السنة أولى ماستر 2025-2026

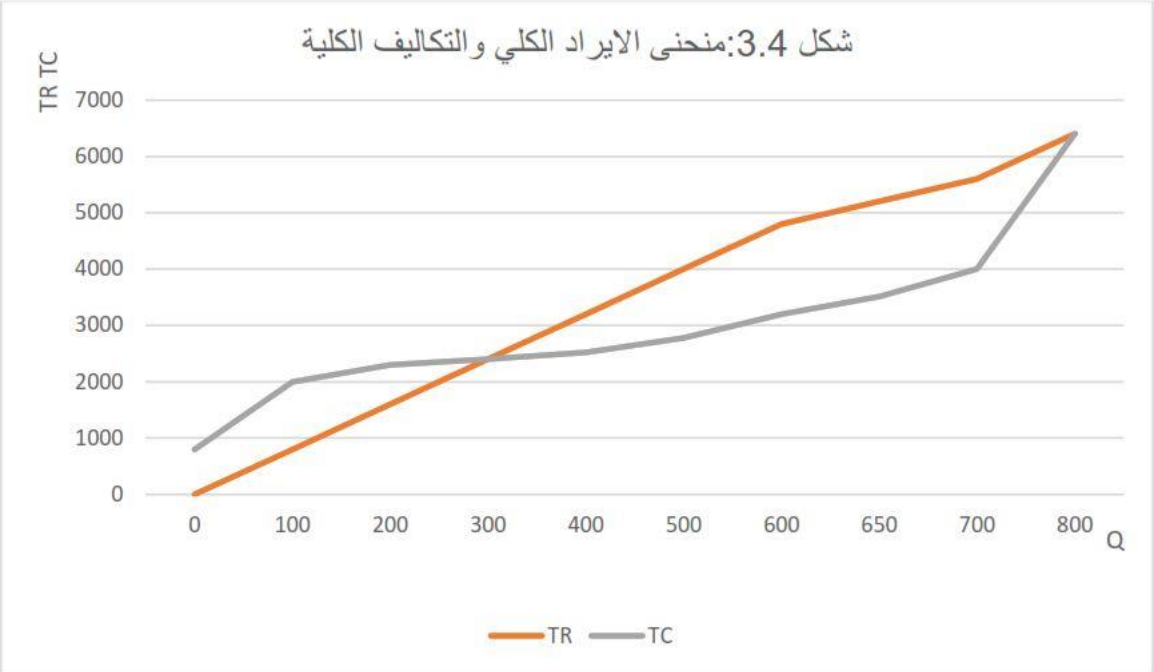
تخصص: اقتصاد كمي وإحصاء

حلول سلسلة 4

حل التمرين الأول:

الكمية Q	السعر P	الإيراد الكلي RT	التكلفة الكلية CT	الربح الكلي Π
0	8	0	800	-800
100	8	800	2000	-1200
200	8	1600	2300	-700
300	8	2400	2400	0
400	8	3200	2524	676
500	8	4000	2775	1225
600	8	4800	3200	1600
650	8	5200	3510	1690
700	8	5600	4000	1600
800	8	6400	6400	0

- **التمثيل البياني:**



- **التعليق:** نلاحظ من الشكل أن الربح يصل إلى نهايته العظمى عندما تنتج المؤسسة أو تبيع 650 وحدة من السلعة، وعند هذا المستوى من الإنتاج تكون المسافة بين منحنى RT وCT أكبر ما يمكن.
- تحقق المؤسسة أعلى خسارة عندما يصل الإنتاج إلى 100 وحدة.
- لا تحقق المؤسسة أي ربح عند الإنتاج المقابل لـ 300 وحدة و800 وحدة.

