Rappels de relativité restreinte

2.1 Rappel sur les lois de l'électromagnétisme

2.1.1 Équations de Maxwell

Les lois de l'électromagnétisme peuvent être exprimées

- Soit en fonction des champs électrique ($\overrightarrow{E}$) et magnétique ($\overrightarrow{B}$).
- Soit en fonction des potentiels scalaires ($\overrightarrow{A}$) et scalaire (ϕ).

Maxwell a exprimé les lois de l'électromagnétisme sous la forme de quatre équations suivantes:

$$div \cdot \overrightarrow{D} = \rho \tag{2.1}$$

$$div \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{H} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{2.4}$$

Les équations (2.1), (2.3), (2.4) représentent respectivement la loi de Gauss, la loi de Maxwell-Ampère et la loi de Lenz-Faraday.

- $\overrightarrow{D}$ est le vecteur déplacement électrique.
- $\overrightarrow{H}$ est le vecteur champ d'excitation.
- ρ est une densité de charge électrique.
- $\overrightarrow{j}$ est un courant de charge électrique.

Ces vecteurs sont reliés aux champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$ par les équations suivantes:

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon \overrightarrow{E} \tag{2.5}$$

$$\overrightarrow{B} = \mu \overrightarrow{H} \tag{2.6}$$

Où ε est la permittivité diélectrique et μ la perméabilité magnétique du milieu. Dans le vide, les équations (2.5) et (2.6) deviennent

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon_o \overrightarrow{E} \tag{2.7}$$

$$\overrightarrow{B} = \mu_o \overrightarrow{H} \Longrightarrow \overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_o} \tag{2.8}$$

Où ε_o et μ_o sont deux constantes données respectivement par: $\varepsilon_o = 8.854\,\mathrm{pF\,m^{-1}}$ et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{Henry/meter}$.
En introduisant l'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$, les équations précédentes deviennent:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{D} = \rho \tag{2.9}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{2.10}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{H} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \tag{2.11}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{2.12}$$

En remplaçant les équations (2.7) et (2.8) dans les équations (2.9), (2.10), (2.11) et (2.12), on retrouve:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot (\epsilon_o \overrightarrow{E}) = \rho \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \tag{2.13}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{2.14}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{B}}{\mu_o}\right) = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\epsilon_o E}\right) \Longrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_o \vec{j} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2.15}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.16}$$

La force de Lorentz qui agit sur une particule de charge q et animée d'une vitesse $\vec{V}$ est donnée par

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \tag{2.17}$$

L'équation de conservation de la charge est donnée par,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2.18}$$

Ramarque:

- Les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge électrique sont valables en tout points du milieu et à tout instants. Elles sont, donc, des équations locales.

2.1.2 Potentiels vecteur et scalaire

Les champs magnétique $\vec{B}$ et électrique $\vec{E}$ dérivent des potentiels de Lorentz $\vec{A}$ et ϕ, où

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{2.19}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} \tag{2.20}$$

Ces dernières équations peuvent être réécrites en fonction de $\vec{\nabla}$,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{2.21}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \tag{2.22}$$

Ramarque:

Dans le vide, les potentiels vecteurs $\overrightarrow{A}$ et scalaire ϕ vérifient l'équation suivante:

$$div\overrightarrow{A} + \mu_o\epsilon_o\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{2.23}$$

Cette équation est appelée "Jauge de Lorentz". Cette équation peut être écrite en fonction de $\overrightarrow{\nabla}$,

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + \mu_o\epsilon_o\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{2.24}$$

On a,

$$\mu_o\epsilon_o c^2 = 1 \Longrightarrow c = 1/\sqrt{\mu_o\epsilon_o} \tag{2.25}$$

En utilisant les équations de Maxwell et de la jauge de Lorentz, on obtient:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 t} = 0 \tag{2.26}$$

$$\Delta\overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial^2 t} = 0 \tag{2.27}$$

La résolution des ces deux équations permet d'avoir les valeurs des potentiels ϕ et $\overrightarrow{A}$.

