III. Résumé du chapitre III : Résolution numérique des équations non linéaires

III.1. Introduction

Une équation a une inconnue x est dite non linéaire si elle est de la forme $f(x) = 0$ et la fonction $f(x)$ est non linéaire c'est-à-dire n'est pas de la forme de : $ax + b$.

Dans ce résumé nous nous intéressons à la recherche des racines d'une fonction d'une seule variable : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Généralement, les solutions explicites sont difficiles à obtenir analytiquement. Il est donc préférable de trouver des méthodes numériques consistantes qui conduisent à des solutions approchées.

III.2. Méthode de Dichotomie (ou de la Bissection)

Cette méthode consiste en une succession de divisions par deux de l'intervalle pour approcher de plus en plus la racine de l'équation $f(x) = 0$, jusqu'à ce qu'une précision ε soit atteinte.

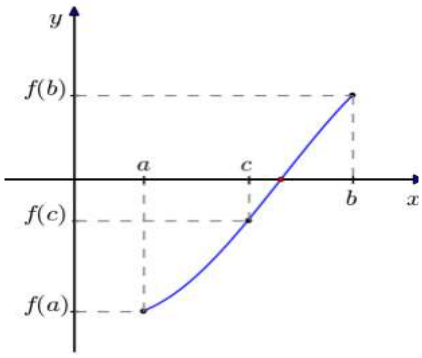

Figure 1. 1 : Principe de la méthode de Dichotomie

III.1.1. Hypothèses sur la fonction f

Soit : $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, vérifie les hypothèses suivantes :

L'existence : $-$ f est continue sur $[a, b]$.
$-$ $f(a)f(b) < 0$.
L'unicité: $-$ f est stirtment monotone sur $[a, b]$

III.1.2. Algorithme de Dichotomie

Entrée : $a < b, f$ continue avec $f(a)f(b) < 0$, précision ε
Tant que : $b - a > \varepsilon$ faire
$c \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$;
Si $f(a)f(c) < 0$ alors
$b \leftarrow c$;
Sinon
$a \leftarrow c$;
Fin si
Fin tant que
Retourner *a, b*
Sortie : Affichage de la solution de $f(x) = 0$

III.1.3. Test d'arrêt

L'algorithme donne une solution avec une précision ε fixée au départ ou un nombre d'itération : $N \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$.

III.3. Méthode des approximations successives (ou du point fixe)

Son principe est basé sur la construction d'une suite itérative qui se rapproche de plus en plus vers la racine exacte. Son premier élément, appelé valeur initiale, prend n'importe quel point de l'intervalle de travail $[a, b]$.

Cette méthode de point fixe s'applique à des équations de la forme : $x = \varphi(x)$, en isolant x de l'équation $f(x) = 0$.

III.3.1. *Hypothèses sur la fonction* $\boldsymbol{\varphi}$

Soit : $\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}$, vérifie les hypothèses suivantes :

φ est continue et dérivable sur $[a, b]$
φ prend ses valeur dans $[a, b]$ (stabilité)
$\exists\, M \in\,]0, 1[: \forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\ \ |\boldsymbol{\varphi}'| \leq \boldsymbol{M}$ (Contraction)

$\Longrightarrow \varphi$ converge vers la rcine r

Il en résulte donc : $r = \varphi(r) \Longrightarrow f(r) = 0$

III.3.2. *Majoration d'erreur*

$$
\begin{aligned}
|x_n - r| &= |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(r)| \\
&= \varphi'(\xi)(x_{n-1} - r) \\
&\leq M|x_{n-1} - r| \\
&\leq MM^{n-1}|x_0 - r| \\
&\leq M^n|x_0 - r| \\
&\leq M^n|b - a|
\end{aligned}
$$

La suite (x_n) converge donc vers r puisque M appartient à $]0, 1[$ qui donne :
$\lim_{n\to\infty} M^n \approx 0$

III.3.3. *Test d'arrêt*

Fixons $\varepsilon > 0$ et pour que x_n soit une valeur approchée de r à ε près, il suffit que :

$$M^n|b-a| \leq \varepsilon$$

Soit : $n \geq \frac{Ln(\varepsilon)-Ln|b-a|}{Ln(M)}$

III.3.4. *Comment choisir* $\boldsymbol{x_0}$ *garantissant la convergence*

Le bassin d'attraction d'un point fixe x^* se définit comme suit :

Un point fixe est **attractif** si : $|g'(x^*)| < 1$

Un point fixe est répulsif si : $|g'(x^*)| > 1$

Un point fixe est indéterminé (point douteux) si : $|g'(x^*)| = 1$

III.3.5. *Algorithme du point fixe*

Entrée : valeur initial x_0 et fonction g ;

