الفصل الثاني :دراسة استقرارية السلسلة الزمنية

قبل الشروع في نمذجة السلسلة الزمنية والتنبؤ بها، من الضروري التأكد من خصائصها العشوائية .تُعتبر السلسلة مستقرة ومقبولة للنمذجة والتنبؤ إذا كان الأمل الرياضي والتباين ثابتين عبر الزمن .السلسلة الزمنية المستقرة هي التي تتغير مستوياتها مع ثبات المتوسط والتباين، مما يعني عدم وجود اتجاه عام (لا زيادة ولا نقصان).

الخصائص الإحصائية لاستقرارية السلسلة الزمنية

تُعتبر السلسلة Y_t مستقرة إذا تحققت الشروط التالية:

1. ثبات المتوسط عبر الزمن

$$E(Y_t) = E(Y_{t+h}) = \mu$$

2. ثبات التباين عبر الزمن

$$Var(Y_t) = Var(Y_{t+h}) = \sigma^2$$

3. استقلال التباين المشترك عن الزمن

$$Cov(Y_t, Y_{t+h}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+h} - \mu)] = \gamma_h$$

على الرغم من أن التمثيل البياني للسلسلة يعطي مؤشرات أولية، إلا أنه لا يكفي، ويجب الاعتماد على اختبارات إحصائية متخصصة لضمان الاستقرارية.

سلسلة التشويش الأبيض (Un Bruit Blanc)

تُعرف سلسلة الضجة البيضاء أو التشويش الأبيض بأنها تتابع من المشاهدات المستقلة فيما بينها، ولها توزيعات متطابقة بمتوسط معدوم وتباين ثابت .نرمز لها بالرمز (BB).

متوسط معلوم	ثبات التباين	تباين مشترك معلوم
$E(\varepsilon_t) = 0, \forall t$	$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2, \forall t$	$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0, \forall t \neq t'$

ملاحظة: من تعريف سلسلة الضجة البيضاء، فإن كل من الأمل والتباين والتباين المشترك لهذه السلسلة هي ثوابت ولا تختلف باختلاف الزمن، وبالتالي فهي تحقق شروط الاستقرارية .أي سلسلة تشويش أبيض هي مستقرة بالتعريف ولا تحتاج إلى إثبات ذلك.

دالة الارتباط الذاتي (FAC)

دالة الارتباط الذاتي (FAC) هي الدالة التي تقيس الارتباط بين السلسلة Y_t ونفس السلسلة بتأخير قدره h أي Y_{t-h}، ونرمز لها بالرمز ρ_h.

$$\rho_h = \frac{Cov\ (Y_t , Y_{t-h})}{\sigma Y_t \times \sigma Y_{t-h}}$$

و عملياً فإننا نستعمل مقدرة دالة الارتباط الذاتي و هي:

$$r_h = \hat{\rho}_h = \frac{\sum_{t=h+1}^{n} (Y_t - \overline{Y})(Y_{t-h} - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{n} (Y_t - \overline{Y})^2}$$

مثال 1

احسب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخيرات قدرها $h = 1, h = 2, h = 3$ أي r_1, r_2, r_3 للسلسلة التالية:

Obs	1	2	3	4	5	6
Y_t	12	11	10	10	8	9

حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير قدره $h = 1$ أي r_1

Obs	Y_t	Y_{t-1}	Y_t-m	Y_{t-1}-m	$(Y_t\text{-m})*(Y_{t-1}\text{-m})$	$(Y_t\text{-m})^2$
1	12		2.00			4.00
2	11	12	1.00	2.00	2.00	1.00
3	10	11	0.00	1.00	0.00	0.00
4	10	10	0.00	0.00	0.00	0.00
5	8	10	-2.00	0.00	0.00	4.00
6	9	8	-1.00	-2.00	2.00	1.00
m	**10.00**				**4.00**	**10.00**

حيث أن m تعبر عن متوسط Y

$$r_1 = \hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{6} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-1} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{6} (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{4}{10} = 0.4$$

حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير قدره $h = 2$ أي r_2

Obs	Y_t	Y_{t-2}	Y_t-m	Y_{t-2}-m	$(Y_t$-m)*(Y_{t-2}-m)
1	12		2.00		
2	11		1.00		
3	10	12	0.00	2	0
4	10	11	0.00	1	0
5	8	10	-2.00	0	0
6	9	10	-1.00	0	0
m	10.00				0

$$r_2 = \hat{\rho}_2 = \frac{\sum_{t=3}^{6} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-2} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{6} (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{0}{10} = 0$$

