
Équation de Klein-Gordon

2.1 Introduction

Afin de décrire des particules quantiques de spin nul et ayant des vitesses relativistes, on introduit l'équation de Klein-Gordon. Cette dernière est l'équivalent relativiste de l'équation de Schrödinger donnée par,

$$H\psi = E\psi \quad (2.1)$$

En utilisant le principe d'équivalence, sa forme devient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\vec{P}^2}{2m} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi, \quad \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (2.2)$$

On sait que dans le cas des ondes planes, les fonctions $\psi(\vec{r}, t)$ qui sont solutions de l'équation de Schrodinger sont données par

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{i(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar})} \quad (2.3)$$

On va essayer dans ce qui suit de trouver la forme générale de l'équation de Klein-Gordon, nous permettant de décrire le mouvement de particules libres, de spin nul et ayant des vitesses relativistes, en démarrant de l'équation de Schrodinger.

2.2 Quadri-vecteurs en théorie des champs

Rappelons que l'énergie relativiste d'une particule libre est donnée par

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (2.4)$$

- $\vec{p}$: impulsion
- c : vitesse de la lumière

– m : masse de la particule

Le quadri-vecteur énergie-impulsion $\vec{P}$ est défini par,

$$\vec{P} = \left(\vec{p}, \frac{E}{c} \right) \quad (2.5)$$

En théorie des champs, on utilise la convention d'Einstein. Si $\vec{A}$ est un quadri-vecteur, on le note A_μ avec $\mu = 1, 2, 3, 4$. Le quadri-vecteur A_μ a les composantes suivantes:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ia_4 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Si on calcule le produit scalaire de deux quadri-vecteurs A_μ et B_ν , on trouve

$$A_\mu B_\nu = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ia_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ib_4 \end{pmatrix} = +a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4 \quad (2.7)$$

Ce produit scalaire vérifie la métrique de l'espace de Minkowski $(+, +, +, -)$.

Donc, en théorie des champs, le quadri-vecteur énergie-impulsion s'écrit:

$$P_\mu = \left(\vec{p}, i\frac{E}{c} \right) \quad (2.8)$$

Rappelons aussi qu'en mécanique quantique, que E et $\vec{p}$ sont définis par:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad (2.9)$$

En remplaçant (2.9) dans (2.8), on trouve

$$P_\mu = \left(-i\hbar \vec{\nabla}, i\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) = -i\hbar \left(\vec{\nabla}, -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.10)$$

Si on pose,

$$\partial_\mu = \left(\vec{\nabla}, -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.11)$$

où ∂_μ représente le quadri-vecteur dérivée spatio-temporelle, on trouve

$$P_\mu = -i\hbar\partial_\mu \quad (2.12)$$

2.3 Équation de Klein-Gordon libre

Trouvons maintenant l'équation de Klein-Gordon libre décrivant le mouvement (déplacement) d'une particule quantique, de spin nul et de vitesse relativiste.

En mécanique quantique, une particule libre est décrite par l'équation d'évolution de Schrodinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r},t) = E\phi(\vec{r},t) \quad \text{où} \quad E = H = E_c + V = E_c + 0 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{avec} \quad v \ll c \quad (2.13)$$

Pour une particule relativiste libre

$$E_R = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4} \quad (2.14)$$

La dynamique de ces particules relativistes sera décrite par l'équation suivante

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r},t) = E_R \quad \phi(\vec{r},t) = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4} \quad \phi(\vec{r},t) \quad (2.15)$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi(\vec{r},t) = \left(\sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4}\right)^2 \phi(\vec{r},t) \quad (2.16)$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\vec{r},t) = \left(\vec{p}^2c^2 + m^2c^4\right) \phi(\vec{r},t) \quad (2.17)$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\vec{r},t) = \left(\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)^2c^2 + m^2c^4\right) \phi(\vec{r},t) \quad (2.18)$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\vec{r},t) = \left(\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)^2c^2 + m^2c^4\right) \phi(\vec{r},t) \quad (2.19)$$

$$\frac{-\hbar^2}{\hbar^2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\vec{r},t) + \frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2c^2}{\hbar^2c^2}\phi(\vec{r},t) - \frac{m^2c^4}{\hbar^2c^2}\phi(\vec{r},t) = 0 \quad (2.20)$$

Si on pose $\vec{\nabla}^2 = \Delta$, on retrouve l'équation suivante

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) \phi(\vec{r},t) = 0 \quad (2.21)$$

Cette dernière équation représente l'équation de Klein-Gordon libre écrite dans l'espace réel. Cherchons la forme de cette équation dans l'espace de Minkowski.

