CHAPITRE 1

NOTIONS DE CORRELATION ET DE CONVOLUTION

1.1.Introduction

La convolution et la corrélation sont deux concepts abondement utilisés en traitement des signaux. Dans ce chapitre, on se propose d'aborder les notions de corrélation et de convolution afin de bien les appréhender et les différencier. La transformée de Fourier nous permet d'appliquer ces operateurs de façon assez simple.

1.2. Rappels sur les systèmes linéaires

1.2.1. Définitions

- **Signal** : c'est la valeur d'une grandeur physique ou abstraite qui peut varier en fonction d'un certain paramètre (temps, distance,…,ect).

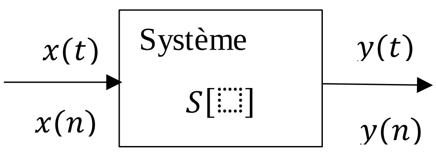
Exemple 1.1: La tension aux bornes d'une résistance en fonction du temps $v(t)$ tel que t est une variable indépendante alors que v est dépendante. Le domaine de définition de ces deux variables peut être un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Si les variables prennent des valeurs dans $\mathbb{R}$, il en résulte des signaux continus(analogiques notés $x(t)$)
- Si les variables sont des suites de nombres alors on a des signaux discrets (numériques notés $x(n)$).

Les signaux sont caractérisés par l'énergie, la corrélation, la densité spectrale, la convolution,…,

- **Système :** c'est un dispositif qui à tout signal d'entrée $x(t)$ associe un signal de sortie $y(t)$ tel que :

$$y(t) = S[x(t)] \tag{1.1}$$



$S[\ \ ]$: Opérateur qui modélise le signal.

Figure 1.1 : Système linéaire de modélisation d'un signal

1.2.2. Propriétés d'un système

- **Linéarité**

Un système analogique est dit linéaire s'il vérifie la propriété suivante :

$$S[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1S[x_1(t)] + a_2S[x_2(t)] = a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \quad (1.2)$$

Avec a_1 et a_2 des constantes. Cette relation peut se généraliser pour un système à N entrées et devient :

$$S[\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)] = \sum_{i=1}^{N} a_i\, S[x_i(t)] \quad (1.3)$$

a_i : sont des constantes.

- **Réponse impulsionnelle d'un système**

  Un signal analogique quelconque peut s'écrire comme suit :

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)x(t-u)du \quad (1.4)$$

Avec l'opérateur «* » indiquant le produit de convolution

En substituant (1.4) dans (1.2) on obtient :

$$y(t) = S[x(t)] = S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)S[\delta(t-\tau)]d\tau \quad (1.5)$$

Posons :

- pour un signal analogique $h(t,\tau) = S[\delta(t-\tau)]$
- pour un signal discret $h(n,k) = S[\delta(n-k)]$ (1.6)

C'est la réponse impulsionnelle du système qui consiste à la réponse du système à l'impulsion de Dirac $\delta(t)$).

- **Causalité**

Un système est dit **causal** si l'effet ne peut précéder la cause. La sortie $y(n)$ en $n = n_0$ dépend seulement des valeurs de l'entrée en $n \leq n_0$. La sortie du système ne dépend que du passé.

- **Stabilité**

Un système est dit **stable** si et seulement si la réponse $y(t)$ à toute entrée bornée (t) , est bornée. C'est-à-dire $x(t)$ borné $\Longrightarrow y(t)$ borné.

- **L'invariance dans le temps**

Un système est dit invariant dans le temps(IT) si et seulement si :

$$y(t) = S[x(t)] = S[x(t - \tau)] \qquad (1.7)$$

Théorème 1 : Si le système est invariant dans le temps(IT) on a :

$$h(t - \tau) = S[\delta(t - \tau)] = h(t) \quad \text{Cas continu.}$$

$$h(n - k) = S[\delta(n - k)] = h(n) \quad \text{Cas discret.}$$

Le système est complètement défini par $h(t)$ (($h(n)$ dans le cas discret) avec :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n - k) = x(n) * h(n) \qquad (1.8)$$

Un système IT initialement au repos est un système qui effectue l'opération de convolution du signal d'entrée par la réponse impulsionnelle (RI) du système $h(t)$.

Théorème 2 : Un système linéaire IT est causal $\Leftrightarrow h(n) = 0, n < 0$(avant l'impulsion rien n'est à l'entrée $\Longrightarrow$ on ne doit avoir rien à la sortie).