حل التمرين الثاني: لدينا الجدول التالي:

الكمية المنتجة Q	السعر أو الإيراد الحدي Rm = P	التكلفة الحدية Cm
1	10	3
2	10	2
3	10	1.5
4	10	2.5

5	10	4.5
6	10	7.5
7	10	10
8	10	13.5
9	10	17.5

يوضح الجدول أعلاه كيفية تعظيم ربح المؤسسة التنافسية بالأسلوب الحدي في المدى القصير، وعندما نقارن (Rm أو P) مع Cm نلاحظ ما يلي:

- إذا كان السعر أعلى من التكلفة الحدية Cm < P فإن المؤسسة تحقق ربحا مستمرا إذا زادت من الكمية المنتجة حتى الوحدة 7.
- عند الوحدة السابعة يتحقق التوازن للمؤسسة لأن Cm = Rm = P وتعتبر هذه نقطة التوازن وهي نقطة تعظيم الربح للمؤسسة.
- إذا كان السعر أقل من التكلفة الحدية Cm > P فإن مصلحة المؤسسة هو تخفيض الإنتاج حتى لا تقع في الخسارة.

حل التمرين الثالث: لتكن دالة التكلفة لمؤسسة تعمل في سوق المنافسة الكاملة كالتالي:

$$\mathbf{CT = Q^3 - 5\,Q^2 + 14\,Q + 12}$$

1: إيجاد نقطة التوازن:

نقطة التوازن تقع على الجزء الصاعد من منحنى التكلفة الحدية، وهي أدنى قيمة لمتوسط التكلفة المتغيرة، ولدينا:

$$CV = CT - CF = Q^3 - 5\,Q^2 + 14\,Q + 12 - 12$$

$$CV = Q^3 - 5\,Q^2 + 14\,Q$$

$$CVM = \frac{CV}{Q} = Q^2 - 5\,Q + 14$$

تكون CVM في أدنى قيمتها عندما تكون المشتقة الأولى = 0 أي:

$$\frac{\delta\, CVM}{\delta\, Q} = 0$$

أي: $Q = 2.5$

والتعويض في عبارة CVM نجد: $P = 7.75$

2: إيجاد دالة عرض المؤسسة:

دالة عرض المؤسسة هو الجزء الصاعد من منحنى التكلفة الحدية بداية من أدنى نقطة لمتوسط التكلفة المتغيرة، ولدينا:

كتابة Q بدلالة المجهول P:

$$Cm = P = 3Q^2 - 10\,Q + 14$$

$$3Q^2 - 10\,Q + 14 - P = 0$$

عن طريق المميز Δ نجد:

