II. Résumé du chapitre II : Intégration numérique

II.1. Description du problème

Soit f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, parfois le calcul de la primitive de f est difficile, donc on est obligé d'utiliser des méthodes d'intégration numérique pour approcher la valeur de $\int_a^b f(x)dt$.

L'intégration numérique est basée principalement sur la relation :

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)dx + \int_{x_0}^{x_n} E_n(x)dx$$

$P_n(x)$: Polynôme d'interpolation

$E_n(x)$: L'erreur qui est y associée

$n \in N^*$

II.2. Principe

On découpe l'intervalle $[a, b]$ en n petits intervalles.

On trouve un polynôme $P_n(x) \approx f(x)$ pour chaque sous intervalle.

On intègre $P_n(x)$ dans chaque sous intervalle et on les additionne.

II.3. Méthode des rectangles

II.3.1. Formules simples

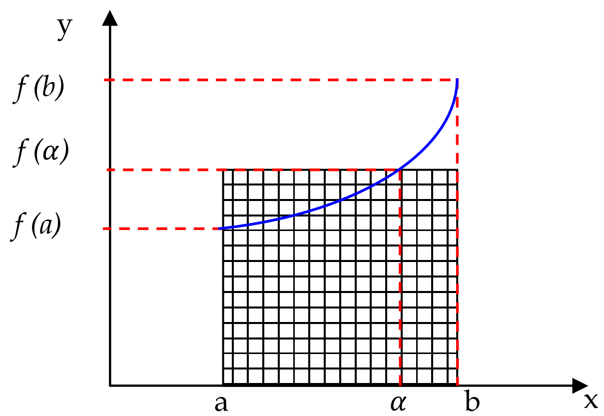


Figure 2.1 : Méthode simple des rectangles

Admettons que f est connue en un point $\alpha \in [a, b]$. Le polynôme d'interpolation de f est la constante $P_0(x) = f(\alpha)$, I est donc approché par:

$$I_0 = \int_a^b P_0(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\alpha)$$

Dans le cas où le point α est le milieu de $[a, b]$: $\alpha = \frac{a+b}{2}$

On obtient : $I_0 = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, c'est la formule simple des rectangles au point milieu.

II.3.2. Formules composites

On généralise les formules précédentes à (n+1) points équidistants

$$x_0 = a, x_1 = a+h, \ldots, x_i = a+ih, \ldots, x_n = b$$

Où : $h = \dfrac{b-a}{n}$

On applique le même principe d'interpolation de degré 0 sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

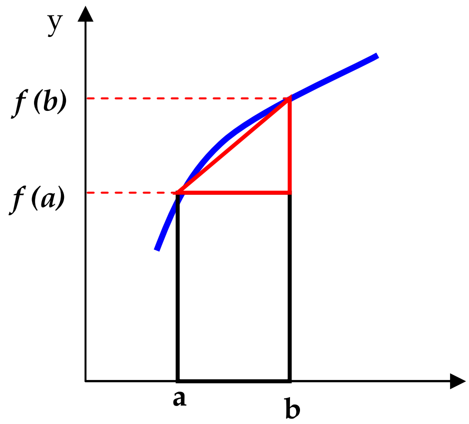
On détermine alors $f(x)$ par $P_0(x) = f(\alpha_i)$ lorsque $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

La formule composite des rectangles s'écrit donc : $I_R = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\alpha_i)dt = \dfrac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)$

Et pour des rectangles point-milieu : $I_M = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dt = \dfrac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$

II.4. Méthode des Trapèzes

II.4.1. Formules simples



Cette méthode consiste à remplacer l'arc de la courbe par une segment, donc l'air sous la courbe par Trapèze

ATrapèze= ***A***Rectangle+ ***A***Triangle

$$\boldsymbol{A}_{Trapèze} = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)}{2}\big(f(b) - f(a)\big)$$

$$I_1 = \int_a^b P_1(x)dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

II.4.2. *Formules composites*

Pour généraliser le même principe avec (n+1) points équidistants, on écrit :

$$I_T = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)\,dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)}{2}$$

$$= \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

II.5. Gestion d'erreur

On se limite à l'étude de l'erreur mathématique commise la méthode de Simpson et celle des Trapèzes.