2.2 Analyse vectorielle dans l'espace de Minkowski

On introduit dans l'espace à quatre dimensions de Minkowski, l'opérateur "quadi-nabla", qu'on définit de la façon suivante:

$$\overrightarrow{\partial} = \left(\overrightarrow{\nabla}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{2.28}$$

de composantes,

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \partial_4 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.29}$$

2.2.1 Quadri-divergence et quadri-gradient

Soit le quadri-vecteur $\overrightarrow{A}$, de composantes:

$$\overrightarrow{A} = (a_x, a_y, a_z, a_4) = (\overrightarrow{a}, a_4) \quad \text{où} \quad \overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z) \tag{2.30}$$

La métrique de l'espace de Minkowski est donnée par $(+,+,+,-)$. Donc, le produit scalaire de deux quadri-vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est donné par

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\\a_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\\b_4\end{pmatrix}=+a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z-a_4b_4 \tag{2.31}$$

La quadri-divergence d'un quadri-vecteur $\overrightarrow{V}$ est donnée par

$$\overrightarrow{\partial}\cdot\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\\-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\\v_4\end{pmatrix}=+\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial v_4}{\partial t} \tag{2.32}$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme,

$$\overrightarrow{\partial}\cdot\overrightarrow{V}=\left(\overrightarrow{\partial},-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot(\overrightarrow{v},v_4)=\left(\overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{v},-\frac{1}{c}\frac{\partial v_4}{\partial t}\right) \tag{2.33}$$

De la même façon on définit le quadri-gradient d'une fonction scalaire ϕ par,

$$\overrightarrow{\partial}\phi=\left(\overrightarrow{\partial}\phi,-\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \tag{2.34}$$

2.2.2 Quadri-vecteur densité de courant

L'équation (2.18) exprime le principe de conservation de la charge. Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j}=0\Longrightarrow\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(c\rho)=0 \tag{2.35}$$

qu'en peut écrire sous la forme:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}-\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)(c\rho)=0\Longrightarrow\left(\overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{j},-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\rho c)\right)=0 \tag{2.36}$$

Cette équation apparait comme la quadri-divergence d'un quadri-vecteur

$$\left(\overrightarrow{\partial}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\overrightarrow{j}, \rho c\right) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{J} = 0 \tag{2.37}$$

L'équation (2.37) représente l'écriture de l'équation de conservation de la charge dans l'espace de Minkowski et le quadri-vecteur courant est donné par,

$$\overrightarrow{J} = \left(\overrightarrow{j}, \rho c\right) \tag{2.38}$$

2.2.3 Quadri-vecteur potentiel

La jauge de Lorentz donnée dans l'équation (2.24) peut être réécrite comme suit,

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{c}\right) = 0 \tag{2.39}$$

qu'en peut écrire sous la forme:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} - \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\phi}{c}\right) = 0 \Longrightarrow \left(\overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{A}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\phi}{c}\right) = 0 \tag{2.40}$$

Cette équation apparait comme la quadri-divergence d'un quadri-vecteur

$$\left(\overrightarrow{\partial}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\overrightarrow{A}, \frac{\phi}{c}\right) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{\partial}\,\overrightarrow{\mathbf{A}} = 0 \tag{2.41}$$

L'équation (2.41) représente l'écriture de la jauge de Lorentz dans l'espace de Minkowski et le quadri-vecteur potentiel est donné par,

$$\overrightarrow{\mathbf{A}} = \left(\overrightarrow{A}, \frac{\phi}{c}\right) \tag{2.42}$$

2.2.4 Tenseur champ électromagnétique

Les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont donnés en fonction des potentiels ϕ et $\overrightarrow{A}$ par les deux équations (2.21) et (2.22).
L'écriture de l'équation (2.21) dans l'espace à trois dimensions donne:

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \Longrightarrow \tag{2.43}$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{2.44}$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \tag{2.45}$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{2.46}$$

Ces dernières équations peuvent être réécrite sous la forme suivante:

$$E_x = -c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi}{c}\right) - c\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{2.47}$$

$$E_y = -c\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\phi}{c}\right) - c\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} \tag{2.48}$$

$$E_z = -c\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\phi}{c}\right) - c\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{2.49}$$