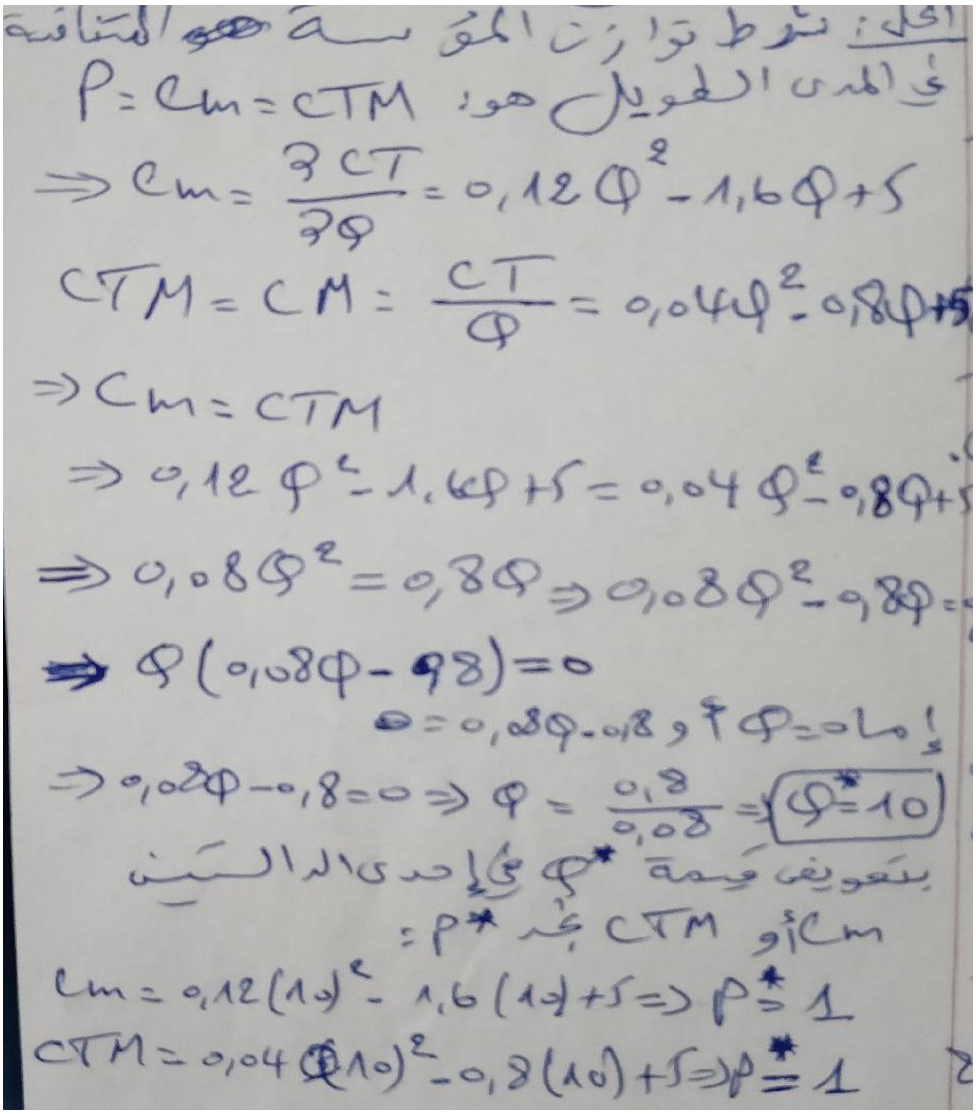
$$Q_1 = \frac{10 - \sqrt{12p - 68}}{6}$$

$$Q_2 = \frac{10 + \sqrt{12p - 68}}{6}$$

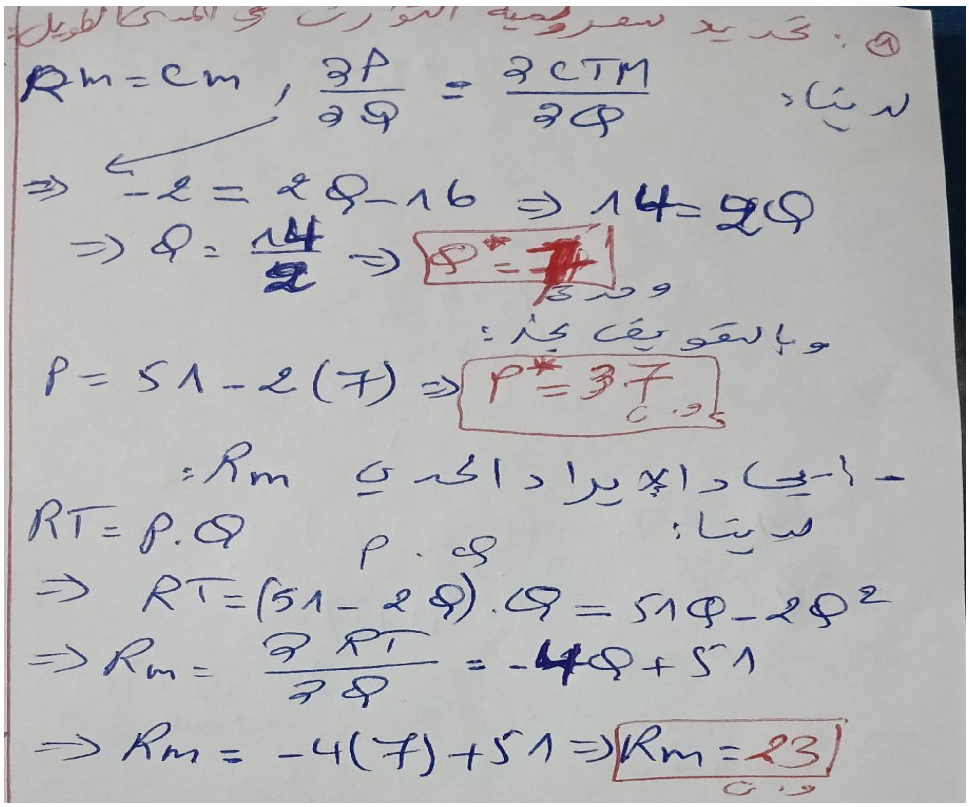
Q_1 مرفوض لأنه يظهر علاقة عكسية بين الكمية المعروضة والسعر.