Théorème 3 : Un système linéaire IT est stable si et seulement si :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty \Longrightarrow \lim_{k \to \infty} |h(k)| = 0 \qquad (1.9)$$

- **Quelques exemples de systèmes**

	linéaire	causal	invariant
$y(t) = x^2(t)$	non	oui	oui
$y(t) = \sin(x(t))$	non	oui	oui
$y(t) = m(t)x(t)$	oui	oui	non
$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\theta)x(\theta)d\theta$	oui	non	non
$y(t) = \frac{1}{2\alpha}\int_{t-\alpha}^{t+\alpha} x(\theta)d\theta$	oui	non	non

Exemple 1.2 :

Étant donnée $h(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

Ce système est causal. Est-il stable ?

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a^k| = \begin{cases} \dfrac{1}{1-|a|} & si\ |a| < 1 \qquad systéme\ stable \\ \longrightarrow +\infty & si\ |a| \geq 1 \qquad systéme\ instable \end{cases}$$

1.2.3. Filtres dynamiques

De nombreux systèmes électriques et mécaniques sont décrits par **des équations différentielles linéaires à coefficients réels constants** dont les filtres dynamiques font partie.

Par exemple un circuit RC est décrit par :

$$y' + ay = x \tag{1.10}$$

Où ; $a = \frac{1}{RC}$.

Cette équation introduit un filtre linéaire de fonction de transfert (en transformée en z) suivante :

$$H(z) = \frac{1}{z+a} \tag{1.11}$$

D'une manière générale, une fonction de transfert peut être un simple polynôme ou une fraction de deux polynômes exprimée comme suit :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{1.12}$$

Cette fonction correspond à l'équation différentielle ci-dessous :

$$a_0 y(t) + a_1 y^{(1)}(t) + \cdots + a_n y^{(n)}(t) = b_0 x(t) + b_1 x^{(1)}(t) + \cdots + b_m x^{(m)}(t) \tag{1.13}$$

Un filtre dynamique possède une fonction de transfert sous forme d'une fraction rationnelle dont tous les pôles sont à gauche de l'axe imaginaire. On dit qu'un filtre est dynamique s'il est rationnel et de plus causal. Pour qu'il soit stable, il faut que les pôles de $H(z)$ soient à l'intérieur du cercle unité.

1.3. Notions de corrélation et de convolution

1.3.1. La convolution

En traitement du signal, la convolution est l'outil permettant de calculer la sortie d'un système. En effet, pour un signal d'entrée $x(t)$ soumis à un système de fonction transfert $g(t)$, la sortie sera la convolution des deux fonctions $y(t) = x(t) * g(t)$.

a) Définition

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux fonction de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on appelle produit de convolution de $x(t)$ par $y(t)$, s'il existe, la fonction $z(t)$ définie par :

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = x(t) * y(t) \qquad (1.14)$$

Le symbole «* » représente le produit de convolution.

b) Propriétés de la convolution

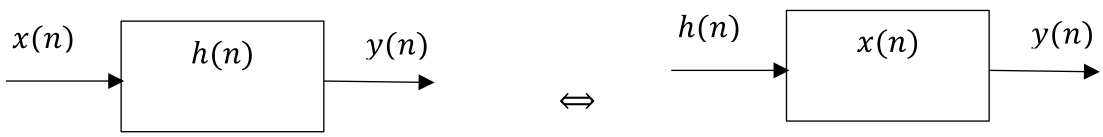
- La convolution est commutative

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$
$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \qquad (1.15)$$

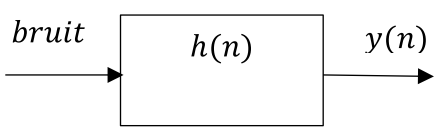
- Transformée de Fourier

$$TF\{x(t) * y(t)\} = TF\{x(t)\}.TF\{y(t)\} = X(f).Y(f) \qquad (1.16)$$

Application :



On veut générer physiquement un signal $y(n)$ à partir d'une source de bruit.



- La convolution est distributive $\Leftrightarrow$ **elle est linéaire.**

Cas continu $\quad (x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$

$$x(t) * [y(t) + z(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * z(t) \qquad (1.17)$$

Cas discret $\quad h(n) * [y(n) + z(n)] = h(n) * y(n) + h(n) * z(n)$

1.3.2. La corrélation

Nous sommes souvent amenés à rapprocher l’allure des variations de certaines grandeurs. Ces grandeurs peuvent être liées par des liaisons. Si nous cherchons une liaison entre les observations $x_1, x_2, \dots, x_n$ d’une grandeur physique X et les observations $y_1, y_2, \dots, y_n$ d’une grandeur physique Y alors on peut définir entre X et Y une certaine fonction de corrélation. Elle exprime l’influence d’un signal sur un autre. Elle permet d’étudier la ressemblance entre deux signaux. On distingue deux opérations qui sont :

a) La fonction d’autocorrélation

Elle consiste à comparer un signal $\begin{pmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{pmatrix}$ avec lui-même durant un intervalle de temps ou l’un est la valeur décalée de l’autre.

