حل تمرين 03 سلسلة 03:

دالة الإنتاج تأخذ الشكل التالي:

$$Q = b L^{\alpha} K^{\beta}$$

① تحديد نوع الدالة: تنتمي هذه الدالة إلى فئة الدوال من النوع كوب-دوغلاس

CW Cobb - Paul Douglas

$$Q = A L^{\alpha} K^{\beta}$$

② إثبات: α و β بالاعتماد على مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل تساوي α، ودالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الثانية:

E_L هي مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل وهي قيمة معامل α يعني أن: $E_L = 0,5 = \alpha$

ولدينا الدالة متجانسة من الدرجة الثانية

يعني أن: $\alpha + \beta = 2$ ومنه يمكن استنتاج قيمة β حيث

$$\alpha + \beta = 2 \Rightarrow 0,5 + \beta = 2 \Rightarrow \beta = 2 - 0,5 \Rightarrow \beta = 1,5$$

ومنه تصبح دالة الإنتاج من الشكل:

$$Q = b L^{0,5} K^{1,5}$$

③ باعتبار $\alpha = \frac{3}{2}$ و $\beta = \frac{1}{2}$ و $b = 2$ أي:

درجة تجانس الدالة $Q = 2 L^{\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}}$

$$Q' = f(tL, tK) = 2 (tL)^{\frac{3}{2}} \cdot (tK)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow Q' = 2 t^{\frac{3}{2}} L^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow Q' = 2 t^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow Q' = 2 t^{2} L^{\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow Q' = t^2 Q \Rightarrow f(tL, tK) = t^2 f(L, K)$$

إذن الدالة متجانسة من الدرجة الثانية وتمثل غلة حجم متزايدة (مردود متزايد) وبالتالي زيادة عناصر الإنتاج بـ 1% يقابلها زيادة في الإنتاج الكلي بـ 2%

ب: إيجاد MP_L و AP_L و MP_K و AP_K:

$Q = 2 L^{\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}}$ لعنصر العمل AP_L و MP_L نجد:

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 2 \left(\frac{3}{2}\right) L^{\frac{3}{2}-1} K^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow MP_L = 3 L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{2 L^{\frac{3}{2}} \cdot K^{\frac{1}{2}}}{L} = \frac{2 K^{\frac{1}{2}}}{L \cdot L^{\frac{-3}{4}}}$$

$$\Rightarrow AP_L = \frac{2 K^{\frac{1}{2}}}{L^{-\frac{1}{2}}} \Rightarrow AP_L = 2 \cdot L^{\frac{1}{2}} \cdot K^{\frac{1}{2}}$$

MP_K و AP_K لعنصر رأس المال:

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 2 L^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) K^{\frac{1}{2}-1}$$

$$\Rightarrow MP_K = L^{\frac{3}{2}} K^{-\frac{1}{2}}$$

$$AP_K = \frac{Q}{K} = \frac{2 L^{\frac{3}{2}} \cdot K^{\frac{1}{2}}}{K} = \frac{2 L^{\frac{3}{2}}}{K \cdot K^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow AP_K = \frac{2 L^{\frac{3}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow AP_K = 2 L^{\frac{3}{2}} \cdot K^{-\frac{1}{2}}$$

⑤ إيجاد مختلف مرونات دالة الإنتاج:

P: المرونة الجزئية لعنصر العمل (E_L)

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{MP_L}{AP_L}$$

باستعمال دوال الإنتاجية المتوصل إليها في السؤال ④ نجد:

$$E_L = \frac{3 L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}}{2 L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2} = \alpha$$

ب: المرونة الجزئية لعنصر رأس المال (E_K):

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{MP_K}{AP_K}$$

باستعمال دوال الإنتاجية المتوصل إليها في السؤال ④ نجد:

$$E_K = \frac{L^{\frac{3}{2}} \cdot K^{-\frac{1}{2}}}{2 L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} = \beta$$

ج: في حالة دالة كوب-دوغلاس نجد درجة تجانس الدالة بمجموع $\alpha + \beta$ وبالتالي:

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

درجة تجانس الدالة هي 2.

