temps d'attente qu'un client passe dans un restaurant ait une distribution exponentielle d'une valeur moyenne de 5 minutes. La probabilité qu'un client passe plus de 10 minutes dans le restaurant est donnée par :

$$P\{X > 10\} = e^{-5/\lambda} = e^{-10/5} = e^{-2} = 0.1353$$

En d'autres termes, le passé n'a pas d'importance.

Une généralisation de la distribution exponentielle conduit à la distribution gamma.

e) Loi de probabilité GAMMA.

X est dite une variable aléatoire gamma avec les paramètres α et β , positifs si :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{2.23}$$

où $\Gamma(\alpha)$ représente la fonction gamma définie comme :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (2.24)$$

Si α est un entier, l'intégration par parties de $\Gamma(\alpha)$ donne :

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)! \quad (2.25)$$

La densité de probabilité gamma a une variété de formes en fonction des valeurs de α et β .

- Pour $\alpha < 1$, $f_X(x)$ est strictement décroissant et $\lim_{x \rightarrow 0} f_X(x) \rightarrow \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_X(x) \rightarrow 0$
- Pour $\alpha > 1$, la densité $f_X(x)$ a un mode unique en $x = \frac{\alpha-1}{\beta}$ avec une valeur maximale $\frac{[(\alpha-1)e^{-1}]^{\alpha-1}}{\beta \Gamma(\alpha)}$.

La figure 2.11 montre l'allure de certaines densités de probabilité typiques de la loi gamma. Certains cas particuliers de la distribution gamma sont largement utilisés et ont des noms spéciaux. Notons que la variable aléatoire exponentielle définie dans (2.22) est un cas particulier de distribution gamma avec $\alpha = 1$.

Si on prend $\alpha = n/2$ et $\beta = 2$, nous obtenons la variable aléatoire χ^2 (chi-carré) avec n degrés de liberté. Pour $\alpha = n$ en (2.23), nous obtenons la fonction de densité gamma pour être (avec $= \frac{1}{\lambda}$).

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n \lambda x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.26)$$

En intégrant par parties l'équation (2.26), on obtient la fonction de répartition correspondante à la variable aléatoire gamma soit :

$$F_X(t) = \int_0^t f_X(x) dx = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (2.27)$$

Si $\lambda = n\mu$, dans (2.26) et (2.27), alors cela correspond à une variable aléatoire Erlangienne.

Ainsi $G(n, 1/n\mu)$, correspond à une densité de probabilité Erlangienne (E_n).

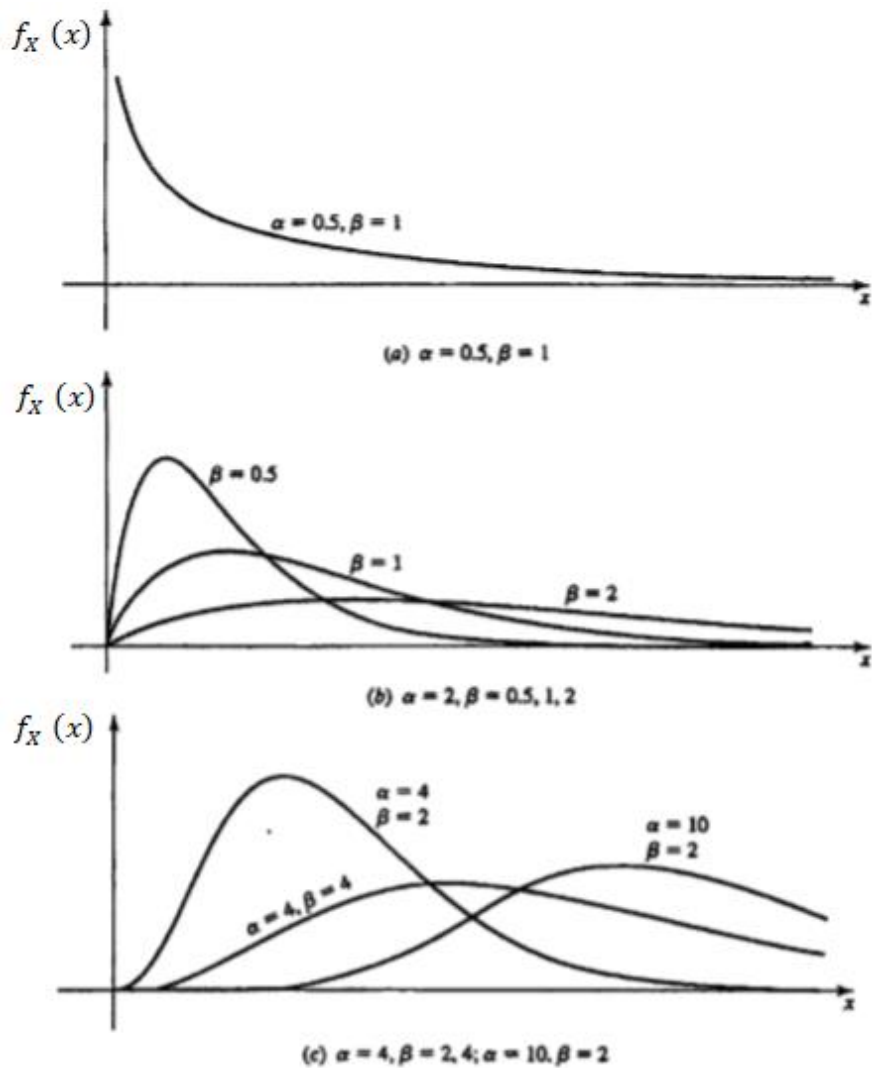


Figure 2.11 : Différentes formes de la densité de probabilité gamma.

Dans ce cas, $n = 1$ donne une variable aléatoire exponentielle, et $n \rightarrow \infty$ donne une densité de probabilité constante ($F_X(t) = 1$), pour $t > \frac{1}{\mu}$ et zéro ailleurs). Ainsi, l'aléatoire à la certitude est couvert par la distribution erlangienne car n varie entre 1 et ∞ . De nombreuses distributions importantes se produisant dans la pratique se situent entre ces deux cas et elles peuvent être approximées par une distribution Erlangienne pour un bon choix de n .

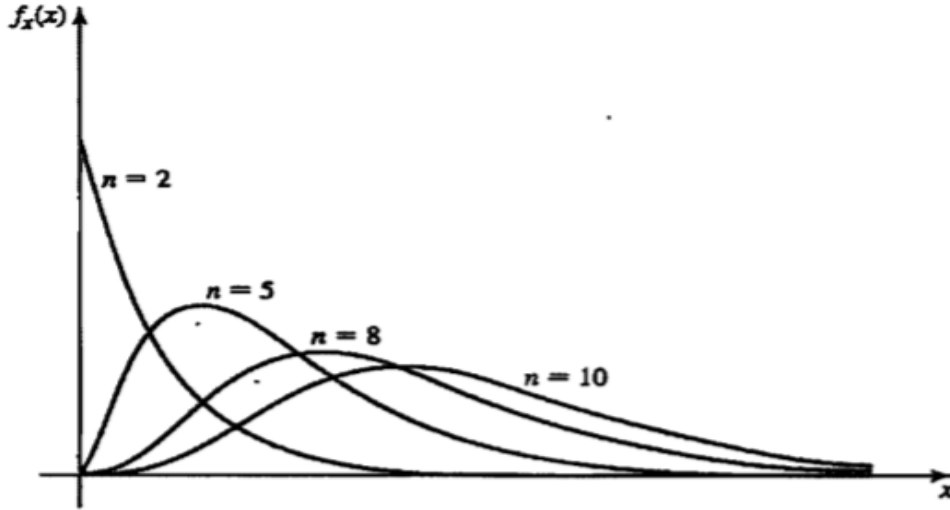


Figure 2.12: Densités de probabilités χ^2 (chi-carré) pour $n = 2, 5, 8$ et 10 .

f) Loi de probabilité chi carré (CHI-SQUARE)

Une variable aléatoire X suit la loi $\chi^2(n)$ (chi carré) avec n degrés de liberté si :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{n/2-1}}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.28)$$

La figure 2.12 montre des allures de $\chi^2(n)$ pour diverses valeurs de n . Si on prend $n = 2$ dans (2.27), on obtient une distribution exponentielle. Il est également possible de généraliser la variable aléatoire exponentielle de manière à éviter sa propriété sans mémoire évoquée précédemment. En réalité, la plupart des appareils se détériorent avec le temps de sorte qu'un modèle exponentiel est inadéquat pour décrire la durée de sa durée de vie et son taux de défaillance. Dans ce contexte, considérons la fonction de répartition suivante :

$$F_X(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad x \geq 0 \quad \lambda(t) \geq 0 \quad (2.29)$$

La densité de probabilité associée est donnée par :

$$f_X(x) = \lambda(x) e^{-\int_0^x \lambda(t) dt} \quad x \geq 0 \quad \lambda(t) \geq 0 \quad (2.30)$$

Notons que $\lambda(t) = \text{constant}$, donne lieu à la distribution exponentielle et pour généraliser ça correspond à :

$$\lambda(t) = \alpha t^{\beta-1} \quad (2.31)$$

et en substituant (2.31) dans (2.30), on obtient :

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta / \beta} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.32)$$

et elle est connue sous le nom de densité de probabilité de Weibull (voir Fig. 2.13).

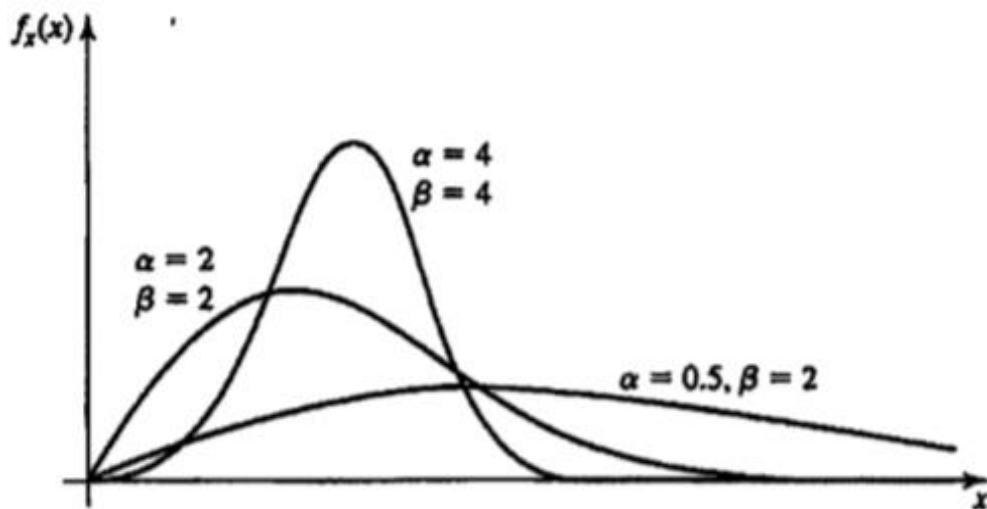


Figure. 2.13 : Densité de probabilité de Weibull

Le cas particulier de Weibull avec $\alpha = 1/\sigma^2$ et $\beta = 2$ est connu sous le nom de loi de probabilité de Rayleigh. Ainsi, la loi de Rayleigh a un taux linéaire en (2.31).

2.3.4. Exercices d'application

Exercice 1

Dans l'expérience du lancement d'une pièce de monnaie, les probabilités d'avoir pile ou face sont égales p et q respectivement à. On définit la variable aléatoire X telle que :

$$X(\text{face}) = 1 \quad X(\text{pile}) = 0.$$

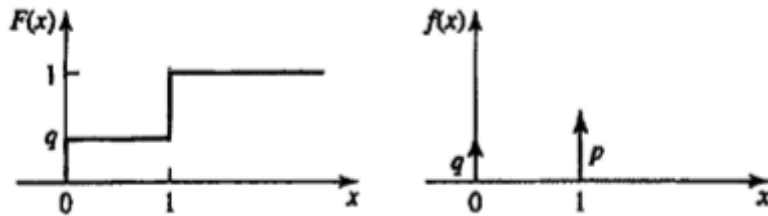
Trouver sa fonction de répartition $F_X(x) = P\{X \leq x\}$ pour tout x de $-\infty$ à $+\infty$.