Initialisation : $n \leftarrow 0$; $x \leftarrow x_0$;

Tant que condition d'arrêt * **faire**

$x \leftarrow g(x)$;

$n \leftarrow n + 1$;

Fin tant que

Retourner *n, x*

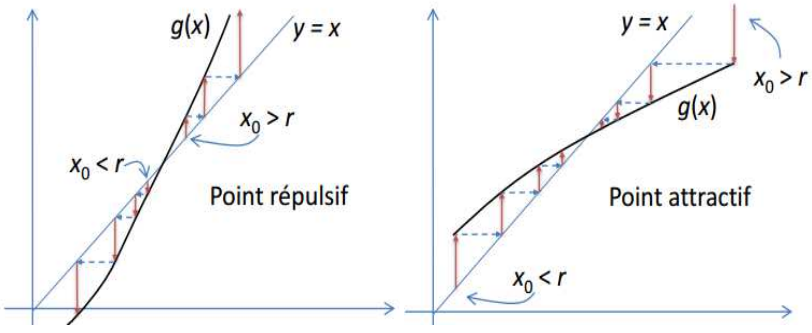

Figure 1. 2 : Principe de la méthode du point fixe

III.4. Méthode de Newton(ou de la tangente)

On considère l'équation suivante : $f(x) = 0, x \in [a, b]$.

L'idée principale de cette méthode revient à confondre la fonction f avec son développement limité à l'ordre 1 en x_0.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{lorsque } (x \to x_0)$$

Donc : $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$

Dont la solution est : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

x_1 est une première approximation de r. en réitérant le procédé précedente, on construit la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 \text{ choisie proche de } r \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0. \end{cases}$$

La méthode Newton est une méthode de point fixe ssociée à la fonction :$g: x \mapsto g(x) = x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

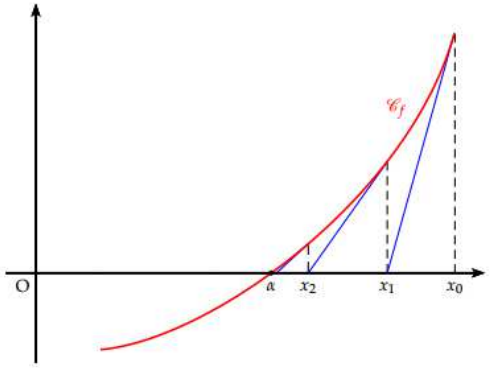

Figure 1. 3 : Principe de la méthode de Newton

III.4.1. Hypothèses sur la fonction f

On suppose que: $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, vérifie les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} f \text{ est continue et dérivable sur } [a, b] \\ f \text{ est strictement monotone sur } [a, b] \\ f(a).f(b) < 0 \\ f \text{ est dérivable sur } [a, b] \text{ et } f'(x) \neq 0 \text{ sur } [a, b] \end{cases}$$

III.4.2. Test d'arrêt

Les critères d'arret peuvent étre :

$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon$

$|f(x_n)| < \varepsilon$

III.4.3. Comment choisir x_0 garantissant la convergence

Pour bien choisir la valeur initiale x_0, on vérifie la condition suivante:

$f(x_0)f''(x_0) > 0$

III.4.4. Algorithme de Newton

Entrée : valeur initial x_0, fonction *f,* Tolérance *tol ;*

Initialisation : $n \leftarrow 0$; $x \leftarrow x_0$;

Tant que Condition d'arrêt **Faire**

$x \leftarrow x - \frac{f}{f'}$;

$n \leftarrow n + 1$;

Fin tant que

Retourner *n, x*

III.5. Comparaison entre les trois méthodes

- La méthode de Bissection est lente mais elle est sûre.
- Le mauvais choix de x_0 peut diverger la méthode du point fixe
- La méthode du point fixe converge à l'ordre *P* s'il y a une constante *C* telle que : $|e_{n+1}| \approx C|e_n|^P$.
- La convergence de méthode de Newton est quadratique.
- Les méthodes de Newton et du point ne convergent que dans certaines conditions de départ et devergent autrement

III.6. Conclusion

Le choix d'une méthode est conditionné par les réponses aux questions suivantes :

- La suite (x_n) converge-t-elle ?
- Si la suite converge, sa limite est-elle r ?
- Si on veut la solution avec une approximation ε, comment arrêter les itérations dés que cette condition est vérifiée ?
- Si on désire obtenir rapidement la solution approchée, comment estimer la manière dont évolue l'erreur : $e = |x_n - \alpha|$?