حساب قيمة دالة الارتباط الذاتي عند تأخير قدره $h = 3$ أي r_3

Obs	Y_t	Y_{t-3}	Y_t-m	Y_{t-3}-m	$(Y_t$-m)*(Y_{t-3}-m)
1	12		2		
2	11		1		
3	10		0		
4	10	12	0	2	0
5	8	11	-2	1	-2
6	9	10	-1	0	0
m	10.00				-2.00

$$r_3 = \hat{\rho}_3 = \frac{\sum_{t=4}^{6} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-3} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{6} (Y_t - \bar{Y})^2} = \frac{-2}{10} = -0.2$$

خواص وتحليل دالة الارتباط الذاتي (FAC)

تتميز دالة الارتباط الذاتي بعدة خواص أساسية:

- دالة الارتباط الذاتي متناظرة حول الصفر. $\rho(h)=\rho(-h)$
- دالة الارتباط الذاتي محصورة بين 1و -1.
- لما h=0 فإن $\rho_0 = 1$
- يسمى التمثيل البياني لقيم دالة الارتباط الذاتي **(Correlogramme)**، وتتراوح قيمته بين 1و -1

مجال الثقة لدالة الارتباط الذاتي

في حالة العينات الكبيرة (حجم العينة أكبر من 30)، فإن r_h تتوزع حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم، ونكتب:

$$r_h \to N\left(0, Var(r_h) = \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{h} r_i^2\right)\right)$$

مجال الثقة بمستوى معنوية 5%هو:

$$r_h \in \left[-1.96\sqrt{Var(r_h)}\ ,\ 1.96\sqrt{Var(r_h)}\right]$$

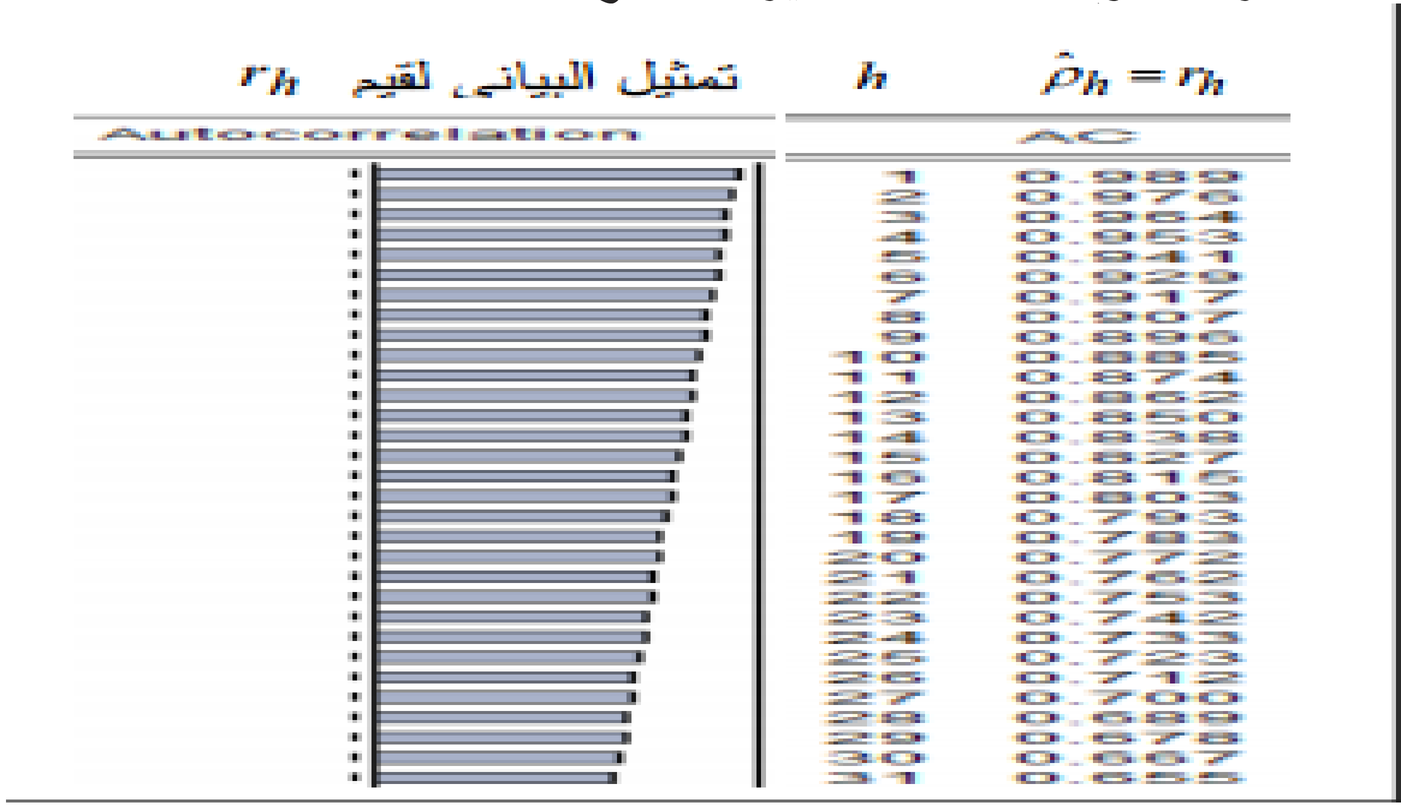
إذا وقعت r_h داخل مجال الثقة، نقبل فرضية العدم $(\rho_h = 0)$ إذا كانت جميع معاملات الارتباط داخل مجال الثقة