Solution

- Si $x < 0$, alors $X(f) = 1 > x$ et $X(p) = 0 > x$ Donc :

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{\emptyset\} = 0.$$

- Si $0 \leq x < 1$, alors $X(f) = 1 > x$ et $X(p) = 0 \leq x$ Donc :
 $F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{p\} = q.$
- Si $x \geq 1$, alors $X(f) = 1 \leq x$ et $X(p) = 0 \leq x$ Donc :
 $F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{f, p\} = 1.$



La figure ci-dessus illustre l'allure de $F_X(x)$ et de $f_X(x)$ respectivement.

Exercice 2

Nous allons reprendre l'exemple 2.1 avec la variable aléatoire $X(f_i) = 10i$ de l'expérience du dé (figure 2.14) t.q :

- L'ensemble $\{X \leq 35\}$ concerne les éléments f_1, f_2 , et f_3 car $X(f_i) \leq 35$ est vérifié seulement pour $i=1,2,3$
- L'ensemble $\{X \leq 5\}$ est vide car il n'y a pas de résultat tel que $X(f_i) \leq 5$.
- L'ensemble $\{20 \leq X \leq 35\}$ concerne les éléments f_2 , et f_3 car ceci est vérifié seulement pour $i=2$ ou 3 .
- L'ensemble $\{X = 40\}$ concerne l'élément f_4 car $X(f_i) = 40$ est vérifié seulement pour $i=4$.
- L'ensemble $\{X = 35\}$ est vide car il n'y a pas de résultat tel que $X(f_i) = 35$.

Trouver sa fonction de répartition $F_X(x) = P\{X \leq x\}$ pour tout x de $-\infty$ à $+\infty$.

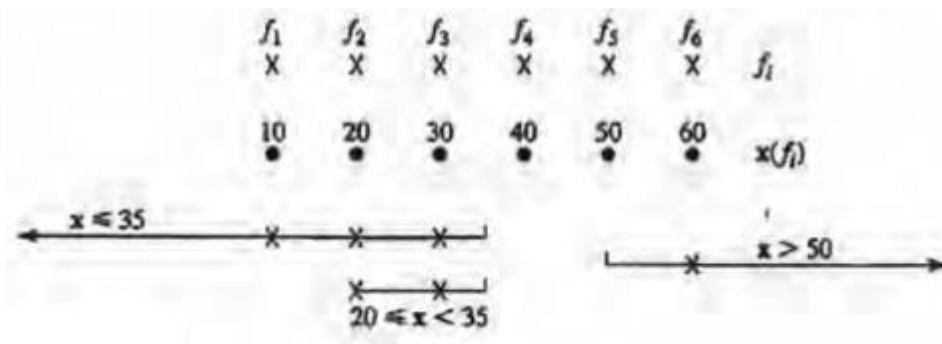


Figure 2.14 : Valeurs possible de X

Solution

Si le dé est équilibré, alors la fonction de répartition de X est une fonction en marche d'escalier comme le montre la figure 2.15.

Nous notons, en particulier, que :

$$F_X(100) = P\{X \leq 100\} = P\{S\} = 1$$

$$F_X(35) = P\{X \leq 35\} = P\{f_1, f_2, f_3\} = \frac{3}{6}$$

$$F_X(30.01) = P\{X \leq 30.01\} = P\{f_1, f_2, f_3\} = \frac{3}{6}$$

$$F_X(30) = P\{X \leq 30\} = P\{f_1, f_2, f_3\} = \frac{3}{6}$$

$$F_X(29.99) = P\{X \leq 29.99\} = P\{f_1, f_2\} = \frac{2}{6}$$

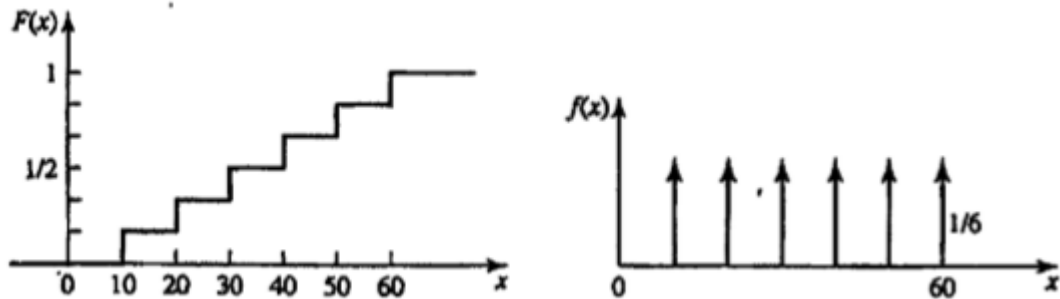


Figure 2.15 : fonction de répartition et densité de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice 3

Un appel téléphonique se produit au hasard dans l'intervalle $[0, 1]$. Dans cette expérience. Les résultats sont des distances de temps t entre 0 et 1 et la probabilité que t soit entre t_1 et t_2 est donnée par :

$$P\{t_1 \leq t \leq t_2\} = t_2 - t_1$$

On définit la variable aléatoire X telle que :

$$X(t) = t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Ainsi la variable t a une double signification :

- elle est le résultat de l'expérience
- et la valeur correspondante $x(t)$ de la variable aléatoire.

Nous montrerons que la fonction de répartition $F_X(x)$ de X est une rampe comme sur la figure (2.16 a)

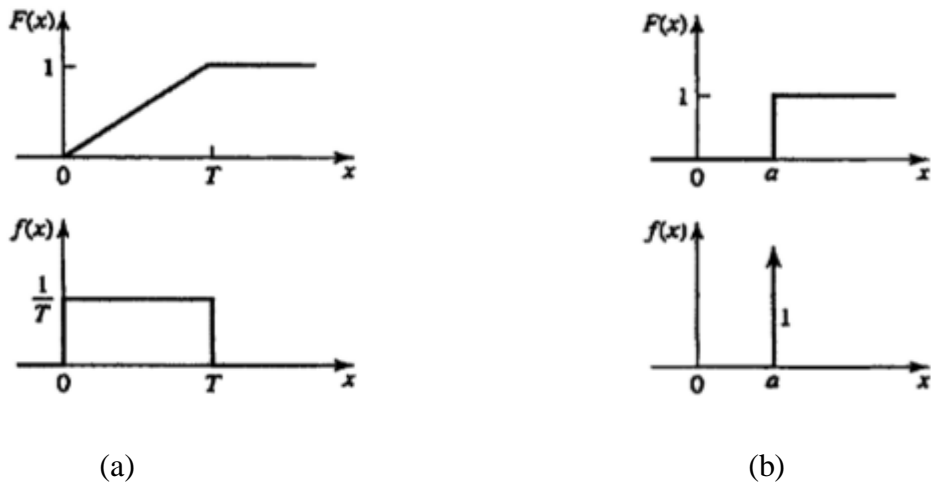


Figure 2.16 : Fonction de répartition et densité de probabilité de 2 variables aléatoires.

Solution

- Si $x > 1$, alors $X(t) \leq x$ pour chaque résultat. Par conséquent

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{0 \leq t \leq 1\} = P\{S\} = 1 \quad x > 1$$

- Si $0 \leq x < 1$, alors $X(t) \leq x$ pour tout t dans l'intervalle $[0, x]$. Donc

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{0 \leq t \leq x\} = x.$$

- Si $x < 0$, alors $\{X \leq x\}$, est l'évènement impossible car $X(t) \geq 0$ pour chaque t .

$$\text{Donc } F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{\emptyset\} = 0.$$

Exercice 4

Supposons qu'une variable aléatoire est tel que $X(\xi) = a$ pour chaque ξ de S . Donner sa fonction de répartition $F_X(x) = P\{X \leq x\}$.

Solution

- Si $x \geq a$, alors $X(\xi) = a \leq x$ pour chaque ξ . Par conséquent ;

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{S\} = 1 \quad x \geq a$$

- Si $x < a$, alors $\{X \leq x\}$, est l'évènement impossible car $X(\xi) = a$. Donc ;

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{\emptyset\} = 0.$$

Une constante peut être interprétée comme une variable aléatoire avec une fonction de répartition $U(x - a)$ comme le montre la figure (2.16 b).

Remarque :

A partir de l'allure de $F_X(x)$ on peut connaître le type de la variable aléatoire (**continu, discret et mixte**) :

- La variable aléatoire X est dite de type continu si sa fonction de répartition est continue. Dans ce cas $F_X(x^-) = F_X(x)$ pour tout x .
- Si $F_X(x)$ est constant sauf pour un nombre fini de discontinuités de sauts (constante par morceaux), alors X est une variable aléatoire de type discret. Si x_i est un tel point de discontinuité, alors on a : $P\{X = x_i\} = F_X(x_i) - F_X(x_i^-) = p_i$

Par exemple, de la figure 2.16, au point de discontinuité on obtient :

$$P\{X = a\} = F_X(a) - F_X(a^-) = 1 - 0 = 1$$

Et de la figure 2.2, pour un tel point on aura :

$$P\{X = 0\} = F_X(0) - F_X(0^-) = q - 0 = q$$

Exercice 5

Une pièce équiprobable est lancée deux fois et la variable aléatoire X représente le nombre de faces obtenues. Trouvez $F_X(x)$.

Solution

Dans ce cas

$$\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$$

$$X(FF) = 2 \quad X(FP) = 1 \quad X(PF) = 1 \quad X(PP) = 0$$

Les valeurs de X sont donc : $x = \{0, 1, 2\}$

- Si $x < 0$, $\{X(\xi) \leq x\} = \emptyset \Rightarrow F_X(x) = 0$
- Si

$$0 \leq x < 1, \quad \{X(\xi) \leq x\} = \{PP\} \Rightarrow F_X(x) = P\{PP\} = P\{P\}P\{P\} = \frac{1}{4}$$

- Si $1 \leq x < 2$,

$$\{X(\xi) \leq x\} = \{PP, FP, PF\} \Rightarrow F_X(x) = P\{PP\} + P\{FP\} + P\{PF\} = \frac{3}{4}$$

- Si $x \geq 2$, $\{X(\xi) \leq x\} = \Omega \Rightarrow F_X(x) = 1$

L'allure de $F_X(x)$ est donnée par la figure 2.17, au point de discontinuité

$$P\{X = 1\} = F_X(1) - F_X(1^-) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

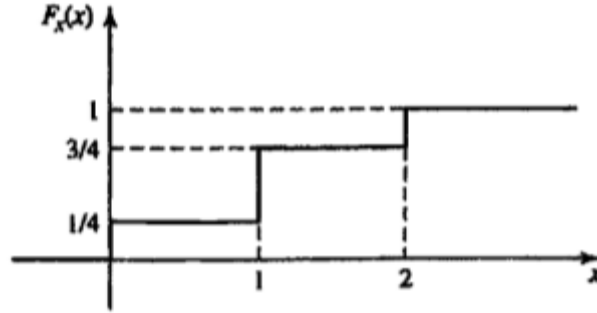


Figure 2.17 : Fonction de répartition de la v.a X

2.3.5. Relation entre la densité de probabilité et fonction de répartition

La dérivée de la fonction de répartition $F_X(x)$ représente la densité de probabilité $f_X(x)$ de la variable aléatoire X . Donc :

$$f_X(x) \triangleq \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.33)$$

Puisque

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad (2.34)$$

de la nature monotone non décroissante de $F_X(x)$, il s'ensuit que $f_X(x) \geq 0$ pour tout x . Si X est une variable aléatoire de type continu, $f_X(x)$ sera une fonction continue. Cependant, si X est une variable aléatoire de type discret, sa densité de probabilité a la forme générale (Fig. 2.18b) suivante :

$$f_X(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \quad (2.35)$$

où $\delta(x_i)$ représente les points de sauts de discontinuité dans $F_X(x)$ comme le montre Fig. 2.18.

