Équation de Klein-Gordon

4.1 Introduction

Afin de décrire des particules quantiques de spin nul et ayant des vitesses relativistes, on introduit l'équation de Klein-Gordon. Cette dernière est l'équivalent relativiste de l'équation de Schrödinger donnée par,

$$H\psi = E\psi \tag{4.1}$$

En utilisant le principe d'équivalence, sa forme devient

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi, \qquad \overrightarrow{p} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla} \tag{4.2}$$

On sait que dans le cas des ondes planes, les fonctions $\psi(\overrightarrow{r}, t)$ qui sont solutions de l'équation de Schrodinger sont données par

$$\psi(\overrightarrow{r}, t) = e^{i\left(\frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}}{\hbar} - \frac{E\cdot t}{\hbar}\right)} \tag{4.3}$$

On va essayer dans ce qui suit de trouver la forme générale de l'équation de Klein-Gordon, nous permettant de décrire le mouvement de particules libres, de spin nul et ayant des vitesse relativistes, en démarrant de l'équation de Schrodinger.

4.2 Quadri-vecteurs en théorie des champs

Rappelons que l'énergie relativiste d'une particule libre est donnée par

$$E = \sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4} \tag{4.4}$$

- $\overrightarrow{p}$: impulsion

- c : vitesse de la lumière
- m : masse de la particule

Le quadri-vecteur énergie-impulsion $\overrightarrow{P}$ est définit par,

$$\overrightarrow{\mathbf{P}} = \left(\overrightarrow{p}, \frac{E}{c}\right) \tag{4.5}$$

En théorie des champs, on utilise la convention d'Einstein. Si $\overrightarrow{A}$ est un quadri-vecteur, on le note A_μ avec $\mu = 1, 2, 3, 4$. Le quadri-vecteur A_μ a les composantes suivantes:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ia_4 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Si on calcule le produit scalaire de deux quadri-vecteurs A_μ et B_ν, on trouve

$$A_\mu B_\nu = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ia_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ib_4 \end{pmatrix} = +a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - a_4 b_4 \tag{4.7}$$

Ce produit scalaire vérifie la métrique de l'espace de Minkowski $(+, +, +, -)$.
Donc, en théorie des champs, le quadri-vecteur énergie-impulsion s'écrit:

$$P_\mu = \left(\overrightarrow{p}, i\frac{E}{c}\right) \tag{4.8}$$

Rappelons aussi qu'en mécanique quantique, que E et $\overrightarrow{p}$ sont définit par:

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad\qquad \overrightarrow{p} \to -i\hbar\overrightarrow{\nabla} \tag{4.9}$$

En remplaçant (4.9) dans (4.8), on trouve

$$P_\mu = \left(-i\hbar\overrightarrow{\nabla}, i\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) = -i\hbar\left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{4.10}$$

Si on pose,

$$\partial_\mu = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{4.11}$$

où ∂_μ représente le quadri-vecteur dérivée spatio-temporelle, on trouve

$$P_\mu = -i\hbar\partial_\mu \tag{4.12}$$

4.3 Équation de Klein-Gordon libre

Trouvons maintenant l'équation de Klein-Gordon libre décrivant le mouvement (déplacement) d'une particule quantique, de spin nul et de vitesse relativiste.
En mécanique quantique, une particule libre est décrite par l'équation d'évolution de Schrodinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\overrightarrow{r},t) = E\phi(\overrightarrow{r},t) \quad \text{où} \quad E = H = E_c + V = E_c + 0 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{avec} \quad v << c \tag{4.13}$$