On a

$$\partial_\mu = \left(\vec{\nabla}, -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Rightarrow \partial_\mu^2 = \partial_\mu \cdot \partial_\mu = \left(\vec{\nabla}, -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \left(\vec{\nabla}, -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.22)$$

$$\partial_\mu^2 = \left(\Delta, -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2.23)$$

En remplaçant (2.23) dans (2.21), on trouve

$$\left(\partial_\mu^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.24)$$

Si on pose $\hbar = c = 1$ et $(\vec{r}, t) = x_\mu$ où x_μ représente un point de l'espace de Minkowski et $\mu = 1, 2, 3, 4$, l'équation (2.24) devient

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2 \right) \phi(x_\mu) = 0 \quad (2.25)$$

Cette équation représente l'équation de Klein-Gordon libre écrite dans l'espace de Minkowski.

2.4 Équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur

Cette équation permet de décrire une particule de charge q interagissant avec le champ électromagnétique extérieur, représenté par le quadri-vecteur potentiel $A_\mu = (\vec{A}, i\frac{\phi}{c})$.

Afin d'avoir l'équation de Klein-Gordon en présence d'un champ électromagnétique extérieur, on utilise la méthode du couplage minimale, qui consiste à remplacer l'impulsion et l'énergie $(\vec{p}, E)$ par

$$E \rightarrow E - q\phi \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A} \quad (2.26)$$

dans l'équation de Klein-Gordon libre. La transformation donnée dans l'équation (2.26) peut être réécrite en utilisant les quadri-vecteurs. Sa forme est donnée par:

$$P_\mu \rightarrow P_\mu - qA_\mu \quad (2.27)$$

Exercice 3 :

- Montrer que les deux transformations données dans les deux équation (2.26) et (2.27) sont

équivalentes.

On a

$$P_\mu = -i\hbar \partial_\mu \implies P_\mu = -i \partial_\mu \quad \text{pour } \hbar = 1 \quad (2.28)$$

La transformation (2.27) devient alors,

$$-i \partial_\mu \rightarrow -i \partial_\mu - q A_\mu \implies \partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - iq A_\mu \implies \partial_\mu \cdot \partial_\mu \rightarrow (\partial_\mu - iq A_\mu) (\partial_\mu - iq A_\mu) \quad (2.29)$$

Si on remplace dans l'équation de Klein-Gordon libre

$$\left[(\partial_\mu - iq A_\mu) (\partial_\mu - iq A_\mu) - m^2 \right] \phi(x_\mu) = 0 \quad (2.30)$$

Cette équation est appelée, équation de Klein-Gordon en présence d'un champs électromagnétique extérieur A_μ . Si on pose $D_\mu = (\partial_\mu - iq A_\mu)$, alors l'équation (2.30) s'écrit

$$\left[D_\mu D_\mu - m^2 \right] \phi(x_\mu) = 0 \quad (2.31)$$

Le conjugué de cette dernière équation est donné par

$$\left[D_\mu^* D_\mu^* - m^2 \right] \phi^*(x_\mu) = 0 \implies \left[(\partial_\mu + iq A_\mu) (\partial_\mu + iq A_\mu) - m^2 \right] \phi^*(x_\mu) = 0 \quad (2.32)$$

Exercice 4 :

En présence d'un champ électromagnétique extérieur $A_\mu(\vec{A}, iV)$, le mouvement d'une particule de masse m , de spin nul et de vitesse relativiste c est décrit par l'équation Klein-Gordon suivante

$$\left[(\partial_\mu - iq A_\mu) (\partial_\mu - iq A_\mu) - m^2 \right] \phi(x_\mu) = 0$$

- Montrer que cette équation est invariante dans la transformation de jauge suivante

$$\begin{cases} A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x_\mu) \\ \phi(x_\mu) \longrightarrow \phi'(x_\mu) = e^{-iq\alpha(x_\mu)} \phi(x_\mu) \end{cases}, \quad \phi(x_\mu), \alpha(x_\mu) \text{ sont deux réels arbitraires.}$$

Exercice 5 :

L'équation de Klein-Gordon décrivant le mouvement d'une particule relativiste, de masse m , de charge q et en présence d'un champ électromagnétique-magnétique extérieur $A_\mu(\vec{A}, i\phi)$ est donnée

$$\left[(\partial_\mu - iqA_\mu)(\partial_\mu - iqA_\mu) - m^2 \right] \psi(x) = 0$$

Trouver l'expression du quadri-vecteur courant de Klein-Gordon J_μ qui est solution de l'équation

$$\partial_\mu J_\mu = 0$$

On donne : $(\partial_\mu^* - iqA_\mu^*)(\partial_\mu^* - iqA_\mu^*) = (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\mu + iqA_\mu)$