De (2.33), on obtient aussi par intégration :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad (2.36)$$

Puisque $F_X(+\infty) = 1$, (2.36) mène à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (2.37)$$

Ce qui justifie son nom comme fonction de densité.

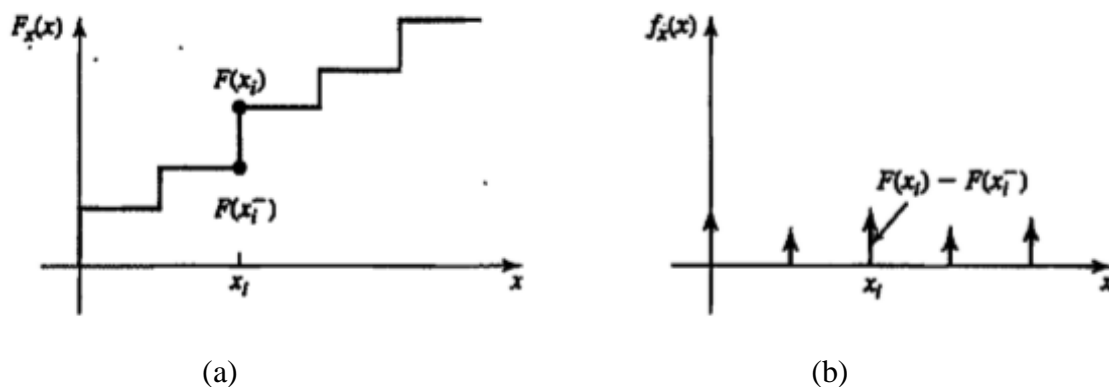


Figure 2.18 : fonction de répartition(a) et densité de probabilité(b) de X .

De plus, à partir de (2.36), nous obtenons également (Fig.2.19):

$$P \{x_1 < X(\xi) \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx \quad (2.38)$$

Ainsi l'aire en dessous de $f_X(x)$ dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ représente la probabilité que la variable aléatoire X se trouve dans ce dernier comme dans (2.38). Si la variable aléatoire X est continue, alors l'ensemble de gauche peut être remplacé par l'ensemble $\{x_1 < X \leq x_2\}$.

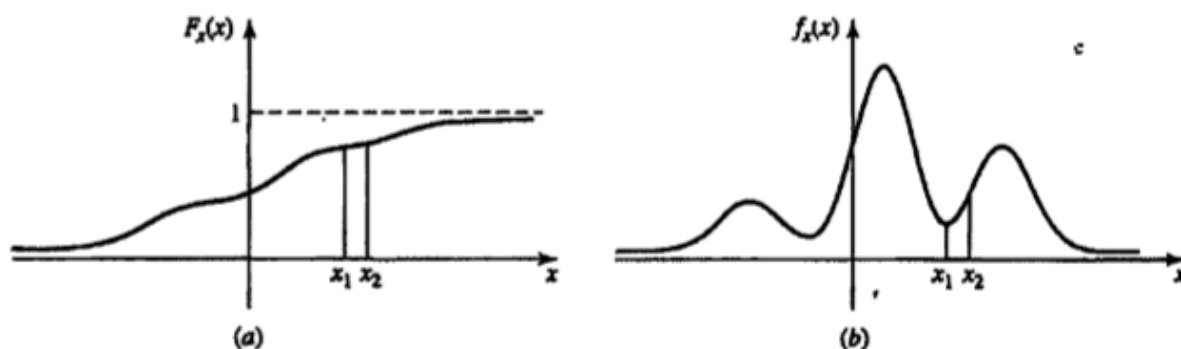


Figure 2.19 : Fonction de répartition(a) et densité de probabilité (b) d'une v.a X

Cependant, si $F_X(x)$ est discontinue en x_1 ou x_2 , alors l'intégration doit inclure les impulsions correspondantes de $f_X(x)$. Avec $x_1 = x$ et $x_2 = x + \Delta x$, il résulte de (2.38) que, si X est de type continu, alors :

$$P\{x < X \leq x + \Delta x\} \cong f_X(x)\Delta x \quad (2.39)$$

Δx est suffisamment petit. Ceci montre que $f_X(x)$ peut être définie par une limite telle que :

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x} \quad (2.40)$$

2.4. Fonctions de variables aléatoires

Supposons que X soit une variable aléatoire et que $g(X)$ soit une fonction de la variable réelle X . L'expression : $Y = g(X)$ est une nouvelle variable aléatoire.

Pour un ξ donné, $X(\xi)$ est un nombre et $g[X(\xi)]$ est un autre nombre spécifié en fonction de $X(\xi)$ et (X) . Ce nombre est la valeur $Y(\xi) = g[X(\xi)]$ affectée à la variable aléatoire Y .

La fonction de répartition $F_Y(y)$ de la variable aléatoire ainsi formée est la probabilité de l'événement $\{Y \leq y\}$ consistant en tous les résultats ξ tels que $Y(\xi) = g[X(\xi)] \leq y$ Ainsi :

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} \quad (2.41)$$

Pour un y spécifique, les valeurs de x telles que $g(x) \leq y$ forment un ensemble sur l'axe des x noté R_y . Clairement, $g[X(\xi)] \leq y$ si $X(\xi)$ est un nombre dans l'ensemble R_y . D'où :

$$F_Y(y) = P\{X \in R_y\} \quad (2.42)$$

Pour que $g(x)$ soit une variable aléatoire, elle doit avoir les propriétés suivantes :

1. Son domaine doit inclure la plage de la variable aléatoire X .
2. Il doit s'agir d'une fonction borélienne, c'est-à-dire, pour tout y , l'ensemble R_y tel que $g(X) \leq y$ doit être constitué par la réunion et l'intersection d'un nombre dénombrable d'intervalles. Alors seulement $\{Y \leq y\}$ est un événement.
3. Les événements $\{g(X) = \pm\infty\}$ doivent avoir une probabilité nulle.

2.4.1. La fonction de répartition de $g(X)$

Nous exprimerons la fonction de répartition $F_y(y)$ de variable aléatoire $Y = g(X)$ en fonction de la fonction répartition $F_X(x)$ de variable aléatoire X et de la fonction $g(X)$. Pour cela, il faut déterminer l'ensemble R_y de l'axe des x tel que $g(X) \leq y$, et la probabilité que x soit dans cet ensemble. La méthode sera illustrée par plusieurs exemples. Sauf indication contraire, on supposera que $F_X(x)$ est continue.

Exemple 2.9 : Nous commençons par la fonction $g(x)$ de la figure 2.20. On voit qu'elle est comprise entre a et b pour tout x . Cela conduit à la conclusion que :

- Si $y \geq b$ alors $g(x) \leq y$ pour tout x , donc $P\{Y \leq y\} = 1$
- Si $y < a$ alors il n'existe aucun x tel que $g(x) \leq y$ donc $P\{Y \leq y\} = 0$

Ainsi ;

$$F_y(y) = \begin{cases} 1 & y \geq b \\ 0 & y < a \end{cases}$$

Avec x_1 et $y_1 = g(x_1)$ comme indiqué, nous observons que $g(x) \leq y_1$ pour $x \leq x_1$. D'où

$$F_Y(y_1) = P\{x \leq x_1\} = F_X(x_1)$$

Finalement nous remarquons que :

$$g(x) \leq y_2 \quad \text{si } x \leq x'_2 \quad \text{ou si } x''_2 \leq x \leq x'''_2$$

D'où

$$F_Y(y_2) = P\{x \leq x'_2\} + P\{x''_2 \leq x \leq x'''_2\} = F_X(x'_2) + F_X(x'''_2) - F_X(x''_2)$$

car les événements $\{x \leq x'_2\}$ et $\{x''_2 \leq x \leq x'''_2\}$ s'excluent mutuellement.

Exemple 2.10 : Soient X et Y deux variables aléatoires tel que :

$$Y = aX + b \quad (2.43)$$

Pour trouver $F_Y(y)$, on doit chercher les valeurs de x tel que $aX + b \leq y$.

a) Si $a > 0$, donc $aX + b \leq y$ pour $X \leq (y - b)/a$ (Figure 5-2a). Donc

$$F_Y(y) = P\left\{X \leq \frac{y-b}{a}\right\} = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad a > 0$$

b) Si $a < 0$, donc $aX + b \leq y$ pour $X > (y - b)/a$ (Figure 2.21b). Donc

$$F_Y(y) = P\left\{X \geq \frac{y-b}{a}\right\} = P\left\{X < \frac{y-b}{a}\right\} = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad a < 0$$

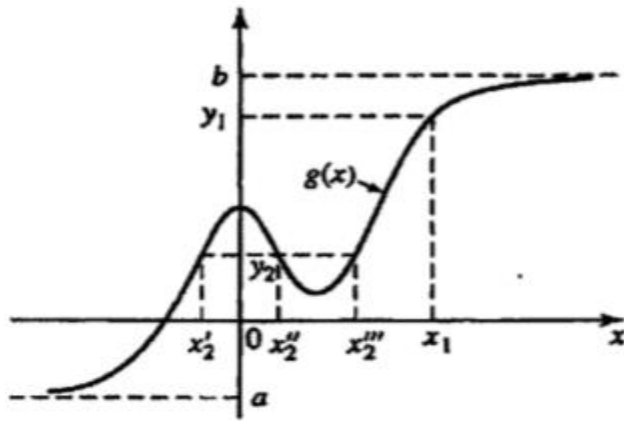


Figure 2.20 : Allure de la fonction $g(x)$

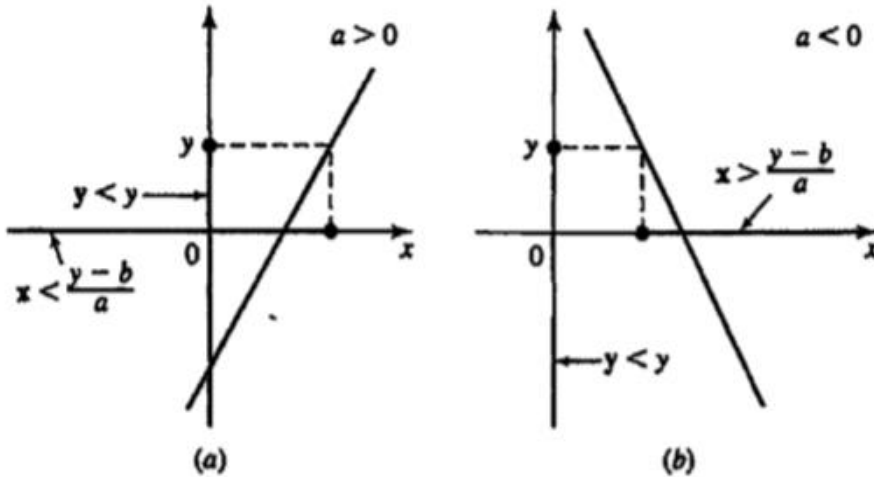


Figure 2.21 : Représentation de y (a) $a > 0$ (b) $a < 0$

Exemple 2.11 : Soient X et Y deux variables aléatoires tel que :

$$Y = X^2$$

- Si $y \geq 0$, alors $X^2 \leq y$ pour $-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}$ (fig.2.22a). Donc

$$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \quad y > 0$$

- Si $y < 0$, alors il n'existe aucune valeur de x tel que $X^2 < y$. Donc

$$F_Y(y) = P\{\emptyset\} = 0 \quad y < 0$$

2.4.2. La densité de probabilité de $g(X)$

Par une dérivation directe de $F_Y(y)$, on obtient :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} (f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})) & y > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.44)$$

Si $f_X(x)$ est une fonction paire, alors (2.44) se réduit à :

$$f_Y(y) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) U(y) \right. \quad (2.45)$$