Maintenant, en prenant c en facteur, on retrouve:

$$\frac{E_x}{c} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{2.50}$$

$$\frac{E_y}{c} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\phi}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} \tag{2.51}$$

$$\frac{E_z}{c} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\phi}{c}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{2.52}$$

L'écriture de l'équation (2.22) dans l'espace à trois dimensions donne:

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \Longrightarrow \tag{2.53}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \tag{2.54}$$

$$B_y = -\left[\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right] \Longrightarrow B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{2.55}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{2.56}$$

2.2.5 Changement de variable

Un point de l'espace de Minkowski est représenté par le quadri-vecteur position

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

Faisons les changement des variables suivant:

$$\left\{\begin{array}{r} x = x_1 \\ y = x_2 \\ z = x_3 \\ ct = -x_4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_4} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} \frac{\partial}{\partial x_1} = \partial_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} = \partial_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} = \partial_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_4} = \partial_4 \Longrightarrow \partial_4 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \end{array}\right. \tag{2.58}$$

$$\left\{\begin{array}{r} A_x = A_1 \\ A_y = A_2 \\ A_z = A_3 \\ \frac{\phi}{c} = A_4 \end{array}\right. \tag{2.59}$$

Les équations (2.50), (2.51), (2.52), (2.54), (2.55) et (2.56) deviennent,

$$\frac{E_x}{c} = -\partial_1 A_4 + \partial_4 A_1 \tag{2.60}$$

$$\frac{E_y}{c} = -\partial_2 A_4 + \partial_4 A_2 \tag{2.61}$$

$$\frac{E_z}{c} = -\partial_3 A_4 + \partial_4 A_3 \tag{2.62}$$

$$B_x = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \tag{2.63}$$

$$B_y = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \tag{2.64}$$

$$B_z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \tag{2.65}$$

Ces six équations peuvent être écrite sous la forme générale suivante

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \tag{2.66}$$

Où les coefficients $F_{\mu\nu}$ sont les éléments de matrice d'un tenseur de l'espace de Minkowski, appelé "Tenseur champ électromagnétique" et donné par,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} \tag{2.67}$$

Le tenseur est antisymétrique $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ et $F^{\mu\mu} = 0$. Donc, les éléments de matrice du tenseur champ électromagnétique sont donnés par,

$$\frac{E_x}{c} = -\partial_1 A_4 + \partial_4 A_1 = F_{41} = -F_{14} \tag{2.68}$$

$$\frac{E_y}{c} = -\partial_2 A_4 + \partial_4 A_2 = F_{42} = -F_{24} \tag{2.69}$$

$$\frac{E_z}{c} = -\partial_3 A_4 + \partial_4 A_3 = F_{43} = -F_{34} \tag{2.70}$$

$$B_x = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = F_{23} = -F_{32} \tag{2.71}$$

$$B_y = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 = F_{31} = -F_{13} \tag{2.72}$$

$$B_z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = F_{12} = -F_{21} \tag{2.73}$$

Finalement, le tenseur champ électromagnétique est donné par,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.74}$$

Exercice 3 :

Les champs électrique et magnétique $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{B_1}$, mesurés par un observateur **O** lié à un repère Galilléen **R**, sont donnés en fonction des potentiels scalaire et vecteur $\phi_1, \overrightarrow{A_1}$ par les équations

$$\overrightarrow{E_1} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\phi_1 - \frac{\partial \overrightarrow{A_1}}{\partial t}, \quad \overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\overrightarrow{A_1}$$

1. Quelle sont les nouvelles valeurs des champs $\overrightarrow{E_1}'$ et $\overrightarrow{B_1}'$, mesurées par un observateur $\mathbf{O}'$ lié à un repère Galilléen $\mathbf{R}'$ en déplacement à une vitesse constante $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ par rapport à **R** ?
2. Retrouver les nouvelles composantes du tenseur électromagnétique dans le repère Galilléen $\mathbf{R}'$.

<u>Exercice</u> 4 :

- Retrouver le courant de probabilité de l'équation de Schrodinger $\overrightarrow{j}$ qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{j} = 0$$

<u>On donne</u> : $\rho = \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t)$