La fonction d’autocorrélation $R_{XX}(\tau)$ d’un signal à énergie finie $x(t)$ est la fonction réelle ou complexe définie par :

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt \quad x(t)\epsilon\mathbb{C} \tag{1.18}$$

Cette fonction caractérise la dépendance entre $x(t)$ et sa version retardée et possède les propriétés suivantes :

- **Lien avec la convolution :**

  Posons $\quad z(t) = x^*(-t) \Longrightarrow z(\tau - t) = x^*(t-\tau)$

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)z(\tau - t)dt = x(\tau) * z(\tau) \quad z(\tau) = x^*(-\tau)$$

$$R_{XX}(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau) \tag{1.19}$$

- **Limitation :** Inégalité de Shwarz

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt \int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|^2dt \tag{1.20}$$

$f(t)$ et $g(t)$ sont des signaux à énergie finie.

$$|R_{XX}(\tau)|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt \,.\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t-\tau)|^2dt = E_X.E_X$$

$$|R_{XX}(\tau)|^2 \leq E_X^2 \quad \Longrightarrow \quad |R_{XX}(\tau)| \leq E_X \tag{1.21}$$

L'équation (1.23) montre que l'autocorrélation est bornée par l'énergie E_X du signal.

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt \quad \Longrightarrow \quad R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$R_{XX}(0) = E_X \tag{1.22}$$

$R_{XX}(\tau)$ est maximale à l'origine ($\tau = 0$. Le coefficient d'autocorrélation est exprimé par :

$$\rho_{XX}(\tau) = \frac{R_{XX}(\tau)}{R_{XX}(0)} \quad \Longrightarrow |\rho_{XX}(\tau)| \leq 1 \tag{1.23}$$

Si $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(0)$ alors $\rho_{XX}(\tau)$ est maximal et vaut 1.

- **Parité :**

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau) \quad \text{si} \quad x(t) \in \mathbb{R} \tag{1.24}$$

La fonction d'autocorrélation est paire, lorsque le signal est réel.

b) La fonction d'inter-corrélation

La fonction d'inter-corrélation $R_{XY}(\tau)$ de deux signaux à énergie finie $x(t)$ et $y(t)$ est la fonction réelle ou complexe définie par :

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt \qquad x(t), y(t) \in \mathbb{C} \tag{1.25}$$

C'est une fonction continue qui caractérise la dépendance entre les signaux $x(t)$ et y(t). Par analogie avec $R_{XX}(\tau)$, on peut citer quelques propriétés de $R_{XY}(\tau)$ comme suit :

- **Lien avec la convolution :**

$$R_{XY}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

$$R_{YX}(\tau) = y(\tau) * x^*(-\tau)$$

(1.26)

- **Parité :**

$$R_{XY}(\tau) = {R_{YX}}^*(-\tau)$$

$$\text{Si} \quad x(t) \quad \text{et} \quad y(t) \in \mathbb{R} \qquad R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \tag{1.27}$$

Dans les deux cas cette fonction n'est ni paire, ni impaire.

- **Limitation :**

$$|R_{XY}(\tau)|^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \,.\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t-\tau)|^2 dt = E_X.E_Y$$

$$|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_{XX}(0)R_{YY}(0) \qquad (1.28)$$

La fonction $R_{XY}(\tau)$ est bornée, sa valeur maximale est $\sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$ et $R_{XY}(0)$ n'est pas nécessairement à l'origine (dépend de l'application) et ça sera même chose pour $R_{YX}(\tau)$.

Le coefficient d'inter-corrélation est exprimé par :

$$\rho_{XX}(\tau) = \frac{R_{XY}(\tau)}{\sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}}$$

$$\Rightarrow |\rho_{XX}(\tau)| \leq 1 \qquad (1.29)$$

Pour les **Signaux à puissance moyenne finie,** nous adoptons la formulation suivante :

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)x^*(t-\tau)dt \qquad (1.30)$$

Si $(t) \in \mathbb{R}$, alors $R_{XX}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)\, x(t-\tau)dt$

Si $\tau = 0$, on obtient :

$$R_{XX}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |x(t)|^2\, dt = P_{moy} \qquad (1.31)$$

Parité :

$$R_{XX}(\tau) = {R_{XX}}^*(-\tau)$$

si $x(t) \in \mathbb{R}$ $\quad R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$ cette fonction est paire.