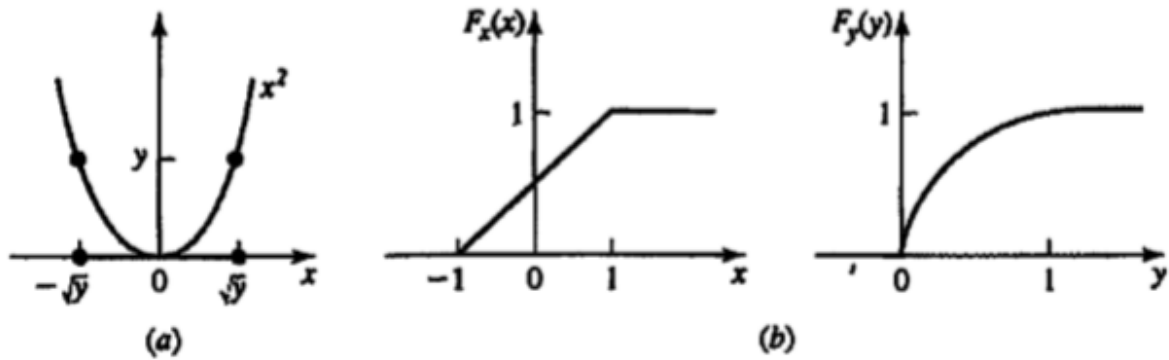


Figure 2.22 : (a) courbe de $y = x^2$, (b) fonctions de répartition de X et Y respectivement

En particulier si $X \sim N(0,1)$, pour que

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.46)$$

et en substituant ceci dans (2.45), on obtient la densité de probabilité de $Y = X^2$ soit :

$$f_Y(y) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} f_X(\sqrt{y})^{-y/2} U(y) \right. \quad (2.47)$$

En comparant ceci avec (2.28), nous remarquons que (2.47) représente une variable aléatoire chi-carrée avec $n=1$, puisque $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Donc, si X est une variable aléatoire gaussienne avec $\mu=0$, alors $Y = X^2$ représente une variable aléatoire chi-carrée avec un degré de liberté.

Cas particulier : Si X est uniforme dans l'intervalle $[-1, 1]$, alors

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \quad |x| < 1$$

(Fig. 2.22b). D'où

$$F_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Exemple 2.12 : Considérons la fonction de la figure 2.23

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -c \leq x \leq c \\ x - c & x > c \\ x + c & x < -c \end{cases} \quad (2.48)$$

Dans ce cas, $F_Y(y)$ est non continue en $y = 0$ et sa discontinuité est égale à $F_X(c) - F_X(-c)$.

En outre,

- Si $y \geq 0$ alors $P\{Y \leq y\} = P\{X \leq y + c\} = F_X(y + c)$
- Si $y < 0$ alors $P\{Y \leq y\} = P\{X \leq y - c\} = F_X(y - c)$

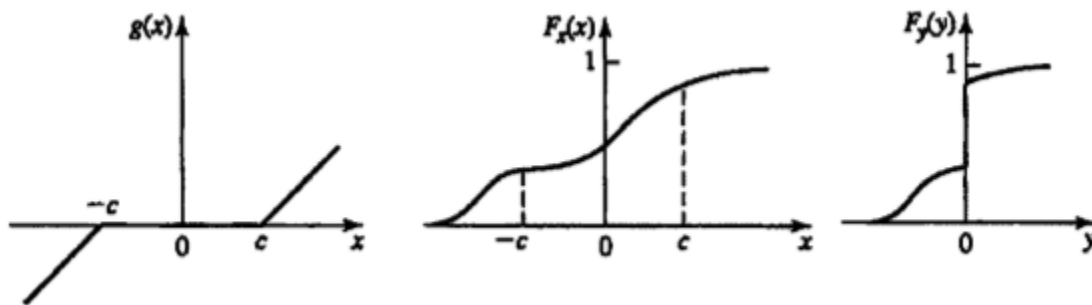


Figure 2.23 : (a) courbe de y (b) fonctions de répartition de X et Y respectivement.

Exemple 2.13 : La courbe de $g(x)$ de la figure 2.24 est constante pour $x \leq -b$ et $x \geq b$ et est une droite dans l'intervalle $[-b, b]$. Avec $Y = g(X)$, il s'ensuit que $F_Y(y)$ est discontinue pour

$y = g(-b) = -b$ et $y = g(b) = b$, respectivement. En outre,

- Si $y \geq b$ alors $g(x) \leq y$ pour tout x ; par conséquent $F_Y(y) = 1$
- Si $-b \leq y \leq b$ alors $g(x) \leq y$ pour tout $x \leq y$; par conséquent $F_Y(y) = F_X(x)$

- Si $y < -b$ alors $g(x) \leq y$ pour aucun x ; par conséquent $F_Y(y) = 0$.

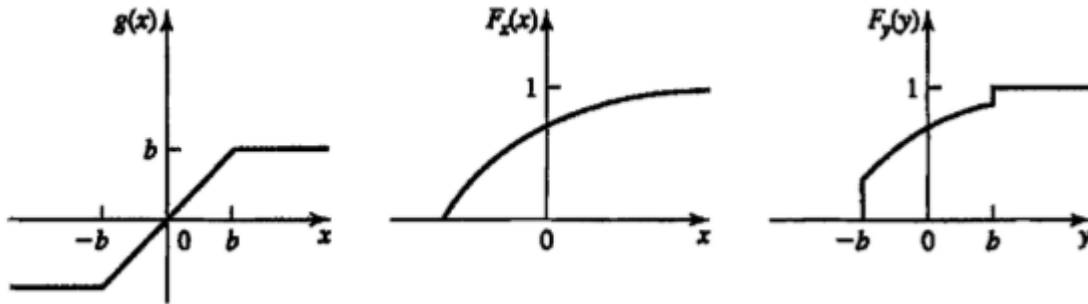


Figure 2.24 : (a) courbe de $g(x)$ (b) fonctions de répartition de X et Y respectivement

Exemple 2.14 : Soit $Y = X^2$

- Si X prend les valeurs $1, 2, \dots, 6$ avec la probabilité $1/6$, alors les valeurs de Y sont : $1^2, 2^2, \dots, 6^2$ avec la même probabilité de $1/6$.
- Si, cependant, X prend les valeurs $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ avec la probabilité $1/6$, alors Y prend les valeurs $0, 1, 4, 9$ avec probabilités $1/6, 2/6, 2/6, 1/6$, respectivement.

2.5. Moments et statistiques d'une variable aléatoire

2.5.1. Moyenne d'une variable aléatoire (Moment d'ordre 1)

a) Variable aléatoire continue

La valeur espérée ou moyenne d'une variable aléatoire X est par définition l'intégrale suivante :

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (2.49)$$

Elle peut être aussi notée par μ_X ou μ .

Exemple 2.15 : Si X est uniforme sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, alors $f_X(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}$ dans ce domaine. Par conséquent :

$$E\{X\} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} x dx$$

Nous remarquons que, si la ligne verticale $x = a$ est un axe de symétrie de $f_X(x)$ alors :

$E\{X\} = a$. En particulier, si $f_X(-x) = f_X(x)$ alors $E\{X\} = 0$. Dans l'exemple précédent, $f_X(x)$ est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{x_1+x_2}{2}$

b) Variable aléatoire discrète

Dans ce cas l'intégrale de (2.50) peut être écrite comme une somme. En effet, supposons que X prenne les valeurs x_i avec une probabilité p_i . Dans ce cas, on a :

$$f_X(x) = \sum p_i \delta(x - x_i) \quad (2.51)$$

En substituant dans (2.50) et utilisant l'identité $\int_{-\infty}^{+\infty} x \delta(x - x_i) dx = x_i$, on obtient :

$$E\{X\} = \sum_i p_i x_i \quad p_i = P\{X = x_i\} \quad (2.52)$$

Exemple 2.16 : Si X prend les valeurs 1,2,...,6 avec la probabilité 1/6, alors :

$$E\{X\} = \frac{1}{6} \times (1 + 2 + \dots + 6) = 3.5$$

c) Moyenne d'une fonction d'une variable aléatoire

Étant donné une variable aléatoire X et une fonction $g(X)$, nous formons la variable aléatoire $Y = g(X)$, la moyenne de cette variable aléatoire est donnée par :

$$E\{Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \quad (2.53)$$

Il apparaît donc que pour déterminer la moyenne de Y , il faut trouver sa densité de probabilité $f_Y(y)$. Cependant, celle-ci n'est pas nécessaire. $E\{Y\}$, peut être exprimée directement en termes de fonction $g(X)$ et de la densité $f_X(x)$ de X comme le montre le théorème de base suivant :

Théorème $E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (2.54)$

Si X est discrète comme dans (2.51), alors (2.54) donne :

$$E\{g(X)\} = \sum_i g(x_i) P(X = x_i) \quad (2.55)$$

Exemple 2.17 : Avec x_0 un nombre arbitraire et $g(x)$ comme dans la Fig. 2.25, l'équation (2.54) donne :

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = F_X(x_0)$$

Cela montre que la fonction de répartition d'une variable aléatoire peut être exprimée comme une espérance.

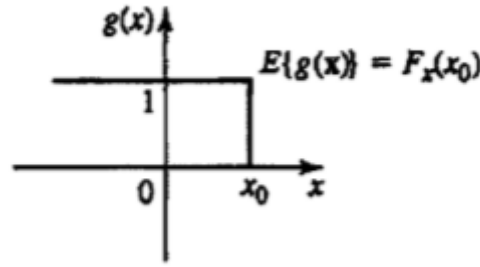


Figure 2.25 : Moyenne d'une fonction d'une variable aléatoire

Exemple 2.18 : Dans cet exemple, nous montrons que la probabilité de tout événement A peut être exprimée comme une valeur espérée. Pour cela on forme la variable aléatoire X_A (zéro, un) associée à l'événement A :

$$X_A(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \in A \\ 0 & \xi \notin A \end{cases}$$

Puisque cette variable aléatoire prend les valeurs 1 et 0 avec des probabilités respectives $P(A)$ et $P(\bar{A})$, donne :

$$E\{X_A\} = 1 \times P(A) + 0 \times P(\bar{A}) = P(A)$$

d) La linéarité

De (2.54), il s'ensuit que :

$$E\{a_1 g_1(X) + \dots + a_n g_n(X)\} = a_1 E\{g_1(X)\} + \dots + a_n E\{g_n(X)\} \quad (2.56)$$

En particulier, $E\{ax + b\} = aE\{x\} + b$

e) Variable aléatoire complexe

Si $Z = X + jY$ est une variable aléatoire complexe, alors son espérance mathématique est par définition : $E\{Z\} = E\{X\} + j E\{Y\}$

De ceci et de (2.54), il s'ensuit que si $g(X) = g_1(X) + jg_2(X)$ est une fonction complexe de la variable aléatoire réelle X alors :

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x)f_X(x)dx + j \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x)f_X(x)dx \quad (2.57)$$

En d'autres termes, (2.54) est vrai même si $g(x)$ est complexe.