Pour une particule relativiste libre

$$E_R = \sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4} \tag{4.14}$$

La dynamique de ces particules relativistes sera décrite par l'équation suivante

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\overrightarrow{r},t) = E_R \quad \phi(\overrightarrow{r},t) = \sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4} \quad \phi(\overrightarrow{r},t) \tag{4.15}$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi(\overrightarrow{r},t) = \left(\sqrt{\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4}\right)^2 \quad \phi(\overrightarrow{r},t) \tag{4.16}$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r},t) = \left(\overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4\right) \quad \phi(\overrightarrow{r},t) \tag{4.17}$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r},t) = \left(\left(-i\hbar\overrightarrow{\nabla}\right)^2 c^2 + m^2c^4\right) \quad \phi(\overrightarrow{r},t) \tag{4.18}$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r},t) = \left(\left(-i\hbar\overrightarrow{\nabla}\right)^2 c^2 + m^2c^4\right) \quad \phi(\overrightarrow{r},t) \tag{4.19}$$

$$\frac{-\hbar^2}{\hbar^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\phi(\overrightarrow{r},t) + \frac{\hbar^2\overrightarrow{\nabla}^2c^2}{\hbar^2c^2} \quad \phi(\overrightarrow{r},t) - \frac{m^2c^4}{\hbar^2c^2} \quad \phi(\overrightarrow{r},t) = 0 \tag{4.20}$$

Si on pose $\overrightarrow{\nabla}^2 = \Delta$, on retrouve l'équation suivante

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) = 0 \tag{4.21}$$

Cette dernière équation représente l'équation de Klein-Gordon libre écrite dans l'espace réel. Cherchons la forme de cette équation dans l'espace de Minkowski.
On a

$$\partial_\mu = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \Longrightarrow \partial_\mu^2 = \partial_\mu \cdot \partial_\mu = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{4.22}$$

$$\partial_\mu^2 = \left(\Delta, -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\right) = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} \tag{4.23}$$

En remplaçant (4.23) dans (4.21), on trouve

$$\left(\partial_\mu^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) = 0 \tag{4.24}$$

Si on pose $\hbar = c = 1$ et $(\overrightarrow{r}, t) = x_\mu$ où x_μ représente un point de l'espace de Minkowski et $\mu = 1, 2, 3, 4$, l'équation (4.24) devient

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2\right) \phi(x_\mu) = 0 \tag{4.25}$$

Cette équation représente l'équation de Klein-Gordon libre écrite dans l'espace de Minkowski.

4.4 Équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Cette équation permet de décrire une particule de charge q interagissant avec le champ électromagnétique extérieur, représenté par le quadri-vecteur potentiel $A_\mu = \left(\overrightarrow{A}, i\frac{\phi}{c}\right)$.
Afin d'avoir l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur, on utilise la méthode du couplage minimale, qui consiste à remplacer l'impulsion et l'énergie $(\overrightarrow{p}, E)$ par

$$E \to E - q\phi \qquad\qquad \overrightarrow{p} \to \overrightarrow{p} - q\overrightarrow{A} \tag{4.26}$$

dans l'équation de Klein-Gordon libre. La transformation donnée dans l'équation (4.26) peut être réécrite en utilisant les quadri-vecteurs. Sa forme est donnée par:

$$P_\mu \to P_\mu - qA_\mu \tag{4.27}$$

<u>Exercice</u> 6 :

– Montrer que les deux transformations données dans les deux équation (4.26) et (4.27) sont équivalentes.

On a

$$P_\mu = -i\hbar\,\partial_\mu \Longrightarrow P_\mu = -i\,\partial_\mu \quad \text{pour } \hbar = 1 \tag{4.28}$$

La transformation (4.27) devient alors,

$$-i\,\partial_\mu \to -i\,\partial_\mu - qA_\mu \Longrightarrow \partial_\mu \to \partial_\mu - iqA_\mu \Longrightarrow \partial_\mu \cdot \partial_\mu \to \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) \tag{4.29}$$

Si on remplace dans l'équation de Klein-Gordon libre

$$\left[\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu - iqA_\mu\right) - m^2\right]\phi(x_\mu) = 0 \tag{4.30}$$

Cette équation est appelée, équation de Klein-Gordon en présence d'un champs électromagnétique extérieur A_μ. Si on pose $D_\mu = \left(\partial_\mu - iqA_\mu\right)$, alors l'équation (4.30) s'écrit

$$\left[D_\mu D_\mu - m^2\right]\phi(x_\mu) = 0 \tag{4.31}$$

Le conjugué de cette dernière équation est donné par

$$\left[D^*_\mu D^*_\mu - m^2\right]\phi^*(x_\mu) = 0 \Longrightarrow \left[\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right)\left(\partial_\mu + iqA_\mu\right) - m^2\right]\phi^*(x_\mu) = 0 \tag{4.32}$$