فهي احصائيا معدومة، وبالتالي تكون السلسلة بدون ذاكرة، ولا وجود لمركبة الاتجاه العام أو المركبة الفصلية، وبالتالي فهي مستقرة.

تحليل دالة الارتباط الذاتي لتحديد مركبات السلسلة

مركبة الاتجاه العام

إذا لاحظنا أن قيم دالة الارتباط الذاتي r_h تقع خارج مجال الثقة (ذات معنوية إحصائية تختلف عن الصفر) لكنها تتناقص ببطء مع ارتفاع قيم h، فهذا يوحي بوجود مركبة الاتجاه العام ضمن السلسلة المدروسة وبأن السلسلة غير مستقرة.



المركبة الفصلية

إذا كانت السلسلة ذات مشاهدات شهرية ولاحظنا أن r_{12} ,r_{24} , ... تختلف معنوياً عن الصفر (تقع خارج مجال الثقة)، فهذا يشير إلى وجود المركبة الفصلية ضمن السلسلة.

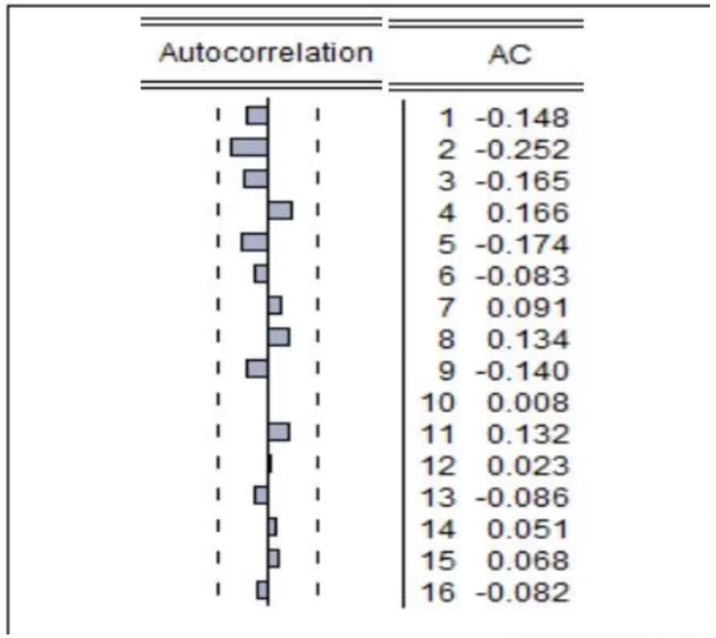
دالة الارتباط الذاتي للضجة البيضاء:

في حالة التشويش الأبيض، يكون التباين المشترك معدوما ($Cov(Y_t,Y_{t-h})$=0) وعليه، تكون دالة الارتباط الذاتي لهذا النوع من السلاسل كما يلي:

$$\rho_h = \begin{cases} 1 & ,h = 0 \\ 0 & ,h \neq 1 \end{cases}$$

هذا يعني أن الارتباط الذاتي يكون مساوياً للواحد عند التأخير h=0، ومعدوماً عند أي تأخير آخر.

التمثيل البياني لدالة الارتباط الذاتي للضجة البيضاء



- يوضح الشكل أن جميع قيم دالة الارتباط الذاتي من أجل تأخيرات غير معدومة للضجة البيضاء تقع داخل مجال الثقة، أي أنها ذات معنوية إحصائية معدومة . هذا يؤكد أن سلسلة الضجة البيضاء مستقرة ولا يوجد ارتباط بين مشاهداتها.
- تعتبر الضجة البيضاء الأساس الذي يُبنى عليه مفهوم الاستقرارية في السلاسل الزمنية.