2.5.2. La variance

La moyenne seule ne pourra pas vraiment représenter la densité de probabilité d'une variable aléatoire. Pour illustrer cela, considérons deux variables aléatoires gaussiennes $X_1 \sim N(0, 1)$ et $X_2 \sim N(0, 3)$. Les deux ont la même moyenne μ . Cependant, comme le montre la figure 2.26, leurs densités de probabilité sont assez différentes. Ici, X_1 est plus concentrée autour de la moyenne, alors que X_2 a un étalement plus large. Clairement, il faut au moins un paramètre supplémentaire pour mesurer cet écart autour de la moyenne. Pour une variable aléatoire X de moyenne μ , $X - \mu$ représente l'écart de la variable aléatoire par rapport à sa moyenne. Comme cet écart peut être positif ou négatif, considérons la quantité $(X - \mu)^2$ et sa valeur moyenne $E[(X - \mu)^2]$ représente l'écart moyen au carré de X autour de sa moyenne. En définissant

$$\sigma_X^2 \triangleq E[(X - \mu)^2] > 0 \quad (2.58)$$

Avec $g(X) = (X - \mu)^2$ et en utilisant (2.54), on obtient :

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x)dx > 0 \quad (2.59)$$

La constante positive σ_X^2 ; est appelée la variance de la variable aléatoire X , et sa racine carrée positive $\sigma_X = \sqrt{E(X - \mu)^2}$ est connue comme l'écart type de X . Notez que l'écart type représente la valeur quadratique moyenne de la variable aléatoire X autour de sa moyenne μ . De la définition, il résulte que σ^2 est la moyenne de la variable aléatoire $(X - \mu)^2$. Ainsi :

$$Var\{X\} = \sigma^2 = E\{(X - \mu)^2\} = E\{X^2 - 2X\mu + \mu^2\} = E\{X^2\} - 2\mu E\{X\} + \mu^2$$

Par conséquent :

$$\sigma^2 = E\{X^2\} - (E\{X\})^2 \quad (2.60)$$

Pour n'importe quelle variable aléatoire on a $E\{X^2\} \geq (E\{X\})^2$

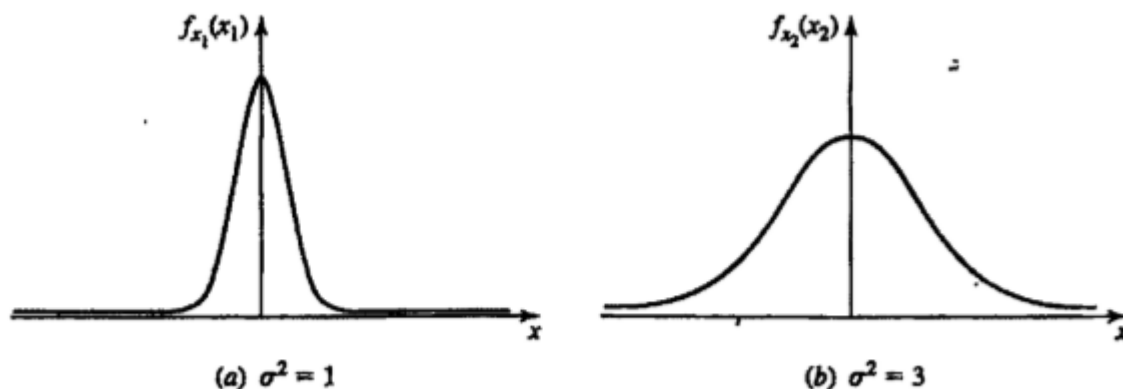


Figure 2.26 : Deux variables aléatoires gaussiennes $X_1 \sim N(0, 1)$ et $X_2 \sim N(0, 3)$

Exemple 2.19 :

Si X est uniforme dans l'intervalle $[-c, c]$, alors $\eta = 0$ et

$$\sigma^2 = E\{X^2\} = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c x^2 dx = \frac{c^2}{2}$$

Exemple 2.20 : la densité de la variable aléatoire normale a été exprimée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

Jusqu'à présent η et σ^2 étaient deux constantes arbitraires. On montre ensuite que η est bien la moyenne de X et σ^2 sa variance.

Preuve. Clairement, $f_X(x)$ est symétrique par rapport à la ligne $x = \eta$; donc $E\{X\} = \eta$. De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{2\pi}$, car l'aire de $f_X(x)$ est égale à 1. En dérivant par rapport à σ , on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^3} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

En multipliant les deux côtés par $\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}$, nous concluons que $E\{(X-\eta)^2\} = \sigma^2$.

Cas discret : Si la variable aléatoire X est de type discret comme en (2.51), alors :

$$\sigma^2 = \sum_i p_i (x_i - \eta)^2 \quad p_i = P(X = x_i) \quad (2.61)$$

Exemple 2.21 :

La variable aléatoire X prend les valeurs 1 et 0 avec des probabilités p et $q = 1 - p$ respectivement. Dans ce cas on aura :

$$E\{X\} = 1 \times p + 0 \times q = p$$

$$E\{X^2\} = 1^2 \times p + 0^2 \times q = p$$

Donc $\sigma^2 = E\{X^2\} - (E\{X\})^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$

Exemple 2.22 : Une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ prend les valeurs 0, 1, ... avec les probabilités données par :

$$P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On montre que sa moyenne et sa variance sont toutes deux égales :

$$E\{X\} = \lambda \quad E\{X^2\} = \lambda^2 + \lambda \quad \sigma^2 = \lambda \quad (2.62)$$

Preuve : On différencie deux fois le développement de Taylor de e^λ :

$$\begin{aligned} e^\lambda &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{k!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \\ e^\lambda &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^{k-2}}{k!} = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E\{X\} &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \\ E\{X^2\} &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Points de Poisson : le nombre n de points de Poisson dans un intervalle de longueur t_0 est une variable aléatoire distribuée de Poisson de paramètre $a = \lambda t_0$. De là il s'ensuit que :

$$E\{n\} = \lambda t_0 \quad \sigma_n^2 = \lambda t_0 \quad (2.63)$$

Cela montre que la densité λ de points de Poisson est égale au nombre espéré de points par unité de temps.

Remarques :

- 1- La variance σ^2 d'une variable aléatoire X est une mesure de la dispersion de cette dernière au tour de sa moyenne η . Son interprétation fréquentielle relative est la moyenne de $(x_i - \eta)^2$.

$$\sigma^2 \cong \frac{1}{n} \sum (x_i - \eta)^2 \quad (2.64)$$

Où ; x_i sont les observations de X . Cette moyenne ne peut être utilisée comme estimation de σ^2 que si η est connue. Dans le cas contraire on remplace η par son estimation ce qui donne :

$$\sigma^2 \cong \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \tilde{x})^2 \quad \tilde{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad (2.65)$$

- 2- Une mesure plus simple de la dispersion des valeurs de X au tour de η est le premier moment centré absolu $E\{|X - \eta|\}$ estimé par $M \cong \frac{1}{n} \sum |x_i - \eta|$.

2.5.3. Les moments d'une variable aléatoire

Les grandeurs suivantes sont intéressantes dans l'étude des variables aléatoires :

- **Moment d'ordre n**

$$m_n = E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx \quad (2.66)$$

- **Moment centré d'ordre n**

$$\mu_n = E\{(X - \eta)^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta)^n f_X(x) dx \quad (2.67)$$

- **Moments absolus d'ordre n**

$$E\{|X|^n\} \quad E\{|X - \eta|^n\} \quad (2.68)$$

- **Moments généralisés**

$$E\{(X - a)^n\} \quad E\{|X - a|^n\} \quad (2.69)$$

On remarque que :

$$\mu_n = E\{(X - \eta)^n\} = E\left\{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (-\eta)^{n-k}\right\}$$

Donc

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m_k (-\eta)^{n-k} \quad (2.70)$$

De la même façon on a :

$$m_n = E\{[(X - \eta) + \eta]^n\} = E\left\{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x - \eta)^k \eta^{n-k}\right\}$$

Donc

$$m_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mu_k \eta^{n-k} \quad (2.71)$$

En particulier, $\mu_0 = m_0 = 1$ $m_1 = \eta$ $\mu_1 = 0$ $\mu_2 = \sigma^2$

Et

$$\mu_3 = m_3 - 3\eta m_2 + 2\eta^3 \quad m_3 = \mu_3 + 3\eta\sigma^2 + \eta^3$$

2.5.4. Calcul des moments de quelques variables aléatoires usuelles

a) Variable aléatoire normale

Nous montrerons que si :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2\sigma^2}}$$

Alors

$$E\{X^n\} = \begin{cases} 0 & n = 2k + 1 \\ 1.3 \dots (n-1)\sigma^n & n = 2k \end{cases} \quad (2.72)$$

$$E\{|X|^n\} = \begin{cases} 2^k k! \sigma^{2k+1} \sqrt{2/\pi} & n = 2k + 1 \\ 1.3 \dots (n-1)\sigma^n & n = 2k \end{cases} \quad (2.73)$$

Les moments impairs de X sont 0 car $f_X(-x) = f_X(x)$. Pour prouver la partie inférieure de (2.72), on différencie k fois l'identité.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Cela donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2^k} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2k+1}}}$$

Et avec $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$, on obtient (2.72)

Puisque $f_X(-x) = f_X(x)$, on a :

$$E\{|X|^{2k+1}\} = 2 \int_0^{+\infty} x^{2k+1} f_X(x) dx = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^{2k+1} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

Avec $y = \frac{x^2}{2\sigma^2}$, le résultat sera :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(2\sigma^2)^k}{2\sigma} \int_0^{+\infty} y^k e^{-y} dy$$

et il en résulte (2.73). Notons en particulier que :

$$E\{X^4\} = 3\sigma^4 = 3 E^2\{X^2\}$$

b) Variable aléatoire de Poisson.

Les moments d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson sont fonctions du paramètre λ :

$$m_n(\lambda) = E\{X^n\} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{\lambda^k}{k!} \quad (2.74)$$

$$\mu_n(\lambda) = E\{(X - \lambda)^n\} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k - \lambda)^n \frac{\lambda^k}{k!} \quad (2.75)$$

Nous montrerons qu'ils satisfont aux équations récursives suivantes :

$$m_{n+1}(\lambda) = \lambda[m_n(\lambda) + m'_n(\lambda)] \quad (2.76)$$

$$\mu_{n+1}(\lambda) = \lambda[n\mu_{n-1}(\lambda) + \mu'_n(\lambda)] \quad (2.77)$$

Preuve : En différenciant (2.74) par rapport à λ , on obtient :

$$m'_n(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{\lambda^{k-1}}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^{n+1} \frac{\lambda^{k-1}}{k!} = -m_n(\lambda) + \frac{1}{\lambda} m_{n+1}(\lambda)$$

et (2.76) est trouvée. Et de la même façon, à partir de (2.75), il s'en suit :

$$\mu'_n(\lambda) = -e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k - \lambda)^n \frac{\lambda^k}{k!} - n e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k - \lambda)^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k - \lambda)^n \frac{\lambda^{k-1}}{k!}$$

En fixant $k = (k - \lambda) + \lambda$ dans la dernière somme, on obtient $\mu'_n = -\mu_n - n\mu_{n-1} + \frac{1}{\lambda}$ et $(\mu_{n+1} + \lambda\mu_n)$ et (2.77) est obtenue. Les équations précédentes conduisent à la détermination récursive des moments m_n et μ_n . En partant des moments connus $m_1 = \lambda$, et $\mu_1 = 0$, et $\mu_2 = \lambda$ [voir (2.62)], on obtient :

$$m_2 = \lambda(\lambda + 1) \quad \text{et} \quad m_3 = \lambda(\lambda^2 + \lambda + 2\lambda + 1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

$$\mu_3 = \lambda(\mu'_2 + 2\mu_1) = \lambda$$

2.5.5. Estimation de la moyenne et de la variance de $g(x)$.

a) La moyenne

La moyenne de la variable aléatoire $Y = g(X)$ est donnée par :

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx \quad (2.78)$$

Par conséquent, pour sa détermination, la connaissance de $f_X(x)$ est requise. Cependant, si X est concentrée près de sa moyenne, alors $E\{g(X)\}$ peut être exprimée en fonction des moments μ_n de X . Supposons tout d'abord que $f_X(x)$ soit négligeable en dehors d'un intervalle $[\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon]$ et dans lequel, $g(x) \cong g(\eta)$. Dans ce cas, (2.78) donne :

$$E\{g(X)\} \cong g(\eta) \int_{\eta-\varepsilon}^{\eta+\varepsilon} f_X(x)dx \cong g(\eta) \quad (2.78b)$$

Cette estimation peut être améliorée si $g(X)$ est approximée par un polynôme.

$$g(x) \cong g(\eta) + g'(\eta)(x - \eta) + \dots + g^{(n)}(\eta) \frac{(x-\eta)^n}{n!} \quad (2.78c)$$

En insérant dans (2.78) on obtient :

$$E\{g(X)\} \cong g(\eta) + g''(\eta) \frac{\sigma^2}{2} + \dots + g^{(n)}(\eta) \frac{\mu_n}{n!} \quad (2.79)$$

