

IV. Résumé du chapitre IV : Résolution numérique des équations différentielles ordinaires

IV.1. Introduction

Les équations différentielles ordinaires (EDO) interviennent très souvent dans la modélisation de plusieurs phénomènes physiques. La solution d'une équation EDO est parfois difficile à résoudre en utilisant des méthodes analytiques, il est nécessaire donc de recourir à des méthodes numériques pour résoudre une telle équation.

IV.2. Problème de Cauchy

Le problème de CAUCHY consiste à trouver la solution $y(x)$ de l'EDO définie sur l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \quad \forall t_0 \in [a, b] \end{cases}$$

IV.1. Méthode d'Euler

IV.1.1. Principe

L'équation différentielle ordinaire du premier ordre prend la forme suivante :

$$y' = f(t, y(t)) \text{ ou bien } \frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

On remplace la dérivée y' par la formule de différences finies :

$$y' \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = f(t_n, y(t_n))$$

Tel que : $t_{n+1} - t_n = h$ (pas de discrétisation), il vient alors :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))$$

Ceci conduit à l'Algorithme d'Euler :

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \end{cases} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

IV.1.2. Méthode d'Euler modifiée (ou méthode de Heun)

Cette méthode prend la forme suivante:

$$\begin{cases} \hat{y} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \hat{y})) \end{cases} \text{ avec } 0 \leq n \leq N$$

IV.3. Méthodes de Runge-Kutta

Ces méthodes reposent sur le principe de l'itération, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation, plus précise, et ainsi de suite.

IV.3.1. Algorithme de Runge Kutta d'ordre 2

$$RK - 2 \begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ K_1 = f(t_n, y_n) \\ K_2 = f(t_{n+1}, y_n + hK_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \end{cases}$$

IV.3.2. Algorithme de Runge Kutta d'ordre 4

$$RK - 4 \begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ K_1 = f(t_n, y_n) \\ K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right) \\ K_4 = f(t_{n+1}, y_n + hK_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases}$$