

Série 2

Déférents formes d'un PL et résolution graphique

Exo 01

1. Mettre les problèmes linéaires suivants sous forme canonique.

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = Z(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \max \\ 5x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 \\ 3x_1 - 4x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_3 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = Z(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + 5x_2 = 10 \\ x_2 \geq -3 \\ x_1 \geq 0 \end{array} \right.$$

2. Ecrire le problème suivant sous forme canonique suivant les valeurs du paramètre k avec k est un réel

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = Z(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 \leq k \\ x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Exo 02

Ecrire sous forme matricielle le problème de programmation linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = Z(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \max \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Exo 03

$$\text{Soit } A = A(I, J) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad x = x(J) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Effectuer par blocs le produit $A.x$ avec la partition suivante

$$J = J_B \cup J_H \quad J_B = \{2, 3, 1\} \text{ et } J_H = \{4, 5\}$$

Exo 04

I. Résoudre par la méthode graphique le problème de programmation linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ -3x_1 + x_2 \leq -3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

II. On considère le problème suivant ;

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

La solution $x = \left(\frac{20}{3}, \frac{11}{3} \right)$ est-elle réalisable. Est-elle optimale

Exo 05

Soit le problème linéaire P suivant :

$$(P): \left\{ \begin{array}{l} \max Z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

1. Montrer que la fonction objective du problème (P) définie sur le polyèdre $K = \{ x, x \geq 0 / A \cdot x = b \}$ atteint son maximum en un point extrême de K.
2. Montrer que si la fonction objective prend sa valeur maximale au plus d'un point extrême alors toutes combinaisons linéaire convexe de ces points donne la même valeur à la fonction objective.
3. Montrer qu' un point x de K est un point extrême si et seulement si x est une solution de base réalisable du problème $A \cdot X = b$.
4. En déduire si $K \neq \emptyset$ alors il admet au moins un point extrême.

Exo06

Soit le programme linéaire sous forme standard :

$$\begin{array}{ll}\max & 4x_1 + x_2 \\ \text{s.c} & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 8x_2 \leq 2 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq 11 \\ 7x_1 - 2x_2 \leq 107 \\ 2x_2 \leq 19 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.\end{array}$$

- 1- sachant que les solutions réalisables du problème ci-dessus ont toutes des coordonnées (x_1, x_2) inférieures respectivement à 20 et à 10 dessinez l'ensemble des solutions réalisable du problème et sur ce dessin tracez la flèche de la fonction objectif
- 2- déterminer graphiquement la solution optimale et quelle est la valeur de la fonction objectif à cet optimum.