En particulier, si $g(x)$ est approximée par une parabole, alors :

$$\eta_Y = E\{g(X)\} \cong g(\eta) + g''(\eta) \frac{\sigma^2}{2} \quad (2.80)$$

Et si elle est approximée par une droite, alors $\eta_Y \cong g(\eta)$. Cela montre que la pente de $g(x)$ n'a aucun effet sur η_Y ; cependant, comme nous le montrons ensuite, cela affecte la variance σ_Y^2 ; de Y .

b) La variance : Nous retenons que l'estimation du premier ordre de σ_Y^2 est donnée par :

$$\sigma_Y^2 \cong |g'(\eta)|^2 \sigma^2 \quad (2.81)$$

Exemple 2.23 : Une tension $E = 120 \text{ V}$ est branchée aux bornes d'une résistance dont la valeur est une variable aléatoire r uniforme entre 900 et 1100 Ω . En utilisant (2.79) et (2.80), nous allons estimer la moyenne et la variance du courant résultant : $I=E/r$

Clairement, $E(r) = \eta = 10^3$, $\sigma^2 = \frac{100^3}{3}$ avec $g(r) = E/r$, on a :

$$g(\eta) = 0.12 \quad g'(\eta) = -12 \times 10^{-5} \quad g''(\eta) = 24 \times 10^{-5}$$

Donc,

$$E\{i\} \cong 0.12 + 0.0004A \quad \sigma_i^2 \cong 48 \times 10^{-6} A^2$$

2.5.6. Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire est par définition l'intégrale :

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{j\omega x} dx \quad (2.82)$$

Cette fonction est maximale à l'origine car $f_X(x) \geq 0$.

$$|\Phi_X(\omega)| \leq \Phi_X(0) = 1 \quad (2.83)$$

Si on remplace $j\omega$ par s , l'intégrale résultante est :

$$\Phi_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{sx} dx \quad \Phi_X(j\omega) = \Phi_X(\omega) \quad (2.84)$$

est la fonction génératrice de moment de X .

La fonction suivante :

$$\Psi(\omega) = \ln \Phi_X(\omega) = \Psi(j\omega) \quad (2.85)$$

est la seconde fonction caractéristique de X

On voit clairement que :

$$\Phi_X(\omega) = E\{e^{j\omega x}\} \quad \text{et} \quad \Phi_X(s) = E\{e^{sx}\} \quad (2.86)$$

En effet si $Y = aX + b$ alors $\Phi_Y(\omega) = e^{jb\omega} \Phi_X(a\omega)$

Car $E\{e^{j\omega y}\} = E\{e^{j\omega(ax+b)}\} = e^{jb\omega} E\{e^{ja\omega x}\}$

Exemple 2.24 : La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X suivant une loi $N(\eta, \sigma)$ est égale à :

$$\Phi_X(\omega) = e \left\{ j\eta\omega - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2 \right\} \quad (2.87)$$

Preuve :

La variable aléatoire $Z = (X - \eta)/\sigma$ est une loi $N(0,1)$ et sa fonction caractéristique est égale à :

$$\Phi_Z(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sz} e^{-z^2/2} dz$$

$$\text{Avec ; } sz - \frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2}(z - s)^2 + \frac{s^2}{2}$$

On conclue que :

$$\Phi_Z(s) = e^{s^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-s)^2/2} dz = e^{s^2/2} \quad (2.88)$$

Et puisque $X = \sigma Z + \eta$; (2.87) s'en suit à partir de (2.86) et (2.88) avec $\omega = j\omega$.

- **Formule d'inversion**

Comme on le voit dans (2.82), $\Phi_X(\omega)$ est la transformée de Fourier de $f_X(x)$. Par conséquent, les propriétés des fonctions caractéristiques sont essentiellement les mêmes que les propriétés des transformées de Fourier. Notons en particulier que $f_X(x)$ peut s'exprimer en fonction de $\Phi_X(\omega)$:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_X(\omega) e^{-j\omega x} d\omega \quad (2.89)$$

- **Théorème du moment**

En dérivant (2.84) n fois, on obtient :

$$\Phi^{(n)}(s) = E\{X^n e^{sx}\}$$

Donc ,

$$\Phi^{(n)}(0) = E\{X^n\} = m_n \quad (2.90)$$

Ainsi les dérivées de $\Phi(s)$ à l'origine sont égales aux moments de X . Ceci justifie l'appellation « fonction moment » donnée à $\Phi(s)$. En particulier,

$$\Phi'(0) = m_1 = \eta \quad \Phi''(0) = m_2 = \eta^2 + \sigma^2 \quad (2.91)$$

Remarque :

En développant $\Phi(s)$ en une série proche de l'origine et en utilisant (2.90), on obtient :

$$\Phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} s^n \quad (2.92)$$

Ceci n'est valable que si tous les moments sont finis et que la série converge absolument au voisinage de $s = 0$. Puisque $f_X(x)$ peut être déterminée en fonction de $\Phi(s)$, (2.92) montre que, dans les conditions indiquées, la densité d'une variable aléatoire est déterminée de manière unique si tous ses moments sont connus.

Exemple 2.25 : Nous allons déterminer la fonction des moments et les moments d'une variable aléatoire X qui suit une loi gamma telle que: $f_X(x) = \gamma x^{b-1} e^{-cx} U(x)$ $\gamma = \frac{c^{b+1}}{\Gamma(b+1)}$

De (2.82), il s'en suit que :

$$\Phi(s) = \gamma \int_0^{\infty} x^{b-1} e^{-(c-s)x} dx = \frac{\gamma \Gamma(b)}{(c-s)^b} = \frac{c^b}{(c-s)^b} \quad (2.93)$$

En dérivant par rapport à s et prenant $s=0$, on obtient :

$$\Phi^{(n)}(0) = \frac{b(b+1) \dots (b+n-1)}{c^n} = E\{X^n\}$$

Avec $n = 1$ et $n = 2$, cela donne :

$$E\{X\} = \frac{b}{c} \quad E\{X^2\} = \frac{b(b+1)}{c^2} \quad \sigma^2 = \frac{b}{c^2} \quad (2.94)$$

La densité exponentielle est un cas spécial obtenu avec $b=1$, $c=\lambda$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} U(x) \quad \Phi(s) = \frac{\lambda}{\lambda-s} \quad E\{X\} = \frac{1}{\lambda} \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.95)$$

Exemple 2.26 : Densité Chi carrée : En prenant $b = m/2$ et $c = 1/2$ dans (2.93), on obtient la fonction du moment de la densité du chi carré $\chi^2(m)$:

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{(1-2s)^m}} \quad E\{X\} = m \quad \sigma^2 = 2m \quad (2.96)$$

2.5.7. Les cumulants

Les cumulants λ_n de la variable aléatoire X sont par définition les dérivées de sa seconde fonction de moment $\Psi(s)$:

$$\frac{d^n \Psi(0)}{ds^n} = \lambda_n \quad (2.97)$$

De (2.85), on voit clairement que $\Psi(0) = \lambda_0 = 0$.

$$\text{Donc : } \Psi(s) = \lambda_1 s + \frac{1}{2} \lambda_2 s^2 + \dots + \frac{1}{n!} \lambda_n s^n + \dots$$

On retient :

$$\lambda_1 = \eta \quad \lambda_2 = \sigma^2 \quad (2.98)$$

Preuve :

$$\text{Puisque, } \Phi = e^\Psi, \text{ on conclue que : } \Phi' = \Psi' e^\Psi \quad \Phi'' = [\Psi'' + (\Psi')^2] e^\Psi$$

Avec $s=0$, ceci donne : $\Phi'(0) = \Psi'(0) = m_1$ $\Phi''(0) = \Psi''(0) + (\Psi'(0))^2 = m_2$ et (2.98) est obtenue.

Type discret : Supposons que X soit une variable aléatoire de type discret prenant les valeurs x_i avec une probabilité p_i . Dans ce cas, (2.82) donne :

$$\Phi_X(\omega) = \sum_i p_i e^{j\omega x_i} \quad (2.99)$$

Ainsi $\Phi_X(\omega)$ est une somme d'exponentielles. La fonction moment de x peut être définie comme dans (2.84). Cependant, si X ne prend que des valeurs entières, alors une définition en termes de transformations z est préférable.

2.5.8. Fonction génératrice de moments.

Si X est une variable aléatoire de type treillis prenant des valeurs entières, alors sa fonction génératrice de moment est par définition la somme :

$$r(z) = E\{z^n\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P\{X = n\} z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n z^n \quad (2.100)$$

Ainsi $r(1/z)$ est la transformée en z ordinaire de la séquence $p_n = P\{X = n\}$. Avec $\Phi_X(\omega)$ comme dans (2.99) , ceci donne :

$$\Phi_X(\omega) = r(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n e^{jn\omega}$$

Donc $\Phi_X(\omega)$ est la transformée de Fourier discrète(DFT) de la série $\{p_n\}$, et

$$\Psi(s) = \ln r(e^s) \quad (2.101)$$

Théorème du moment : En dérivant (2.100) k fois, on obtient :

$$r^{(k)}(z) = E\{X(X-1) \dots (X-k+1)z^{x-k}\}$$

Avec $z=1$, ceci donne :

$$r^{(k)}(z) = E\{X(X-1) \dots (X-k+1)\} \quad (2.102)$$

On remarque que $r(1) = 1$ et

$$r'(1) = E\{X\} \quad r''(1) = E\{X^2\} - E\{X\} \quad (2.103)$$

Exemple 2.27

a) Si X prend les valeurs 0 et 1 avec $P\{X = 1\} = p$ et $P\{X = 0\} = q$, alors

$$r(z) = pz + q \quad r'(1) = E\{X\} = p \quad r''(1) = E\{X^2\} - E\{X\} = 0$$

b) Si X suit une loi binomiale $B(m, p)$ donnée par :

$$p_n = P\{X = n\} = \binom{m}{n} p^n q^{m-n} \quad 0 \leq n \leq m$$

Alors

$$r(z) = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} p^n q^{m-n} z^n = (pz + q)^m \quad (2.104)$$

$$\text{et } r'(1) = mp \quad r''(1) = m(m-1)p^2$$

par conséquent :

$$E\{X\} = mp \quad \sigma^2 = mpq \quad (2.105)$$

Exemple 2.28 : Si X suit une loi de poisson de paramètre λ , t.q :

$$P\{X = n\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad n = 0, 1, \dots$$

Alors

$$r(z) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{z^n}{n!} = e^{\lambda(z-1)} \quad (2.106)$$

Dans ce cas (voir (2.101), on a $\Psi(s) = \lambda(e^s - 1)$ $\Psi'(0) = \lambda$ $\Psi''(0) = \lambda$ et (2.98) donne $E\{X\} = \lambda$ $\sigma^2 = \lambda$.

On peut utiliser la méthode de la fonction caractéristique pour établir le théorème de De Moivre-Laplace suivant :

Théorème de De Moivre-Laplace

Soit $X \sim B(n, p)$, alors de (2.100), on obtient la fonction caractéristique de la variable binomiale suivante : $\Phi_X(\omega) = (pe^{j\omega} + q)^n$

Et définissons

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \quad (2.107)$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} \Phi_Y(\omega) &= E\{e^{jY\omega}\} = e^{-np\omega/\sqrt{npq}} \Phi_X\left(\frac{\omega}{\sqrt{npq}}\right) \\ &= e^{-np\omega/\sqrt{npq}} \left(pe^{j\omega/\sqrt{npq}} + q\right)^n \\ &= \left(pe^{j\omega/\sqrt{npq}} + qe^{-jp\omega/\sqrt{npq}}\right)^n \\ &= \left\{p\left(1 + \frac{jq\omega}{\sqrt{npq}} - \frac{q^2\omega^2}{2npq} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{jq\omega}{\sqrt{npq}}\right)^k\right) \right. \\ &\quad \left. + q\left(1 - \frac{jp\omega}{\sqrt{npq}} - \frac{p^2\omega^2}{2npq} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-jp\omega}{\sqrt{npq}}\right)^k\right)\right\}^n \\ &= \left(1 - \frac{\omega^2}{2n} \{1 + \phi(n)\}\right)^n \rightarrow e^{-\omega^2/2} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (2.104) \end{aligned}$$

Puisque $\phi(n) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{j\omega}{\sqrt{n}}\right)^{k-2} \frac{pq^k + q(-p)^k}{(\sqrt{pq})^k} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

En comparant (2.104) avec (2.84), on conclue que lorsque $n \rightarrow \infty$, la variable aléatoire Y tend vers la loi normale centrée, ou de (2.103), X tend vers $N(np, npq)$.

