

1 L'algorithme du simplexe

1.1 Définition - Notations

1.1.1 Problème

Le problème linéaire est le suivant :
Trouver les $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui optimisent la fonction économique :

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

et vérifient les contraintes :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &\leq b_k \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

avec $c_1, \dots, c_n, a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m$ connus.

En notation condensée :

$$\begin{aligned} \min z &= \mathbf{C}^\top \mathbf{X} \text{ sous } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \leq \mathbf{b} \text{ et } \mathbf{X} \geq 0 \\ \text{avec } \mathbf{C}(n \times 1), \mathbf{A}(m \times n) \text{ et } \mathbf{b}(m \times 1) &\text{ connus et } \mathbf{X}(n \times 1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

1.1.2 Forme standard

La forme standard est un problème d'optimisation sous la forme :

$$\begin{aligned} \min z &= \mathbf{C}^\top \mathbf{X} \text{ sous } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b} \text{ et } \mathbf{X} \geq 0 \\ \text{avec } \mathbf{C} \text{ et } \mathbf{A} &\text{ connus} \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.1.3 Mise sous forme standard

On peut toujours remplacer les inégalités :

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k$$

par des égalités, en introduisant des *variables d'écart*.

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n - e_k = b_k \text{ avec } e_k \text{ positif ou nul.}$$

Le problème devient :

$$\min z' = [\mathbf{C}^\top \quad \mathbf{0}^\top] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \text{ sous } [\mathbf{A} \quad \mathbf{1}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \text{ et } \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (1.3)$$

avec $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ connus

1.1.4 Définitions

Définition 1 On appelle **solution** tout vecteur $\mathbf{X}$ tel que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{b}$.

Définition 2 Une solution $\mathbf{X}$ qui vérifie

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

est une solution **admissible**

Définition 3 $\mathbf{A}$ étant une matrice $(m \times n)$ de rang m . Une **base** est une matrice $\mathbf{B}(m \times m)$ extraite de $\mathbf{A}$ dont le déterminant est non nul.

On remarque que le système à résoudre possède m égalités et $n + m$ inconnues. Donc la valeur de n variables **peut être fixées arbitrairement**, par exemple à zéro. On dit qu'elles sont mises **hors base**

Définition 4 On appelle **variables hors base** les n variables de $\mathbb{R}^{n+m}$ fixées à zéros. Les m variables restantes sont appelées **variables de base**

Définition 5 On appelle **solution de base** une solution où en ayant choisi n variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les m contraintes d'égalité obtenues en ajoutant les variables d'écart.

Notons x_B les variables de base correspondant aux m variables positives ou nulles et x_H les variables hors base, correspondant aux n variables nulles.

Définition 6 Une solution de base telle que $x_B > 0$ est dite **admissible**.

Définition 7 Si $x_B \geq 0$, alors la solution est dite **solution de base admissible dégénérée**.

1.2 Résultats fondamentaux

1.2.1 Premières définitions

Définition 8 Soient X et Y deux points d'un domaine K , le segment qui joint X et Y est défini par l'ensemble des U tels que $U = \lambda X + (1 - \lambda)Y$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$.

Définition 9 Soient X et Y deux points intérieurs de K , le domaine K sera **convexe** si le segment joignant X et Y est dans K .

Définition 10 Une fonction f est **convexe** dans un domaine convexe K si

$$f(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1 - \lambda)f(Y)$$

Définition 11 U est un **sommet** du domaine K ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \lambda X + (1 - \lambda)Y \\ 0 < \lambda < 1 \end{array} \right\} \implies U = X = Y$$

Autrement dit un point d'un polyèdre est un sommet s'il ne peut pas être vu comme la combinaison linéaire convexe de deux autres points du polyèdre. Tout point d'un polyèdre peut être vu comme une combinaison linéaire convexe des sommets du polyèdre.

1.2.2 Théorèmes

Théorème 1 S'il existe une solution admissible au problème $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \geq 0, \mathbf{X} \geq 0$ alors il existe une solution de base admissible.

S'il existe une solution optimale admissible, il existe une solution de base admissible optimale

Théorème 2 L'ensemble des solutions admissibles forme un ensemble convexe K .