<u>Exercice</u> 7 :

En présence d'un champ électromagnétique extérieur $A_\mu(\overrightarrow{A}, iV)$, le mouvement d'une particule de masse m, de spin nul et de vitesse relativiste c est décrit par l'équation Klein-Gordon suivante

$$\left[(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\mu - iqA_\mu) - m^2\right]\phi(x_\mu) = 0$$

- Montrer que cette équation est invariante dans la transformation de jauge suivante

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x_\mu) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x_\mu) = e^{-iq\alpha(x_\mu)}\phi(x_\mu) \quad , \quad \phi(x_\mu), \alpha(x_\mu) \text{ sont deux réels arbitraires.} \end{cases}$$

Exercice 8 :

L'équation de Klein-Gordon décrivant le mouvement d'une particule relativiste, de masse m, de charge q et en présence d'un champ électromagnétique-magnétique extérieur $A_\mu(\overrightarrow{A}, i\phi)$ est donnée

$$\left[(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\mu - iqA_\mu) - m^2\right]\psi(x) = 0$$

Trouver l'expression du quadri-vecteur courant de Klein-Gordon J_μ qui est solution de l'équation

$$\partial_\mu J_\mu = 0$$

On donne : $(\partial_\mu^* - iqA_\mu^*)(\partial_\mu^* - iqA_\mu^*) = (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu)$

4.5 Solutions de l'équation de Klein-Gordon libre

L'équation de Klein-Gordon libre est donnée par

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2\right)\phi(x_\mu) = 0 \quad \text{qu'on peut écrire} \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \quad \phi(\overrightarrow{r}, t) = 0 \tag{4.33}$$

Cette équation admet une solution en états stationnaires. Sa forme générale est donnée par,

$$\phi(\overrightarrow{r}, t) = f(t)\cdot\psi(\overrightarrow{r}) \tag{4.34}$$

On dit qu'une solution en états stationnaires est une solution à variables séparables. Remplaçons (4.34) dans (4.33), on trouve

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \quad f(t)\cdot\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{4.35}$$

$$f(t)\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \psi(\overrightarrow{r})\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}f(t)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{4.36}$$

Si on divise toute l'équation sur $f(t)\psi(\overrightarrow{r})$, on trouve

$$\frac{f(t)\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{f(t)\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{1}{f(t)\psi(\overrightarrow{r})}\psi(\overrightarrow{r})\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) - \frac{1}{f(t)\psi(\overrightarrow{r})}\frac{m^2c^2}{\hbar^2}f(t)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{4.37}$$

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{1}{f(t)}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = 0 \tag{4.38}$$

Cette équation est une équation du second ordre à deux variables indépendantes.

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \frac{1}{c^2}\frac{f''(t)}{f(t)} = \text{constante}, \quad \text{avec} \quad f'' = \frac{\partial^2}{\partial^2 t}f(t) \tag{4.39}$$

Si on pose $constante = \omega^2$, on retrouve

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \frac{1}{c^2}\frac{f''(t)}{f(t)} = \omega^2 \tag{4.40}$$

A partir de cette équation on obtient les deux équations suivantes:

$$\frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = \omega^2 \Longrightarrow \frac{\Delta\psi(\overrightarrow{r})}{\psi(\overrightarrow{r})} = \omega^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \Longrightarrow \Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\omega^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{4.41}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{f''(t)}{f(t)} = \omega^2 \Longrightarrow \frac{f''(t)}{f(t)} = c^2\omega^2 \Longrightarrow f''(t) = c^2\omega^2 f(t) \Longrightarrow f''(t) - c^2\omega^2 f(t) = 0 \tag{4.42}$$