Q_2 مقبول لأنه يظهر علاقة طردية بين الكمية المعروضة والسعر.

حل التمرين الرابع:



حل التمرين الخامس:



حل التمرين السادس:

المطلوب: أوجد الكميات التوازنية لكل مؤسسة وضح ذلك بنموذج كورنو وأحسب الربح المحقق.

الحل:

① إيجاد دالة رد فعل المؤسسة ①: أي كتابة q_1 بدلالة q_2:

لدينا: $\Pi_1 = RT_1 - CT_1$

$\Rightarrow \Pi_1 = P q_1 - CT(q_1)$ (q_1 بدلالة q_1)

$\Rightarrow \Pi_1 = P\left[50 - 2(q_1+q_2)\right]q_1 - 2q_1^2$ (P بدلالة q_1 و q_2)

$\Rightarrow \Pi_1 = 50q_1 - 2q_1^2 - 2q_1q_2 - 2q_1^2$

$\Rightarrow \Pi_1 = 50q_1 - 4q_1^2 - 2q_1q_2$

$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow 50 - 8q_1 - 2q_2 = 0$ (دالة الربح من q_1)

إذن دالة رد فعل المؤسسة 1 هي:

$$q_1 = \frac{25 - q_2}{4} \quad \cdots (1)$$

$8q_1 = 50 - 2q_2 \Rightarrow q_1 = \frac{50}{8} - \frac{2}{8}q_2$

② إيجاد رد فعل المؤسسة ②:

$\Pi_2 = RT_2 - CT_2 = P q_2 - CT(q_2)$ (q_2 بدلالة q_2)

$\Pi_2 = P.Q.q_2 - CT(q_2)$

$\Rightarrow \Pi_2 = \left[50 - 2(q_1+q_2)\right]q_2 - q_2^2$

$\Rightarrow \Pi_2 = 50q_2 - 2q_1q_2 - 2q_2^2 - q_2^2$

$\Rightarrow \frac{\Pi_2}{\partial q_2} = 50q_2 - 3q_2^2 - 2q_1q_2$ (دالة الربح من q_2)

$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow 50 - 6q_2 - 2q_1 = 0$

دالة رد الفعل للمؤسسة ② هي:

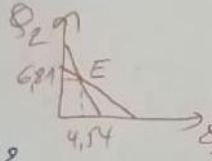
$$q_2 = \frac{25 - q_1}{3} \quad \cdots (2)$$

بتعويض ① في ② نجد: توازن كورنو

$q_2 = \frac{25 - \left(\frac{25 - q_2}{4}\right)}{3}$ إيجاد q_1 و q_2 و P

$q_2 = \frac{100 - 25 + q_2}{3} = \frac{75 + q_2}{12}$

$\Rightarrow 12q_2 = 75 + q_2$



$\Rightarrow 11q_2 = 75 \Rightarrow q_2 = \frac{75}{11}$

$\Rightarrow q_2 = 6,81$ وحدة الكمية التي تعظم ربح المنتج 2

ومنه: $q_1 = \frac{25 - 6,81}{4}$ الكمية التي تعظم ربح المنتج 1

$\Rightarrow q_1 = 4,54$ وحدة

$\Rightarrow Q = q_1 + q_2 = 6,81 + 4,54$

$\Rightarrow Q = 11,35$ وحدة الكمية الكلية

سعر البيع هو: $P = 50 - 2Q$

$P = 50 - 2(11,35) \Rightarrow P = 27,3$ وحدة

حساب الربح المحقق:

$\Pi_1 = Pq_1 - CT(q_1)$

$\Rightarrow \Pi_1 = 27,3 \cdot 4,54 - 2(4,54)^2$

$\Pi_1 = 50q_1 - 2q_1^2 - \frac{50}{3}q_1 + \frac{2}{3}q_1^2 - 2q_1^2$

$\Pi_1 = \frac{100}{3}q_1 - \frac{10}{3}q_1^2$ دالة ربح القائد

لتعظيم ربح المؤسسة 1 القائدة نجد:

$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{100}{3} - \frac{20}{3}q_1 = 0$

$\Rightarrow q_1 = 5$ وحدات

ومنه:

$q_2 = \frac{25-5}{3} \Rightarrow q_2 = \frac{20}{3}$

$\Rightarrow q_2 = 6,66$

$Q = 5 + 6,66 \Rightarrow Q = 11,66$ وحدة

سعر البيع هو:

$P = 50 - 2Q \Rightarrow P = 50 - 2(11,66)$

$\Rightarrow P = 26,68$ د.ج

وبما أن الربح المحقق لكل مؤسسة

$\Pi_1 = Pq_1 - CT(q_1)$

$\Rightarrow \Pi_1 = 26,68(5) - 2(5)^2$

$\Rightarrow \Pi_1 = 83,4$ د.ج

$\Pi_2 = Pq_2 - CT(q_2)$

$\Rightarrow \Pi_2 = 26,68(6,66) - (6,66)^2$

$\Rightarrow \Pi_2 = 133,33$ د.ج

نلاحظ أن التصرفات القيادية أدت إلى إنتاج أكبر وبالتالي سعر أقل مما هو عليه الحال في نموذج كورنو وهذا لسبب بسيط هو كون المنتج القائد (1) الذي يفرض البقية من الوقت له تكلفة إنتاج أقل

$\Pi_1 = 82,71$

$\Pi_2 = Pq_2 - CT(q_2)$

$\Rightarrow \Pi_2 = 27,3.6,81 - 6,81^2$

$\Rightarrow \Pi_2 = 139,53$

الربح الكلي هو:

$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$

$\Rightarrow \Pi = 82,71 + 139,53$

$\Rightarrow \Pi = 222,24$

ب) نموذج ستاكل برغ:

Stackelberg Model:

- هو نموذج يتكون من منشأة قائدة تتصرف كمحتكر وتحدد سعر السوق نظرا لسيطرتها شبه التامة على السوق، ومجموعة منشآت صغيرة تابعة تأخذ بسعر المنشأة القائدة وتتصرف بناء على سلوك المنتج القائد، أما المنتج القائد فيفترض أن منافسه يتصرف كمنتج تابع ويمكن له تعظيم الربح بناء على دالة رد فعل منافسه.

مثال: بالاعتماد على المثال السابق ودالتي رد الفعل 1 و 2 وبافتراض أن المؤسسة 1 هي القائد والمؤسسة 2 هي التابع، نكتب دالة الربح للمؤسسة ① بدلالة دالة رد فعل المؤسسة ② ونبحث عن القيمة التي تعظم الربح.

لدينا:

$\Pi_1 = Pq_1 - CT(q_1)$

$\Pi_1 = [50 - 2(q_1 + q_2)]q_1 - CT(q_1)$

$\Rightarrow \Pi_1 = \left[50 - 2\left(q_1 + \frac{25 - q_1}{3}\right)\right]q_1 - 2q_1^2$