دالة الارتباط الذاتي الجزئي (FACP)

إن دالة الارتباط الذاتي الجزئي (FACP) تقيس الارتباط بين السلسلة Y_t و نفس السلسلة بتأخير قدره h أي Y_{t-h} بعد إزالة تأثير الترابط الناتج عن القيم التي بينهما: $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots\ldots, Y_{t-h+1})$ و يرمز لها بالرمز ϕ_{hh} و نكتب:

لما $h = 0$ فان: $\hat{\phi}_{hh} = \hat{\phi}_{00} = 1$

لما $h = 1$ فان: $\hat{\phi}_{hh} = \hat{\phi}_{11} = r_1$

لما $h = 2,3,4,\ldots..$ فان: $\hat{\phi}_{hh} = r_{hh} = \dfrac{|P_h^*|}{|P_h|}$

$|\;\;|$ يرمز إلى محدّد المصفوفة و P_h هي مصفوفة مربعة ذات البعد h.

Made with GAMMA

مثال تطبيقي: حساب FACP عند h=2

باستخدام قيم دالة الارتباط الذاتي من المثال 1(r1 = 0.4, r2 = 0) :

$$\hat{\phi}_{22} = r_{22} = \frac{r\_2 - r\_1^2}{1 - r\_1^2} = \frac{0 - (0.4)^2}{1 - (0.4)^2} = -0.19$$

مجال الثقة لدالة الارتباط الذاتي الجزئي:

في حالة العينات الكبيرة، تتوزع r_{hh} حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط معدوم، ويكون مجال الثقة بمستوى معنوية 5% هو:

$$r\_hh \in [-1.96\frac{1}{\sqrt{n}}, 1.96\frac{1}{\sqrt{n}}]$$

إذا وقعت r_{hh} داخل مجال الثقة، نقبل فرضية العدم التي تنص على أن $\varphi_{hh} = 0$ بمستوى معنوية 5%.

توصيف حالات النماذج غير المستقرة:

تُسمى اختبارات الاستقرارية باختبارات جذر الوحدة (Unit Root Tests)، ومن أهمها : ديكي فولر (DF)، ديكي فولر المطور (ADF)، فيليبس بيرون (PP)، و (KPSS). لا يقتصر دور هذه الاختبارات على الكشف عن استقرارية السلسلة فحسب، بل تحدد أيضاً سبب عدم الاستقرارية والطريقة المثلى لجعل السلسلة مستقرة.

أ/ نموذج TS (Trend Stationary)

هذا النوع من النماذج يأخذ الشكل التالي: $Y_t = f(t) + \xi_t = a_0 + a_1 t + \xi_t$

حيث: ξ_t تشويش أبيض و $f(t)$ دالة الزمن.

أي أن السلسلة Y_t غير مستقرة ومرتبطة بالزمن، ويتم التخلص من عدم استقراريتها بواسطة تقدير a_0 وa_1 بواسطة طريقة المربعات الصغيرة ols. ومن ثم نزع مركبة الزمن من السلسلة الأصلية كما يلي:

$$Y_t - (a_0 + a_1 t)$$

ب/ نموذج DS (Differency Stationary)

يكتب هذا النوع من النماذج على النحو التالي:

$$Y_t = C + Y_{t-1} + \xi_t$$

C ثابت.

هذا النوع من النماذج الأكثر استعمالاً و الأكثر شيوعاً في التطبيقات الاقتصادية.

على اعتبار أن سبب عدم الاستقرارية في هذا النوع من النماذج ناتج عن الاضطربات العشوائية.

يمكن كتابة النموذج كما يلي:

$$Y_t - Y_{t-1} = C + \xi_t = \Delta Y_t$$

اختبار ديكي – فولر البسيط:

تعمل اختبارات ديكي – فولر على البحث في الإستقرارية أو عدمها لسلسلة زمنية ما، وذلك بتحديد مركبة الإتجاه العام، سواء كانت تحديديه أو عشوائية.