Preuve : Soient $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux solutions dans K .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{b} & \mathbf{X} \geq 0 \quad \mathbf{X} \in K \\ \mathbf{A} \mathbf{Y} = \mathbf{b} & \mathbf{Y} \geq 0 \quad \mathbf{Y} \in K \end{array} \right.$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda \mathbf{A} \mathbf{X} & = \lambda \mathbf{b} \\ (1 - \lambda) \mathbf{A} \mathbf{Y} & = (1 - \lambda) \mathbf{b} \end{array} \right\} \implies \mathbf{A}[\lambda \mathbf{X} + (1 - \lambda) \mathbf{Y}] = \mathbf{b} \text{ (en sommant)}$$

Soit $\mathbf{U} = \lambda \mathbf{X} + (1 - \lambda) \mathbf{Y}$ alors $\mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{b}$ donc $\mathbf{U} \in K$ et $\mathbf{U} \geq 0$.

□

Théorème 3 Si K est un ensemble convexe, un point de K solution admissible de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \geq 0, \mathbf{X} \geq 0$ est un sommet de K ssi $\mathbf{X}$ est une solution de base admissible.

Théorème 4 *Toute solution de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \geq 0, \mathbf{X} \geq 0$ est une combinaison linéaire convexe des sommets. La solution optimale est donc une combinaison linéaire convexe des sommets.*

Théorème 5 *L'optimum de z , s'il existe, est atteint en au moins un sommet de K .*

Preuve : (Par l'absurde)

Soit $\mathbf{X}^*$ un optimum de z qui ne soit pas un sommet de K .

$$\mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{X}^* < \mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{X}^i \quad \forall i \text{ tel que } 1 \leq i \leq p$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{X}^* < \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{X}^i$$

$$\text{or } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \text{ car c'est une somme linéaire convexe}$$

$$\text{D'où } \mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{X}^* < \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{X}^i$$

Choisissons les λ_i tels que $\mathbf{X}^* = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{X}^i$ (Théorème 4). Donc $\mathbf{C}^\top < \mathbf{C}^\top$ absurde, $\mathbf{X}^*$ est donc un sommet.

□

Théorème 6 *Si z atteint son optimum pour plusieurs sommets, il l'atteint aussi pour toute combinaison linéaire convexe de ces sommets.*

Preuve :

$$z_{opt} = \mathbf{C}^\top \mathbf{X}^1 = \mathbf{C}^\top \mathbf{X}^1 = \dots = \mathbf{C}^\top \mathbf{X}^p$$

$$\mathbf{U} = \lambda_1 \mathbf{X}^1 + \dots + \lambda_p \mathbf{X}^p$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1$$

$$\mathbf{C}^\top \mathbf{U} = \lambda_1 \mathbf{C}^\top \mathbf{X}^1 + \dots + \lambda_p \mathbf{C}^\top \mathbf{X}^p$$

$$\mathbf{C}^\top \mathbf{U} = \sum_{i=1}^p \lambda_i z_{opt} = z_{opt}$$

$$\text{D'où } \mathbf{C}^\top \mathbf{U} = z_{opt}$$

□

1.3 Principe

L'algorithme procède de la façon suivante :

1. on recherche un sommet de départ ;
2. on teste si ce sommet est l'optimum ou si la fonction objectif n'est pas bornée inférieurement ; dans ce cas le problème n'a pas de solution finie ;
3. si le sommet que l'on vient d'examiner n'est pas optimal, on se déplace sur un sommet voisin pour lequel la fonction économique diminue et on repasse à l'étape précédente.

Le nombre de sommets étant fini et tout minimum local étant absolu, le sommet optimal est atteint lorsqu'aucun des sommet voisin ne permet plus de diminution du critère.

1.4 Recherche d'un sommet de départ

1.4.1 Forme simpliciale

Le problème étant sous la forme standard (Equation 2), il peut se décomposer sous la forme

$$[\mathbf{B} \quad \mathbf{H}] \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ x_H \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Supposons que $\mathbf{B}$ est inversible, alors

$$[\mathbf{1} \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{H}] \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ x_H \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Si $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} > 0$ alors la solution

$$x_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad x_H = 0$$

est une solution de base admissible.

Cette approche nécessite :

- l'inversion d'une matrice ;
- la recherche d'une matrice telle que $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} > 0$.

La forme simpliciale permet d'éliminer ces inconvénients. En effet, la mise en évidence d'une solution est particulièrement simple si $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ et $\mathbf{b} > 0$.

On appellera **forme simpliciale** une expression des contraintes égalités sous la forme

$$[\mathbf{1} \quad \mathbf{H}] \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ x_H \end{bmatrix} = \mathbf{b} \text{ avec } \mathbf{b} \geq 0 \quad (1.4)$$

On a alors une solution directe :

$$\begin{cases} x_B = \mathbf{b} \\ x_H = \mathbf{0} \end{cases}$$

1.4.2 Cas où la forme simpliciale n'est pas évidente

Lorsqu'il n'existe pas de forme simpliciale de départ évidente pour le problème sous forme standard (Equation 2), on rajoute des variables, dites *artificielles*, pour faire apparaître une telle forme.