II.5.1. *Erreur dans la méthode des Trapèzes*

Sous une formule simple, l'intégrale : $I = \int_a^b f(x)\,dx$ est approchée par :

$$I_1 = \frac{(b-a)\left(f(a) + f(b)\right)}{2}$$

En posant : $b = a + h$, i vient :

$$\varphi(h) = I - I_1 = \int_a^{a+h} f(x)dx - \frac{h\left(f(a) + f(a+h)\right)}{2}$$

En supposant que f admet des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre 2, on montre grâce à un développement de Taylor de $\varphi(h)$ à l'ordre 2 qu'on a :

$$\left|I - I_1\right| \le \frac{h^3}{12} \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|$$

En formule composite, on déduit :

$$\left|I - I_T\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|$$

II.6. Méthode de Simpson

II.6.1. Formules simples

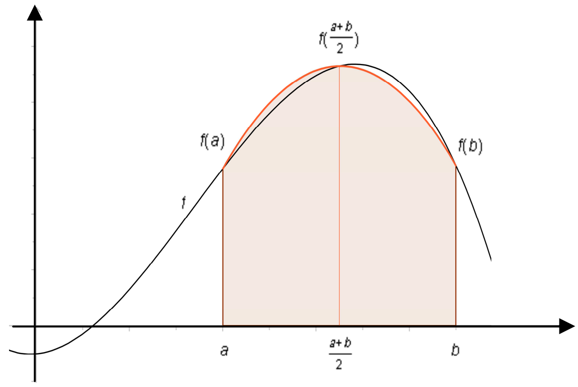
La méthode de Simpson consiste à grouper trois points de $[a, b]$ consécutifs de la courbe et de remplacer l'arc de courbe passant par ces trois points par un arc de parabole.

$x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2} = a + h, x_2 = a + 2h$, tel que $h = (b - a)/2$

Alors : $P_2(x) = \dfrac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{2h^2} f(a) + \dfrac{(x-a)(x-b)}{h^2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \dfrac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{h^2} f(b)$

Après intégration, on obtient :

$$I_2 = \int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$



II.6.2. Formules composites

On subdivise $[a, b]$en $s = \dfrac{n}{2}$ intervalles

$[x_{2i}, x_{2i+1}]$ centrés en x_{2i+1} de longueur:

$$2h = \frac{b-a}{s} = \frac{2(b-a)}{n}$$

Pour : $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, s-1$, on obtient :

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+1}} P_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_{2i}) + 4f((x_{2i+1})) + f(x_{2i+2})\right]$$

Donc, la formule composite s'écrit :

$$\begin{aligned} I_S &= \sum_{i=0}^{s-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+1}} P_2(x)\,dx \\ &= \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{s-1} f(a+2ih) + 4\sum_{i=0}^{s-1} f(a+(2i+1)h)\right] \end{aligned}$$

Dr. MODERRES Mourad

On peut donc simplement écrire :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i\ impair} f(x_i) + 2\sum_{i\ pair} f(x_i) + f(b) \right)$$

II.7. Gestion d'erreur

II.7.1. Erreur dans la méthode de Simpson

Pour des fonctions f admettant des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre 4, Lorsqu'on utilise la méthode de Simpson, on estime l'erreur suivante :

$$|I - I_S| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

Lorsqu'on connait une majoration M de $\left| f^{(4)}(x) \right|$, le pas h qui permet de d'avoir au plus une erreur ε vérifie nécessairement : $\frac{(b-a)^5}{180n^4} M \leq \varepsilon$

Où : $\frac{(b-a)}{180} h^4 M \leq \varepsilon \Rightarrow h \leq \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{M(b-a)}}$