L'équation (4.42) peut s'écrire sous la forme générale suivante

$$f''(t) \pm (c\omega)^2 f(t) = 0 \tag{4.43}$$

L'équation (4.42) admet alors des solutions de la forme

$$f(t) = A\, e^{c\omega t} + B\, e^{-c\omega t} \tag{4.44}$$

Pour avoir des solutions continues partout, on pose

$$c\,\omega = \frac{i\,E}{\hbar}, \quad E \text{ est un réel.} \tag{4.45}$$

On remplaçant (4.44) dans (4.45), on trouve

$$f(t) = A\, e^{\frac{i\,E}{\hbar}t} + B\, e^{-\frac{i\,E}{\hbar}t} \tag{4.46}$$

On a

$$c\,\omega = \frac{i\,E}{\hbar} \Longrightarrow c^2\,\omega^2 = -\frac{E^2}{\hbar^2} \Longrightarrow \omega^2 = -\frac{E^2}{c^2\hbar^2} \tag{4.47}$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (4.41)

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(-\frac{E^2}{c^2\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \tag{4.48}$$

En réduisant au même dénominateur, on trouve

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(-\frac{E^2}{c^2\hbar^2} + \frac{m^2c^4}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{-E^2 + m^2c^4}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{4.49}$$

Or,

$$E^2 = \overrightarrow{p}^2c^2 + m^2c^4 \Longrightarrow -\overrightarrow{p}^2c^2 = -E^2 + m^2c^4 \tag{4.50}$$

En remplaçons dans l'équation précédente, on trouve

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{-\overrightarrow{p}^2c^2}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{-\overrightarrow{p}^2}{\hbar^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \Longrightarrow \tag{4.51}$$

$$\Delta\psi(\overrightarrow{r}) - \left(\frac{i\,\overrightarrow{p}}{\hbar}\right)^2\psi(\overrightarrow{r}) = 0 \tag{4.52}$$

Cette équation admet des solutions de la forme suivante

$$\psi(\overrightarrow{r}) = C\,e^{\frac{i\,\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}{\hbar}} + D\,e^{-\frac{i\,\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}{\hbar}} \tag{4.53}$$

4.6 Interprétation physique des solutions de l'équation de Klein-Gordon libre

Pour donner un sens physique aux solutions, on pose

- $e^{-\frac{i\,E}{\hbar}t}$ représente une particule créée dans le passé $(-\infty)$ et qui voyage vers le futur $(+\infty)$
- $e^{\frac{i\,E}{\hbar}t}$ représente une particule créée dans le futur $(+\infty)$ et qui voyage vers le passé $(-\infty)$.
- A représente la probabilité pour que la particule soit crée dans le futur $(+\infty)$ et qui voyage vers le passé $(-\infty)$.

- B représente la probabilité pour que la particule soit crée dans le passé $(-\infty)$ et qui voyage vers le futur $(+\infty)$.

Donc, la solution physique est donnée par

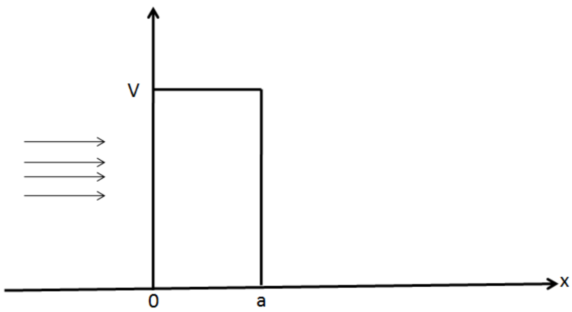
$$f(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \tag{4.54}$$

Où la probabilité B pour que la particule est créée dans le passé et elle voyage vers le futur est égale à 1. Donc la probabilité A pour que la particule est créée dans le futur et elle voyage vers le passé est égale à 0. La solution Finale est donnée par

$$\phi(\overrightarrow{r},t) = f(t)\cdot\psi(\overrightarrow{r}) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t}\left(C\,e^{\frac{i\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}{\hbar}} + D\,e^{-\frac{i\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}{\hbar}}\right) \tag{4.55}$$

<u>Exercice</u> 9 :

Des particules de spin 0, de charge q et de masse m sont incidentes de $(+\infty)$ vers $(-\infty)$ sur une barrière de potentiel de hauteur V et de largeur a. Sachant que l'énergie de ces particules est donnée par $E = qV/2$, tel que $qV > 2mc^2$,



1. Calculer les coefficients de transmission T et de réflexion R.
2. Calculer la densité de courant J_x dans chaque région.

<u>Indication</u>: travailler à une dimension.