Le problème devient :

$$\min w = \sum_{i=1}^m y_i \text{ sous } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{b} \text{ et } \mathbf{X} \geq 0 \quad \mathbf{Y} \geq 0 \quad (1.5)$$

avec $\mathbf{C}$ et $\mathbf{A}$ connus

Pour le problème 5, on a une forme simpliciale évidente.

$$[\mathbf{1} \quad \mathbf{A}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \text{ avec } \mathbf{b} \geq 0$$

La méthode des deux phases permet alors de déterminer une forme simpliciale du problème de départ. Son principe est le suivant :

- On résout le problème 5 par l'algorithme du simplexe.
- Si la solution de ce problème conduit à une solution avec des variables artificielles non nulles ($w \neq 0$), le problème initial n'a pas de solution.
- Si la solution de ce problème conduit à une solution avec des variables artificielles nulles ($w = 0$), on utilise la solution ainsi obtenue comme sommet de départ pour le problème initial (on supprime les variables artificielles et on a ainsi une forme simpliciale du problème initial).

1.5 Passage d'un sommet à un autre

Dès que l'on quitte un sommet, une des variables hors base correspondantes au moins devient non nulle. Comme on veut de diriger vers un sommet voisin, il ne faut en rendre non nulle qu'une, qui va ainsi devenir variable de base pour le prochain sommet, donc *entrer* dans la base.

1.5.1 Choix de la variable entrante

En exprimant le critère z en fonction des variables hors base. Le critère de sélection de la variable entrante est de prendre la variable hors base qui fournit la plus forte baisse de la fonction objectif. Autrement dit, on choisit celle dont le coût marginal est le plus négatif.

1.5.2 Choix de la variable sortante

En considérant le problème sous forme simpliciale, les contraintes lorsqu'une variable hors base x_r rentre dans la base sont :

$$\begin{aligned} x_1 + a_{1r}x_r &= b_1 \\ &\vdots \\ x_s + a_{sr}x_r &= b_s \\ &\vdots \\ x_m + a_{mr}x_r &= b_m \end{aligned}$$

La solution doit être admissible, donc les x_i sont positifs ou nuls. On va donc “pousser” la variable entrante jusqu'à ce qu'une des variables de base s'annule. C'est cette variable qui est choisie comme variable sortante. Pour les i tels que $a_{ir} > 0$, on choisit le plus petit des $\frac{b_i}{a_{ir}}$, noté $\frac{b_s}{a_{sr}}$ et on donne à x_r la valeur $\frac{b_s}{a_{sr}}$, alors $x_s = 0$. Si tous les a_{ir} sont inférieurs à zéro, alors la solution est non bornée.

1.5.3 Calcul du nouveau sommet

Le calcul du nouveau sommet consiste à remplacer

- les a_{ij} par $a_{ij} - a_{jr} \frac{a_{si}}{a_{sr}}$
- les b_j par $b_j - a_{jr} \frac{b_s}{a_{sr}}$

Ce calcul est appelé “opération de pivot”.

1.5.4 Test d'optimalité

Le critère d'arrêt est le suivant :

La solution de base courante est optimale si, lorsque la fonction économique est exprimée avec les variables hors base, aucune des variable ne conduit à l'amélioration du critère. Autrement dit, si les tous les coûts marginaux sont positifs ou nuls.

1.6 Résumé

Terminons en donnant une description schématique de l'algorithme du simplexe.

Pas 0. Initialisation

- Trouver une forme simpliciale du problème

Pas 1. Test d'optimalité

- Exprimer la fonction économique à partir des variables hors base
- **Si** tous les coûts marginaux sont positifs ou nuls **Alors** STOP, la solution obtenue est la solution optimale
- **Sinon**

Pas 2. Choix de la variable entrante

- Choisir la variable hors base dont le coût marginal est négatif et le plus petit possible. Soit x_r la variable entrante.

Pas 3. Choix de la variable sortante

- La variable sortante est la première à s'annuler : c'est celle pour laquelle le $\frac{b_i}{a_{ir}}$ est le plus petit avec $a_{ir} > 0$. Soit x_s la variable sortante.

Pas 4. Déterminer la nouvelle solution de base : opération du pivot

- Remplacer les a_{ij} par $a_{ij} - a_{jr} \frac{a_{si}}{a_{sr}}$
- Remplacer les b_j par $b_j - a_{jr} \frac{b_s}{a_{sr}}$

Retour au Pas 1.