

TP 1 : Simulation des lois usuelles avec Matlab

1 Lois discrètes

1.1 Loi de Bernoulli de paramètre θ , notée **Ber**(θ)

$$\forall x \in \{0, 1\}, P(X = x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}$$

$$E[X] = \theta \quad Var[X] = \theta(1 - \theta)$$

Fonction génératrice $G_X(t) = E[t^X] = 1 - \theta + \theta t$.

1.2 Loi Binomiale de paramètres (n, θ) , notée **Bin**(n, θ)

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, P(X = k) = C_n^k \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

$$E[X] = n\theta \quad Var[X] = n\theta(1 - \theta)$$

Fonction génératrice $G_X(t) = E[t^X] = (1 - \theta + \theta t)^n$.

Exemple

On considère une urne contenant N boules, N1 boule rouges, N2 = N–N1 boules noires. On en tire par hasard n boules avec remise . Soit X la variable aléatoire égale au nombre

de boules rouges tirées. Posons $p = \frac{N_1}{N}$, on a :

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Propriétés

1) Si X suit une loi Bin(n, θ), alors $n-X$ suit une loi Bin($n, 1-\theta$).

2) Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi Ber(θ), alors $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi Bin(n, θ).

1.3 Loi de Poisson de paramètre λ , notée **P**(λ)

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E[X] = \lambda \quad Var[X] = \lambda$$

Fonction génératrice $G_X(t) = E[t^X] = e^{\lambda(t-1)}$.

Simulation de la loi Bin(n, θ)

```
clear all
map(1,:) = [rand rand rand];
colormap(map)
n=20; theta=0.2; nb=2000;
R=binornd(n,theta,nb,1);
hist(R)

x=0:1:max(R);

p1=nb*binopdf(x,n,theta);
hold on 12
plot(x,p1,'*k','linewidth',1);
box off
```

hold off

```
clear all
map(1,:) = [rand rand rand];
colormap(map)
lambda=7;
nb=1000;
R = poissrnd(lambda,nb,1);
hist(R)
x=0:1:max(R)+1;
p1=1.7*nb*poisspdf(x,lambda);
hold on
plot(x,p1,'*k','linewidth',1)
box off
hold off
```

Propriété

Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes de lois respectives :

$$\mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right).$$

$P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)$, alors $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi

2 Lois continues

2.1 Loi Uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, notée $U([a, b])$

densité $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$

fonction de répartition $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

fonction caractéristique $\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{it(b-a)}$.

```
clear all
map(1,:) = [rand rand rand];
colormap(map)
a=2;
b=7;
nb=1000;
R = unifrnd(a,b,nb,1);
hist(R)
x = a:0.1:b;
p1=.55*nb*unifpdf(x,a,b);
hold on
plot(x,p1,'k','linewidth',2);
box off
hold off
```

2.2 Loi Normale de paramètres (m, σ^2) , notée $N(m, \sigma^2)$

densité $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

$$E[X] = m \quad \text{Var}[X] = \sigma^2$$

fonction caractéristique $\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \exp(imt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$

transformée de Laplace $\varphi_X(t) = E[e^{tX}] = \exp(mt + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$.

Propriétés :

1) La densité et la fonction de répartition de la loi $N(0,1)$ sont notées par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

2) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a : $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$.

3) Pour $\alpha \in]0, 1[$ on a : $\Phi^{-1}(\alpha) + \Phi^{-1}(1-\alpha) = 0$, où Φ^{-1} désigne la fonction réciproque de Φ .

4) Si X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors pour $\alpha \neq 0$ et pour tout β , $\alpha X \pm \beta$ suit une loi $\mathcal{N}(\alpha m \pm \beta, \alpha^2 \sigma^2)$.

Si X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $\frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

5)

6) Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois :

$\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \dots, \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$, alors $\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k$ suit une loi $\mathcal{N}(\sum_{k=1}^n \alpha_k m_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \sigma_k^2)$.

Simulation de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

```
clear all
map(1,:) = [rand rand rand];
colormap(map)
m=7;
sigma2=13;
nb=2000;
R= normrnd(m, sqrt(sigma2), nb, 1);
hist(R)
x=m-4*sqrt(sigma2):0.01:m+4*sqrt(sigma2);
p1=2*nb*normpdf(x,m,sqrt(sigma2));
hold on
plot(x,p1,'k','linewidth',2);
box off
hold off
```

2.3 Loi Exponentielle de paramètre λ , notée $\text{Exp}(\lambda)$

densité $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(x)$

fonction de répartition $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

fonction caractéristique $\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}}$.

Propriété

Si X est une variable aléatoire de loi $U(a, b)$, alors les variables aléatoires

$-\frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{X-a}{b-a}\right)$ et $-\frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{b-X}{b-a}\right)$ suivent la même loi $\text{Exp}(\lambda)$.

Simulation de la loi $\text{Exp}(\lambda)$

```
clear all
map(1,:) = [rand rand rand];
colormap(map)
lambda=1/4;
nb=1000;
R = exprnd(lambda,nb,1);
hist(R)
x=min(R):0.01:max(R);
p1=130*exppdf(x,lambda);
hold on
plot(x,p1,'k','linewidth',2);
box off
hold off
```

Travail demandé : rendre un compte rendu après avoir réalisé ce qui suit :

- 1) Exécuter les scripts Matlab et commenter les instructions de ces derniers.
- 2) Relever les graphes dans chaque cas et les commenter.
- 3) Pour chaque loi varier les paramètres et en déduire leurs effets sur les résultats obtenus.

conclure votre travail.