L'exemple suivant est d'intérêt historique, car il a d'abord été proposé et résolu par De Moivre.

Exemple 2.29 : Un événement A se produit dans une série d'essais indépendants avec une probabilité constante p . Si A se produit au moins r fois de suite, nous l'appelons une série de longueur r . Trouvez la probabilité d'obtenir une séquence de longueur r pour A en n essais.

Solution

Soit P_n la probabilité de l'événement X_n qui représente une séquence de longueur r pour A dans n essais. Une série de longueur r dans $n + 1$ essais ne peut se produire que de deux manières mutuellement exclusives : soit il y a une série de longueur r dans les n premiers essais, soit une série de longueur r n'est obtenue que dans les r derniers essais des $n + 1$ essais et pas avant. Ainsi ;

$$X_{n+1} = X_n \cup B_{n+1} \quad (2.105)$$

Où ;

$B_{n+1} = \{\text{Pas de série de longueur } r \text{ pour } A \text{ dans les premiers } n - r \text{ essais}\} \cap \{A \text{ ne se produit pas dans le } (n - r + 1)\text{ème essai}\} \cap \{\text{Série de longueur } r \text{ pour } A \text{ dans les } r \text{ derniers essais}\}$

$$B_{n+1} = \bar{X}_{n-r} \cap \bar{A} \cap \underbrace{A \cap A \cap \dots \cap A}_r$$

2.6. Séquences de variables aléatoires

2.6. 1. Concept général : Un vecteur aléatoire est exprimé par :

$$X = [X_1, \dots, X_n] \quad (2.106)$$

dont les composantes X_i sont des variables aléatoires. La probabilité que X se trouve dans une région D de l'espace à n dimensions est égale aux masses de probabilité dans D :

$$P\{X \in D\} = \int_D f_X(X) dX \quad X = [X_1, \dots, X_n] \quad (2.107)$$

Où ;

$$f_X(X) = f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad (2.108)$$

Est la densité jointe des variables aléatoires X_i et leur fonction de répartition conjointe est donnée par :

$$F_X(X) = F_X(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} \quad (2.109)$$

Si on remplace dans $F_X(x_1, \dots, x_n)$ certaines variables par ∞ , on obtient la fonction de répartition conjointe des variables restantes. Si on intègre $f_X(x_1, \dots, x_n)$ par rapport à certaines variables, on obtient la densité jointe des variables restantes. Par exemple :

$$F_X(x_1, x_3) = F_X(x_1, \infty, x_3, \infty)$$

$$f_X(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 dx_4 \quad (2.110)$$

2.6.2. Transformation d'un vecteur aléatoire

Étant donné k fonctions $g_1(X), \dots, g_k(X)$ avec $X = [X_1, \dots, X_n]$, on forme les variables aléatoires suivantes :

$$Y_1 = g_1(X), \dots, Y_k = g_k(X) \quad (2.111)$$

Les statistiques de ces variables aléatoires peuvent être déterminées en fonction des statistiques de X .

- 1) Si $k < n$, alors nous pourrions d'abord déterminer la densité jointe des n variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_k, X_{k+1}, \dots, X_n$ puis utiliser la généralisation de (2.110) pour éliminer les X .
- 2) Si $k > n$, alors les variables aléatoires Y_{n+1}, \dots, Y_k peuvent être exprimées en termes de Y_1, \dots, Y_n . Dans ce cas, les masses dans l'espace k sont singulières et peuvent être déterminées en fonction de la densité jointe de Y_1, \dots, Y_n . Il suffit donc de supposer que $k = n$. Pour trouver la densité $f_Y(y_1, \dots, y_n)$ du vecteur aléatoire $[Y_1, \dots, Y_n]$, pour un ensemble spécifique de nombres y_1, \dots, y_n on résout le système suivant :

$$g_1(X) = y_1, \dots, g_n(X) = y_n \quad (2.112)$$

Si ce système n'a pas de solution, alors $f_Y(y_1, \dots, y_n) = 0$. S'il a une solution unique

$X = [x_1, \dots, x_n]$, alors on a :

$$f_Y(y_1, \dots, y_n) = \frac{f_X(x_1, \dots, x_n)}{|J(x_1, \dots, x_n)|} \quad (2.113)$$

Où ;

$$J(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (2.114)$$

est le jacobéen de la transformation (2.112) .S'il a plusieurs solutions, alors on ajoute les termes correspondants.

2.6.3. L'indépendance

Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont dites (mutuellement) indépendantes si les événements $\{X_1 \leq x_1\}, \dots, \{X_n \leq x_n\}$ sont indépendants. Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} F_X(x_1, \dots, x_n) &= F_X(x_1) \times F_X(x_2) \times \dots \times F_X(x_n) \\ f_X(x_1, \dots, x_n) &= f_X(x_1) \times f_X(x_2) \times \dots \times f_X(x_n) \end{aligned} \quad (2.115)$$

Exemple 2.30 : Étant donné n variables aléatoires indépendantes X_i de densités respectives $f_{X_i}(x_i)$, on forme les variables aléatoires t .q :

$$Y_i = X_1 + \dots + X_k \quad k = 1, \dots, n$$

Nous déterminerons la densité jointe de X_k . Le système

$$x_1 = y_1, x_1 + x_2 = y_2, \dots, x_1 + \dots + x_n = y_n$$

a une solution unique $x_k = y_k - y_{k-1}$ $1 \leq k \leq n$ et son jacobien est égal à 1. D'où [voir(2.113) et (2.115) .

$$f_Y(y_1, \dots, y_n) = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2 - y_1) \dots f_{Y_n}(y_n - y_{n-1}) \quad (2.116)$$

De (2.115), il s'ensuit que tout sous-ensemble de l'ensemble X_i est un ensemble de variables aléatoires indépendantes. Supposons, par exemple que, $f_X(x_1, x_2, x_3) = f_X(x_1)f_X(x_2) f_X(x_3)$. En intégrant par rapport à x_3 , on obtient $f_X(x_1, x_2) = f_X(x_1)f_X(x_2)$.

Ceci montre que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. Attention, cependant, si les variables aléatoires X_i sont indépendantes deux à deux, elles ne sont pas nécessairement indépendantes. Par exemple, il est possible que :

$$f_X(x_1, x_2) = f_X(x_1)f_X(x_2) \quad , \quad f_X(x_1, x_3) = f_X(x_1)f_X(x_3) \text{ et } f_X(x_2, x_3) = f_X(x_2)f_X(x_3) \text{ mais } \\ f_X(x_1, x_2, x_3) \neq f_X(x_1)f_X(x_2)f_X(x_3)$$

On peut montrer que si les variables aléatoires X_i sont indépendantes, alors $Y_1 = g_1(X_1), \dots, Y_n = g_n(X_n)$ sont aussi indépendantes.

2.6.4. Expériences indépendantes et essais répétés.

Supposons que, $S^n = S_1 \times \dots \times S_n$ est une expérience combinée et les variables aléatoires X_i ne dépendent que des résultats ξ_i de S_i tel que :

$$X_i(\xi_1 \dots \xi_i \dots \xi_n) = X_i(\xi_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.117)$$

Si les expériences S_i sont indépendantes, alors les variables aléatoires X_i sont indépendantes. Le cas particulier suivant est intéressant :

Supposons que, X est une variable aléatoire définie sur une expérience S qui est effectuée n fois générant l'expérience :

$S^n = S_1 \times \dots \times S_n$. Dans cette dernière, on définit les variables aléatoires X_i selon (2.117). Il s'ensuit que la fonction de répartition $F_{X_i}(x_i)$ de X_i est égale à la fonction de répartition $F_X(x)$ de la variable aléatoire X . Ainsi, si une expérience est effectuée n fois, les variables aléatoires X_i définies comme en (2.117) sont indépendantes et ont la même fonction $F_X(x)$. Ces variables aléatoires sont appelées i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées).

Exemple 31 : (statistiques d'ordre)

Les statistiques d'ordre des variables aléatoires X_i ; sont n variables aléatoires Y_k définies comme suit : Pour un résultat spécifique ξ , les variables aléatoires X_i prennent les valeurs $X_i(\xi_i)$. En ordonnant ces nombres, on obtient la séquence $X_{r1}(\xi) \leq \dots \leq X_{rk}(\xi) \leq \dots \leq X_{rn}(\xi)$ et on définit la variable aléatoire Y_k telle que :

$$Y_1(\xi) = X_{r1}(\xi) \leq \dots \leq Y_k(\xi) = X_{rk}(\xi) \leq \dots \leq Y_n(\xi) = X_{rn}(\xi) \quad (2.118)$$

On note que, pour un i spécifique, les valeurs $X_i(\xi)$ de X_i occupent des emplacements différents dans l'ordre ci-dessus selon les changements de ξ . Nous retiendrons que la densité $f_{Y_k}(y_k)$ de la k^{eme} statistique Y_k est donnée par :

$$f_{Y_k}(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F_X^{k-1}(y) [1 - F_X(y)]^{n-k} f_X(y) \quad (2.119)$$

Où, $F_X(x)$ est la fonction de répartition des variables aléatoires X_i (i.i.d) et $f_X(x)$ est leur densité de probabilité. Pour Prouver cela (voir [1]).

Cas particulier. Si les variables aléatoires X_i sont exponentielles avec le paramètre λ telle que $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} U(x)$ $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) U(x)$, alors $f_{Y_1}(y) = n\lambda e^{-n\lambda y} U(y)$.

c'est-à-dire que leur minimum Y_1 est également exponentiel avec le paramètre $n\lambda$.

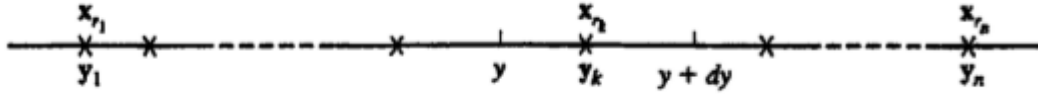


Figure 2.27 : statistiques d'ordre des variables aléatoires X_i

Exemple 2.32 : Un système est constitué de m composants et le temps de défaillance du i ème composant est une variable aléatoire X_i de distribution $F_{X_i}(x)$. Ainsi, $1 - F_{X_i}(t) = P\{X_i > t\}$

est la probabilité que le i ème composant soit bon au temps t . On note que $n(t)$ est le nombre de composants qui sont bons à l'instant t . Clairement, $n(t) = n_1 + \dots + n_m$

$$\text{Où } n_i = \begin{cases} 1 & X_i > t \\ 0 & X_i < t \end{cases} \quad E\{n_i\} = 1 - F_{X_i}(t)$$

Donc la moyenne $E\{n(t)\} = n(t)$ est donnée par : $n(t) = 1 - F_{X_1}(t) + \dots + 1 - F_{X_m}(t)$

On supposera que les variables aléatoires X_i ont la même distribution $F(t)$. Dans ce cas, on a :

$$n(t) = m[1 - F(t)]$$

Taux d'échec : La différence $n(t) - n(t + dt)$ est le nombre d'échecs attendu dans l'intervalle $(t, t + dt)$. La dérivée $-n'(t) = mf(t)$ de $-n(t)$ est le taux de défaillance. Le rapport

$$\beta(t) = -\frac{n'(t)}{n(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (2.120)$$

est appelé le taux de chute relatif attendu. La fonction $\beta(t)$ peut également être interprétée comme le taux de défaillance conditionnelle de chaque composant du système. En supposant que le système est mis en service à $t = 0$, nous avons $n(0) = m$; donc $\eta(0) = E\{n(0)\} = m$.