الاختبار يكون كالتالي وهو مبني على نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى $AR(1)$:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \zeta_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + \zeta_t$$

الاختبار يرتكز على النماذج الثلاثة التالية:

النموذج1: $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \zeta_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + \zeta_t$

النموذج2: $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c + \zeta_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + c + \zeta_t$

النموذج3: $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + c + bt + \zeta_t \Leftrightarrow \Delta Y_t = (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + c + bt + \zeta_t$

حيث أن: ζ_t هو تشويش ابيض يخضع للتوزيع الطبيعي: $\zeta_t \rightarrow BB\left(0, \sigma_\zeta^2\right)$

و الفرضية المعدومة لهذا الاختبار تنص على أن السلسلة المدروسة Y_t تقبل جذر وحدة $\left(H_0 : \phi_1 = 1\right)$ وبالتالي فهي غير مستقرة.

و الإحصائية المحسوبة لهذا الاختبار هي:
$$t_{\hat{\phi}_1} = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}}$$

أما الإحصائية المجدولة لهذا الاختبار فلقد قام كل من ديكي و فولر بإنشاء جدول خاص بالاختبار و هذا بالاعتماد على مقاربة مونتي كارلو (Monte-Carlo)، و عن قاعدة القرار فان هذا الاختبار يختلف عن الاختبارات الأخرى فإذا كانت الإحصائية المحسوبة $t_{\hat{\phi}_1}$ اكبر من الإحصائية المجدولة نقبل الفرضية المعدومة و نقول أن السلسلة Y_t تملك جذر وحدة وبالتالي فهي غير مستقرة. و عملياً فإننا نعتمد على منهجية ديكي فولر الموضحة في الشكل15 من اجل اختبار استقرارية السلسلة المدروسة و تحديد سبب عدم الاستقرارية في حالة ثبوتها.

اختبار ديكي- فولر المطور:

في نماذج اختبار DF البسيط حد الخطأ العشوائي ε_t هو تشويش ابيض بالفرض، غير أن هذا عملياً غير محقق في كل الحالات، و عليه فان ديكي و فولر يقترحان في حالة و جود ارتباط ذاتي للأخطاء ضمن نماذج جذر الوحدة استعمال ΔY_{t-j} كمتغيرات مساعدة ضمن نماذج الاختبار يمكنها إصلاح الارتباط الذاتي للأخطاء، ويسمى هذا الاختبار بديكي فولر المطور ADF، و عليه فان نماذج هذا الاختبار تكون على النحو التالي:

النموذج4:
$$\Delta Y_t = (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta Y_{t-j+1} + \varepsilon_t$$

النموذج5:
$$\Delta Y_t = (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta Y_{t-j+1} + c + \varepsilon_t$$

النموذج6:
$$\Delta Y_t = (\phi_1 - 1)Y_{t-1} + \sum_{j=2}^{p} \phi_j \Delta Y_{t-j+1} + c + bt + \varepsilon_t$$

حيث أن: ε_t هو تشويش ابيض يخضع للتوزيع الطبيعي: $\varepsilon_t \to BBN\left(0, \sigma^2_\varepsilon\right)$

$(P-1)$ تمثل قيمة التأخير اللازمة لتصحيح مشكل الارتباط الذاتي للبواقي ضمن النماذج الثلاثة السابقة.

و تمم منهجية اختبار ديكي فولر المطور ADF بنفس طريقة اختبارDF، غير أن تحديد قيمة التأخير P اللازمة تتحدد على أساس تقليل قيم المعيارين: Akaike و Schwarz حيث أن:

- قيمة إحصائية معيار Akaike: $AIC = n \ln\left(\frac{SCR}{n}\right) + 2K$
- قيمة إحصائية معيار Schwarz: $SIC = n \ln\left(\frac{SCR}{n}\right) + K \ln(n)$

حيث أن: n : تمثل حجم عينة الدراسة، SCR مجموع مربعات البواقي، K عدد معلمات النموذج.

ويهدف من خلال اختبار معنوية المعلمة $\emptyset$ لإثبات صحة إحدى الفرضيتين:

H_0: السلسلة غير مستقرة ($|\emptyset| = 1$)؛

H_1: السلسلة مستقرة ($|\emptyset| < 1$).

- يتم مقارنة إحصائية الاختبار بالقيم الحرجة (critical values) من جدول اختبار ديكيفولر.

إذا كانت إحصائية الاختبار أقل من القيمة الحرجة، فإننا نرفض الفرضية الصفرية، مما يعني أن السلسلة الزمنية مستقرة.

- يتم مقارنة القيم المطلقة لـ(t) المحسوبة بالقيم المطلقة لـ(t) الجدولية عند مستوى المعنوية 1%، 5%، 10% وهذا حسب اختيار الباحث وهدف البحث، والنتائج المراد التوصل إليها.