- **Limitation :**

$$|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0) = P_{moy} \qquad (1.32)$$

1.4. Application fondamentale des méthodes de corrélation

1.4.1. Identification des processus et détection des signaux noyés dans le bruit

L'une des applications de la corrélation est la détection par radar d'une cible : on désire détecter la présence ou non d'un avion puis connaitre la distance à laquelle il se trouve.

Principe du radar : Il envoie un signal $x(t)$ et capte en retour l'écho $y(t)$ renvoyé par l'avion.

- S'il n'y a pas d'avion dans la zone couverte $y(t)$ est un bruit seulement.
- Présence d'avion : $y(t)$ est une version retardée, atténuée et fortement bruitée du signal émis $x(t)$.

$$y(t) = Ax(t - t_d) + n(t) \tag{1.33}$$

Où ;

A : Atténuation qui dépend de la distance et de la forme d'avion.

t_d : le temps mis par l'onde pour faire son aller et son retour.

$n(t)$: bruit capté par l'antenne et généré par l'électronique du radar.

Pour détecter le signal noyé dans le bruit on calcule l'inter-corrélation entre le signal d'entrée (signal émis par le radar) et le signal à reconnaitre ($x(t)$ contenu dans $y(t)$) .

Si $e(t) = x(t) + b(t)$

$$R_{ex}(\tau) = e(\tau) * x^*(-\tau) \Longrightarrow R_{ex}(\tau) = [x(\tau) + b(\tau)] * x^*(-\tau)$$

$$= x(\tau) * x^*(-\tau) + b(\tau) * x^*(-\tau)$$

$$R_{ex}(\tau) = R_{xx}(\tau) + R_{bx}(\tau)$$

$$R_{ex}(0) = R_{xx}(0) + R_{bx}(0) \tag{1.34}$$

L'inter corrélation à l'origine est maximale et égale à E_x, si $R_{bx}(0) = 0 \Longrightarrow x(t)$ et $b(t)$ sont décorrélés. Cela est vrai si le bruit est blanc et indépendant du signal.

1.4.2. Analyse spectrale

1.4.2.1. Transformée de Fourier

Puisque l'autocorrélation $R_{XX}(\tau)$ est une fonction bornée donc elle admet toujours une transformée de Fourier(TF) donnée par :

$$S_{XX}(f) = TF[R_{XX}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau$$

$$TF[R_{XX}(\tau)] = TF\big(x(\tau)\big).TF\big(x^*(-\tau)\big) = |X(f)|^2 \qquad (1.35)$$

On définit la fonction **d'inter-corrélation**, pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à puissance moyenne finie par :

$$R_{XY}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)y^*(t-\tau)dt \qquad (1.36)$$

$R_{XY}(\tau) = {R_{YX}}^*(-\tau)$ et si $x(t)$ et $y(t) \in \mathbb{R}$, on aura $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$ qui est ni paire ni impaire.

1.4.2.2. Densités spectrales

a) **Signaux à énergie finie :** La densité spectrale d'un signal $x(t)$ à énergie finie est $S_{XX}(f) = |X(f)|^2$. Elle donne la distribution de son énergie en fonction de la fréquence. Comme $R_{XY}(\tau)$ est aussi une fonction bornée donc sa transformée de Fourier(TF) existe et s'exprime par :

$$S_{XY}(f) = TF[R_{XY}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}\, d\tau \qquad (1.37)$$

C'est la densité inter-spectrale d'énergie.

$$TF^{-1}[S_{XX}(f)] = R_{XY}(\tau) \qquad (1.38)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(f)e^{i2\pi f\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Pour $\tau = 0$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, Y^*(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt \qquad (1.39)$$

C'est la forme générale du théorème de Parseval.

b) **Densité spectrale de puissance**

Puisque P_{moy} est finie (signaux à puissance finie), on utilise les distributions pour calculer $S_{XX}(f) = TF[R_{XX}(\tau)]$. En général, elle n'est pas égale à $|X(f)|^2$.

c) **Densité inter-spectrale de puissance**

Elle est définie par **:** $S_{XY}(f) = TF[R_{XY}(\tau)]$

1.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu que les deux opérations de convolution et de corrélation s'apparentent fortement. Un endroit où l'on rencontre fréquemment les convolutions est la théorie des probabilités, le théorème central limite et le filtrage. Ces deux concepts sont abondement utilisés en traitement du signal et plus particulièrement dans l'analyse et traitement des signaux aléatoires. La convolution est l'opérateur le plus utilisé pour décrire la réponse des systèmes linéaires. Les TF nous permettent de calculer ces choses de façon assez simple.