En résolvant (2.120) pour $\eta(t)$, on obtient :

$$\eta(t) = m \cdot \exp\left\{-\int_0^t \beta(\tau) d\tau\right\} \quad (2.121)$$

Exemple 2.33 : Nous mesurons un objet de longueur η avec n instruments de précisions variables. Les résultats des mesures sont n variables aléatoires avec : $X_i = \eta + v_i$, $E\{v_i\} = 0$ et $E\{v_i^2\} = \sigma_i^2$

où v_i sont les erreurs de mesure que nous supposons indépendantes avec une moyenne nulle. Nous déterminerons l'estimation linéaire sans biais, à variance minimale, de η . Cela signifie ce qui suit : Nous souhaitons trouver n constantes α_i telle que la somme $\hat{\eta} = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$ soit une variable aléatoire avec une moyenne $E\{\hat{\eta}\} = \alpha_1 E\{X_1\} + \dots + \alpha_n E\{X_n\} = \eta$ et une variance $V = \alpha_1^2 \sigma_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_n^2$ minimale. Donc notre problème est de minimiser la somme précédente sous la contrainte suivante :

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1 \quad (2.122)$$

Pour résoudre ce problème, on remarque que $V = \alpha_1^2 \sigma_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_n^2 - \lambda(\alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1)$ pour tout λ (multiplicateur de Lagrange).

Donc V est minimale si $\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i \sigma_i^2 - \lambda = 0$ alors $\alpha_i = \frac{\lambda}{2\sigma_i^2}$

En insérant dans (2.122) et résolvant pour λ , on obtient ,

$$\frac{\lambda}{2} = V = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_n^2}} \quad \text{donc} \quad \hat{\eta} = \frac{\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{x_n}{\sigma_n^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_n^2}} \quad (2.123)$$

Illustration : La tension E d'un générateur est mesurée trois fois. Nous listons ici les résultats x_i des mesures, les écarts types σ_i ; des erreurs de mesure, et l'estimation \hat{E} de E obtenue à partir de (2.123):

$$x_i = 98.6, 98.8, 98.9 \quad \sigma_i = 0.20, 0.25, 0.28$$

$$\hat{E} = \frac{x_1/\sigma_1^2 + x_2/\sigma_2^2 + x_3/\sigma_3^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2 + 1/\sigma_3^2} = 98.73$$

2.6.5. Indépendance du groupe

On dit que le groupe G_X des variables aléatoires X_1, \dots, X_n est indépendant du groupe G_Y des variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n si :

$$f_{XY}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = f_X(x_1, \dots, x_n) f_Y(y_1, \dots, y_n) \quad (2.124)$$

Par intégration convenable, on conclut de (2.124) que tout sous-groupe de G_X est indépendant de tout sous-groupe de G_Y . En particulier, les variables aléatoires X_i et Y_i sont indépendantes pour tout i et j .

Supposons que S est une expérience combinée $S_1 \times S_2$, les variables aléatoires X_i ne dépendent que des issues de S_1 et les variables aléatoires Y_i ne dépendent que des issues de S_2 . Si les expériences S_1 et S_2 sont indépendantes, alors les groupes G_X et G_Y sont indépendants.

Notons enfin que si les variables aléatoires Z_m ne dépendent que des variables aléatoires X_i de G_X et les variables aléatoires W_r ne dépendent que des variables aléatoires Y_i de G_Y , alors les groupes G_Z et G_W sont indépendants.

2.6.6. Variables aléatoires complexes

Les statistiques de la variable aléatoire $Z_1 = X_1 + jY_1, \dots, Z_n = X_n + jY_n$ sont déterminées en fonction de la densité jointe $f_{XY}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ des $2n$ variables aléatoires X_i et Y_i . On dit que les variables aléatoires complexes Z_i sont indépendantes si

$$f_{XY}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = f_{XY}(x_1, y_1) \dots f_{XY}(x_n, y_n) \quad (2.125)$$

2.6.7. Moyenne et covariance

La moyenne de $g(X_1, \dots, X_n)$ est donnée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (2.126)$$

Si les variables aléatoires $Z_i = X_i + jY_i$ sont complexes, alors la moyenne de $g(Z_1, \dots, Z_n)$ est donnée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(z_1, \dots, z_n) f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) dx_1 \dots dy_n$$

A partir de ceci, il s'en suit que (linéarité) :

$$E\{a_1 g_1(X) + \dots + a_m g_m(X)\} = a_1 E\{g_1(X)\} + \dots + a_m E\{g_m(X)\}$$

pour tout vecteur aléatoire X réel ou complexe.

2.6.8. Matrices de corrélation et de covariance

a) La covariance

La matrice de C_{ij} de deux variables aléatoires complexes X_i et X_j est définie par :

$$C_{ij} = E\{(X_i - \eta_i)(X_j^* - \eta_j^*)\} = E\{X_i X_j^*\} - E\{X_i\}E\{X_j^*\} \quad (2.127)$$

et la variance de X_i est donnée par :

$$\sigma_i^2 = C_{ii} = E\{|X_i - \eta_i|^2\} = E\{|X_i|^2\} - |E\{X_i\}|^2 \quad (2.128)$$

Les variables aléatoires X_i sont dites (mutuellement) un-corrélées si $C_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.

Dans ce cas, si

$$X = X_1 + \dots + X_n \quad \text{alors} \quad \sigma_i^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2 \quad (2.129)$$

Exemple 2.34 :

Les variables aléatoires $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ et $\bar{V} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$ sont par définition la moyenne et la variance de l'échantillon de X_i respectivement. Nous allons le montrer, si les variables aléatoires X_i sont un-corrélées avec la même moyenne $E\{X_i\} = \eta$ et la variance $\sigma_i^2 = \sigma^2$ alors

$$E\{\bar{X}\} = \eta \quad \sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2/n \quad (2.130)$$

Et

$$E\{\bar{V}\} = \sigma^2 \quad (2.131)$$

Preuve : La première équation de (2.130) découle de la linéarité des valeurs espérées et la seconde de (2.131) :

$$E\{\bar{X}\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\{x_i\} = \eta \quad \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \sigma^2/n$$

pour prouver (2.131), on observe que :

$$\begin{aligned} E\{(X_i - \eta)(\bar{X} - \eta)\} &= \frac{1}{n} E\{(X_i - \eta)[(X_1 - \eta) + \dots + (X_n - \eta)]\} \\ &= \frac{1}{n} E\{(X_i - \eta)(X_i - \eta)\} = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Car les variables aléatoires X_i et X_j sont un-corrélées par hypothèse. Donc ;

$$E\{(X_i - \bar{X})^2\} = E\{[(X_i - \eta) - (\bar{X} - \eta)]^2\} = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - 2 \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

et (2.131) est obtenue.

Si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n , sont indépendantes, elles ne sont pas non plus corrélées.

Si les variables aléatoires $Z_1 = X_1 + jY_1$ et $Z_2 = X_2 + jY_2$ sont indépendantes, alors $f_{XY}(x_1, x_2, y_1, y_2) = f_X(x_1, x_2)f_Y(y_1, y_2)$. D'où

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} z_1 z_2^* f_{XY}(x_1, x_2, y_1, y_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z_1 f_{XY}(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z_2^* f_{XY}(x_2, y_2) dx_2 dy_2 \end{aligned} \quad (2.132)$$

Cela donne $E\{Z_1 Z_2^*\} = E\{Z_1\}E\{Z_2^*\}$ donc, Z_1 et Z_2 ne sont pas corrélées. Notons enfin que si les variables aléatoires X_i sont indépendantes, alors :

$$E\{g_1(X_1) \dots g_n(X_n)\} = E\{g_1(X_1)\} \dots E\{g_n(X_n)\} \quad (2.133)$$

De la même façon, si les groupes X_1, \dots, X_n et Y_1, \dots, Y_k sont indépendantes, alors :

$$E\{g(X_1, \dots, X_n)h(Y_1, \dots, Y_k)\} = E\{g(X_1, \dots, X_n)\}E\{h(Y_1, \dots, Y_k)\}$$

b) La matrice de corrélation

$$\text{On introduit les matrices } R_n = \begin{bmatrix} R_{11} & \dots & R_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \quad C_n = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{Où ; } R_{ij} = E\{X_i X_j^*\} = R_{ji}^* \quad C_{ij} = R_{ij} - \eta_i \eta_j^* = C_{ji}^*$$

La première est la matrice de corrélation du vecteur aléatoire $X = [X_1, \dots, X_n]$ et la seconde sa matrice de covariance. Clairement, on a : $R_n = E\{X^T X^*\}$.

Où, X^T est la transposée de X (vecteur colonne). Nous discuterons des propriétés de la matrice R_n et de son déterminant Δ_n . Les propriétés de C_n sont similaires car elle représente la matrice de corrélation des variables aléatoires « centrées » $X_i - \eta_i$.

Théorème : La matrice R_n est définie non négative. Cela signifie que :

$$Q = \sum_{i,j} a_i a_j^* R_{ij} = A R_n A^t \geq 0 \quad (2.134)$$

Où ; A^t est le transposé du conjugué complexe du vecteur $A = [a_1, \dots, a_n]$.

Preuve : Il découle facilement de la linéarité des valeurs espérées.

$$E\{|a_1 X_1 + \dots + a_n X_n|^2\} = \sum_{i,j} a_i a_j^* E\{X_i X_j^*\} \quad (2.135)$$

Si $Q > 0$ pour tout $A \neq 0$ (2.134), alors R_n est appelée « définie positive ». La différence entre $Q \geq 0$ et $Q > 0$ est liée à la notion de dépendance linéaire.

c) **Définition :** Les variables aléatoires X_i sont dites linéairement indépendantes si :

$$E\{|a_1 X_1 + \dots + a_n X_n|^2\} > 0 \quad (2.136)$$

pour tout $A \neq 0$. Dans ce cas [voir ((2.135))], leur matrice de corrélation R_n est définie positive.

Les variables aléatoires X_i sont dites linéairement dépendantes si

$$a_1 X_1 + \dots + a_n X_n = 0 \quad (2.137)$$

pour certains $A \neq 0$. Dans ce cas, le Q correspondant vaut 0 et la matrice R_n est singulière [voir aussi (2.138)]. De la définition, il s'en suit que, si les variables aléatoires X_i sont linéairement indépendantes, alors tout sous-ensemble est également linéairement indépendant.

d) Le déterminant de la corrélation

Le déterminant Δ_n est réel car $R_{ij} = R_{ji}^*$. Nous allons montrer qu'il est aussi non négatif

$$\Delta_n \geq 0 \quad (2.138)$$

avec égalité si et seulement si les variables aléatoires X_i sont linéairement dépendantes. L'inégalité familière $\Delta_n = R_{11}R_{22} - R_{12}^2 \geq 0$ est un cas particulier [voir (6-169)]. Supposons d'abord que les variables aléatoires X_i soient linéairement indépendantes.

Nous retenons que, dans ce cas, le déterminant Δ_n et tous ses principaux mineurs sont positifs

$$\Delta_k > 0 \quad k \leq n \quad (2.139)$$

2.7. Conclusion

Dans ce chapitre on a introduit les concepts essentiels des modèles probabilistes afin d'aborder l'inférence statistique : définition d'un événement aléatoire, des probabilités discrètes ou continues, et de la notion d'indépendance en probabilités. Après avoir défini la notion de variable aléatoire, celles de lois les plus utilisées sont décrites : discrètes de Bernoulli, binomiales, géométrique, de Poisson ; continues uniforme, exponentielle, Gamma, normale, du chi-deux. Espérance et variance d'une variable aléatoires sont définies, avant de signaler le théorème de central limite qui nous donne de façon informelle une estimation précise de l'erreur que l'on commet en approchant l'espérance mathématique par la moyenne arithmétique.