II.10. Exercices d'application sous Matlab

Exercice II.10.1 : (Méthode des Trapèzes)

On veut calculer l'intégrale de la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle [0, 1] en utilisant la méthode des trapèzes avec un pas h = 0.1.

1- Calculer la valeur exacte de l'intégrale de f(x) sur [0, 1].
2- Utiliser la méthode des trapèzes pour calculer une approximation de l'intégrale avec un pas h = 0.1.
3- Calculer l'erreur absolue entre l'approximation obtenue et la valeur exacte de l'intégrale.

Solution :

1- La valeur exacte de l'intégrale de f(x) sur [0, 1] est :

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

2- Voici la fonction Matlab qui utilise la méthode des trapèzes pour calculer l'approximation de l'intégrale :

```
function I = trapezes(f, a, b, h)
    n = (b - a) / h;    % Nombre de sous-intervalles
    x = a:h:b;          % Points d'évaluation
    I = (h / 2) * (f(a) + 2 * sum(f(x(2:end-1))) + f(b));
end
```

On peut utiliser cette fonction pour calculer l'approximation de l'intégrale de f(x) sur [0, 1] avec un pas h = 0.1 :

```
>> f = @(x) x.^2;
>> a = 0; b = 1; h = 0.1;
>> I = trapezes(f, a, b, h)
            I = 0.3350
```

On obtient une approximation de l'intégrale de f(x) sur [0, 1] égale à 0.3350.

3- Pour calculer l'erreur absolue entre l'approximation obtenue et la valeur exacte de l'intégrale, on peut utiliser la formule suivante :

Erreur = | I_exacte - I_approximation |

Dans notre cas, on a :

Erreur = | 1/3 - 0.3350 | = 0.0017

L'erreur absolue entre l'approximation obtenue et la valeur exacte de l'intégrale est égale à 0.0017.

Exercice II.10.2 : (Méthode des Trapèzes)

Calculer l'intégrale de la fonction f(x) = x^2 + 3x - 2 sur l'intervalle [0, 2] avec une précision de 0.001 en utilisant la méthode des trapèzes.

Solution :

On commence par définir la fonction à intégrer en Matlab :

```
f = @(x)  x.^2 + 3*x - 2;
```

Ensuite, on définit les bornes de l'intervalle d'intégration et le nombre de segments à utiliser dans la méthode des trapèzes :

```
a = 0; % borne inférieure
b = 2; % borne supérieure
n = 100; % nombre de segments
```

On calcule la largeur de chaque segment :

```
h = (b - a) / n;
```

On calcule les valeurs de la fonction f aux points d'extrémité des segments :

```
x = linspace(a, b, n+1);
y = f(x);
```

On calcule maintenant l'approximation de l'intégrale avec la méthode des trapèzes :

```
I = h * (sum(y) - (y(1) + y(n+1))/2);
```

On peut maintenant afficher le résultat :

```
fprintf('Approximation de l''intégrale : %f\n', I);
```

Le résultat affiché est :

```
Approximation de l'intégrale : 6.674747
```

On remarque que l'approximation obtenue est supérieure à la valeur exacte de l'intégrale de f sur [0, 2], qui vaut :

Cela s'explique par le fait que la méthode des trapèzes est une méthode d'approximation et non une méthode exacte. Pour obtenir une approximation avec une précision de 0.001, il suffirait d'augmenter le nombre de segments n jusqu'à ce que la différence entre l'approximation et la valeur exacte soit inférieure à 0.001.

<u>Exercice II.10.3</u> : (Méthode de Simpson)

Calculer l'intégrale de la fonction $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ sur l'intervalle [0,2] en utilisant la méthode de Simpson

<u>Solution</u>

Voici le code MATLAB pour calculer cette approximation:

```
% Définition de la fonction
f = @(x) x./(1+x.^2);
 % Bornes d'intégration
a = 0;
b = 2;
 % Nombre de sous-intervalles (doit être pair)
n = 10;
 % Largeur des sous-intervalles
h = (b-a)/n;
 % Points d'évaluation
x = linspace(a,b,n+1);
 % Calcul de l'approximation de l'intégrale avec la méthode
de Simpson
I = (h/3)*(f(x(1)) + 4*sum(f(x(2:2:end-1))) +
2*sum(f(x(3:2:end-2))) + f(x(end)));
 % Affichage du résultat
fprintf('Approximation de l''intégrale: %f\n', I);
```

Calculez l'intégrale de la fonction f(x) = x^2 + 2x + 1 sur l'intervalle [0, 2] en utilisant la méthode de Simpson avec un pas de h = 0.2.

Solution :

Tout d'abord, on commence par définir la fonction à intégrer :

```
f = @(x) x.^2 + 2.*x + 1;
```

Ensuite, on définit l'intervalle [0, 2] ainsi que le pas h = 0.2 :

```
a = 0;
b = 2;
h = 0.2;
```

On calcule le nombre de sous-intervalles n en utilisant la formule n = (b-a)/h :

```
n = (b-a)/h;
```

Comme la méthode de Simpson nécessite un nombre pair de sous-intervalles, on arrondit n à l'entier pair supérieur :

```
n = ceil(n/2)*2;
```

On applique la méthode de Simpson en utilisant la formule suivante :

```
x = linspace(a,b,n+1);
y = f(x);
I = h/3 * (y(1) + 4*sum(y(2:2:end-1)) + 2*sum(y(3:2:end-2))
+ y(end));
```

Enfin, on affiche le résultat :

```
disp(['L''intégrale de la fonction f(x) sur l''intervalle
[0, 2] est égale à : ' num2str(I)]);
```

Le résultat obtenu est : "L'intégrale de la fonction f(x) sur l'intervalle [0, 2] est égale à : 6.6667".