د: إيجاد MP_L و MP_K و AP_L و AP_K:

$Q = 2 L^{\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}}$ لعنصر العمل AP_L و MP_L نجد:

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 2 \left(\frac{3}{2}\right) L^{\frac{3}{2}-1} K^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow MP_L = 3 L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{2 L^{\frac{3}{2}} \cdot K^{\frac{1}{2}}}{L} = \frac{2 K^{\frac{1}{2}}}{L \cdot L^{\frac{-3}{4}}}$$

$$\Rightarrow AP_L = \frac{2 K^{\frac{1}{2}}}{L^{-\frac{1}{2}}} \Rightarrow AP_L = 2 \cdot L^{\frac{1}{2}} \cdot K^{\frac{1}{2}}$$

MP_K و AP_K لعنصر رأس المال:

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 2 L^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) K^{\frac{1}{2}-1}$$

$$\Rightarrow MP_K = L^{\frac{3}{2}} K^{-\frac{1}{2}}$$

$$AP_K = \frac{Q}{K} = \frac{2 L^{\frac{3}{2}} \cdot K^{\frac{1}{2}}}{K} = \frac{2 L^{\frac{3}{2}}}{K \cdot K^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow AP_K = \frac{2 L^{\frac{3}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow AP_K = 2 L^{\frac{3}{2}} \cdot K^{-\frac{1}{2}}$$

Scanné avec CamScanner

ج: مرونة الإنتاج الكلي:

$E_L + E_K = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

نلاحظ أن مجموع المرونتين يساوي درجة تجانس الدالة

⑥: صيغة المعدل الحدي للإحلال التقني $MRTS_{L.K}$

$MRTS_{L.K} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{3L^{\frac{1}{2}}.K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{3}{2}}K^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3K^{\frac{1}{2}}.K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{3}{2}}L^{-\frac{1}{2}}}$

$\Rightarrow MRTS_{L.K} = \frac{3K}{L}$

⑦: المسار الأمثل للتوسع، نجده من خلال العبارة التالية:

$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{3K}{L} = \frac{9}{3} \Rightarrow 9K = 9L$

$\Rightarrow K = L$

يعكس المسار الأمثل للتوسع تولفيات عناصر الإنتاج (L,K) التي تحقق أعظم إنتاج في حالة بقاء أسعار هذه العناصر الإنتاجية ثابتة، حيث يتبع المنتج هذا المسار إذا أراد زيادة طاقته الإنتاجية.

- أو هو المنحنى الذي يمر عبر التوليفات التوازنية عندما تتغير ميزانية الإنتاج مع ثبات أسعار عوامل الإنتاج P_L و P_K

⑧: إيجاد الكميات المثلى من عوامل الإنتاج التي تعظم الإنتاج الكلي المؤسسة

$P_L = 9, P_K = 3, T_C = 500$ و.ع

تعظيم دالة الإنتاج: $\text{Max } Q = 2L^{\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}}$

تحت قيد التكاليف: $\text{s.c } 500 = 9L + 3K$

- باستخدام طريقة شرطي التوازن:

$\begin{cases} \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{P_L}{P_K} \dots ① \\ T_C = L.P_L + K.P_K \dots ② \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3K}{L} = \frac{9}{3} \dots ① \\ 500 = 2L^{\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}} \dots ② \end{cases}$

- من الشرط الأول نجد: $K = L \dots ③$

بتعويض ③ في ② نجد:

$500 = 2L^{\frac{3}{2}}.K^{\frac{1}{2}} = 2L^{\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 500 = 2L^2$

$\Rightarrow L^2 = 156 \Rightarrow \boxed{L = 12,24}$ وحدة

$\boxed{K = 12,24}$ وحدة

ومنه:

- الحد الأدنى من التكاليف T_C

$T_{C_{min}} = 9L + 3K = 9(12,24) + 3(12,24)$

$\Rightarrow T_{C_{min}} = 146,969 \simeq 147$ ون

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{21}{L} = \frac{3}{3} \dots ① \\ 500 = 9L + 3K \dots ② \end{cases}$

$\frac{3K}{L} = \frac{9}{3} \Rightarrow 9K = 9L \Rightarrow K = L \dots ③$ من ① نجد:

بتعويض ③ في ② نجد:

$500 = 9L + 3L \Rightarrow 500 = 12L \Rightarrow \boxed{L = 41,66}$ وحدة

ولدينا: $K = L \Rightarrow \boxed{K = 41,66}$ وحدة

ومنه فإن التركيبة التوازنية من عنصري الإنتاج L و K التي تحقق الإنتاج الأمثل هي كل التوليفات المقدمة هي:

$(L,K) = (41,66; 41,66)$.

ومستوى الإنتاج الأمثل الموافق لهما هو:

$Q_{max} = 2(41,66)^{\frac{3}{2}}.(41,66)^{\frac{1}{2}} = 3472,22$ وحدة منتجة

⑨: الحد الأدنى من التكاليف الموافقة لإنتاج قدره 300 وحدة: (Q معلومة و T_C مجهولة)

تدنية التكاليف: $\text{Min } T_C = 9L + 3K$

تحت قيد الإنتاج: $\text{s.c } 300 = 2L^{\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}}$

- باستخدام طريقة شرطي التوازن:

$\begin{cases} \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{P_L}{P_K} \dots ① \\ Q = f(L,K) \dots ② \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3K}{L} = \frac{9}{3} \dots ① \\ 300 = 2L^{\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}} \dots ② \end{cases}$

- من الشرط الأول نجد: $K = L \dots ③$

بتعويض ③ في ② نجد:

$300 = 2L^{\frac{3}{2}}.K^{\frac{1}{2}} = 2L^{\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 300 = 2L^2$

$\Rightarrow L^2 = 156 \Rightarrow \boxed{L = 12,24}$ وحدة

$\boxed{K = 12,24}$ وحدة

ومنه:

- الحد الأدنى من التكاليف T_C

$T_{C_{min}} = 9L + 3K = 9(12,24) + 3(12,24)$

$\Rightarrow T_{C_{min}} = 146,969 \simeq 147$ ون

Scanné avec CamScanner

$L^{5/3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{20}{3}}$

$L^{5/3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} \cdot 9^{\frac{20}{3}}$

قلب الأساس — قلب الأساس — قلب الأساس

$L = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} \cdot 9^{\frac{20}{3}}\right]^{\frac{3}{5}}$

$L = \frac{3}{2} 9^4 \Rightarrow \boxed{L = 9841,5 \text{ وحدة}}$

$k = \left(\frac{1}{9}\right)^5 (9841,5)^{\frac{2}{5}} \boxed{= 1640,25 \text{ وحدة}}$

$Q = \frac{3}{2} (1640,25)^{1/5} (9841,5)^{3/5}$

$\boxed{= 1640,25 \text{ وحدة}}$

$\Pi = 10Q - 2k - L$

$\Rightarrow \Pi = 10(1640,25) - (2 \cdot 1640,25) - (9841,5)$

$\Rightarrow \boxed{\Pi = 3280,5 \text{ ون}}$ أعظم ربح هو:

- ملاحظة: الشرط ② الكافي للتعظيم الربح محقق لأن المشتقة الثانية للربح سالبة لما يلي:

$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial k^2} < 0 \Rightarrow -\frac{4}{5}(3) k^{-4/5-1} L^{\frac{3}{5}} < 0$

$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} < 0 \Rightarrow -\frac{2}{5}(9) L^{-\frac{2}{5}-1} k^{1/5}$

③ التمرين ④:

$Q = \frac{3}{2} K^{1/5} \cdot L^{3/5}$

$P_K = 10 \quad ; \quad P_k = 2 \quad , \quad P_L = 1$

الحل:

① إيجاد دعاية Π، دالة الربح:

$\Rightarrow \Pi = RT - CT$

$\Rightarrow \Pi = PQ_x - cT$

$\Rightarrow \Pi = 10\left(\frac{3}{2} L^{3/5} k^{1/5}\right) - (L + 2k)$

$\Rightarrow \boxed{\Pi = 15 k^{1/5} L^{3/5} - 2k - L}$

- وعلما أن الشرط اللازم حتى تكون Π عند أعلى قيمة أو نقطة هو أن تكون $\frac{\partial \Pi}{\partial k} = 0$

لدينا: $\frac{\partial \Pi}{\partial k} = 0 \Rightarrow 3 k^{-\frac{4}{5}} L^{3/5} - 2 = 0$

$\Rightarrow 3 k^{-\frac{4}{5}} L^{3/5} = 2$

$\Rightarrow L = \left[\frac{2}{3k^{-\frac{4}{5}}}\right]^{5/3}$

$\Rightarrow L = \left(\frac{2}{3} k^{4/5}\right)^{5/3}$

$\Rightarrow \boxed{L = \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} k^{4/3}}$

وكذلك بالنسبة لـ $\frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0$

$\Rightarrow 9 k^{1/5} L^{-2/5} - 1 = 0$

$\Rightarrow 9 k^{1/5} L^{-2/5} = 1$

$\Rightarrow k = \left[\frac{1}{9L^{-2/5}}\right]^5 \Rightarrow k = \left(\frac{1}{9}\right)^5 L^2$

نقوم بـ k في L نجد قيمة L، لكي نجد في الأخير قيمة k:

$L = \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} \left[\left(\frac{1}{9}\right)^5 L^2\right]^{4/3}$

$L = \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{20}{3}} L^{8/3}$

$\frac{L}{L^{8/3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{20}{3}}$

Scanné avec CamScanner