2.5 Solutions de l'équation de Klein-Gordon libre

L'équation de Klein-Gordon libre est donnée par

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2 \right) \phi(x_\mu) = 0 \quad \text{qu'on peut écrire} \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.33)$$

Cette équation admet une solution en états stationnaires. Sa forme générale est donnée par,

$$\phi(\vec{r}, t) = f(t) \cdot \psi(\vec{r}) \quad (2.34)$$

On dit qu'une solution en états stationnaires est une solution à variables séparables. Remplaçons (2.34) dans (2.33), on trouve

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) f(t) \cdot \psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.35)$$

$$f(t) \Delta \psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r}) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} f(t) \psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.36)$$

Si on divise toute l'équation sur $f(t) \psi(\vec{r})$, on trouve

$$\frac{f(t) \Delta \psi(\vec{r})}{f(t) \psi(\vec{r})} - \frac{1}{f(t) \psi(\vec{r})} \psi(\vec{r}) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) - \frac{1}{f(t) \psi(\vec{r})} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} f(t) \psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\Delta\psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} - \frac{1}{f(t)} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} = 0 \quad (2.38)$$

Cette équation est une équation du second ordre à deux variables indépendantes.

$$\frac{\Delta\psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} = \frac{1}{c^2} \frac{f''(t)}{f(t)} = \text{constante}, \quad \text{avec} \quad f'' = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \quad (2.39)$$

Si on pose $\text{constante} = \omega^2$, on retrouve

$$\frac{\Delta\psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} = \frac{1}{c^2} \frac{f''(t)}{f(t)} = \omega^2 \quad (2.40)$$

A partir de cette équation on obtient les deux équations suivantes:

$$\frac{\Delta\psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} = \omega^2 \implies \frac{\Delta\psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} = \omega^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \implies \Delta\psi(\vec{r}) - \left(\omega^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{f''(t)}{f(t)} = \omega^2 \implies \frac{f''(t)}{f(t)} = c^2 \omega^2 \implies f''(t) = c^2 \omega^2 f(t) \implies f''(t) - c^2 \omega^2 f(t) = 0 \quad (2.42)$$

L'équation (2.42) peut s'écrire sous la forme générale suivante

$$f''(t) \pm (c\omega)^2 f(t) = 0 \quad (2.43)$$

L'équation (2.42) admet alors des solutions de la forme

$$f(t) = A e^{c\omega t} + B e^{-c\omega t} \quad (2.44)$$

Pour avoir des solutions continues partout, on pose

$$c\omega = \frac{iE}{\hbar}, \quad E \text{ est un réel.} \quad (2.45)$$

On remplaçant (2.44) dans (2.45), on trouve

$$f(t) = A e^{\frac{iE}{\hbar}t} + B e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \quad (2.46)$$

On a

$$c\omega = \frac{iE}{\hbar} \implies c^2 \omega^2 = -\frac{E^2}{\hbar^2} \implies \omega^2 = -\frac{E^2}{c^2 \hbar^2} \quad (2.47)$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (2.41)

$$\Delta\psi(\vec{r}) - \left(-\frac{E^2}{c^2\hbar^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\vec{r}) = 0 \implies \quad (2.48)$$

En réduisant au même dénominateur, on trouve

$$\Delta\psi(\vec{r}) - \left(-\frac{E^2}{c^2\hbar^2} + \frac{m^2c^4}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\vec{r}) = 0 \implies \Delta\psi(\vec{r}) - \left(\frac{-E^2 + m^2c^4}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.49)$$

Or,

$$E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4 \implies -\vec{p}^2c^2 = -E^2 + m^2c^4 \quad (2.50)$$

En remplaçons dans l'équation précédente, on trouve

$$\Delta\psi(\vec{r}) - \left(\frac{-\vec{p}^2c^2}{c^2\hbar^2}\right)\psi(\vec{r}) = 0 \implies \Delta\psi(\vec{r}) - \left(\frac{-\vec{p}^2}{\hbar^2}\right)\psi(\vec{r}) = 0 \implies \quad (2.51)$$

$$\Delta\psi(\vec{r}) - \left(\frac{i\vec{p}}{\hbar}\right)^2\psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.52)$$

Cette équation admet des solutions de la forme suivante

$$\psi(\vec{r}) = C e^{\frac{i\vec{p}\vec{r}}{\hbar}} + D e^{-\frac{i\vec{p}\vec{r}}{\hbar}} \quad (2.53)$$

2.6 Interprétation physique des solutions de l'équation de Klein-Gordon libre

Pour donner un sens physique aux solutions, on pose

- $e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$ représente une particule créée dans le passé $(-\infty)$ et qui voyage vers le futur $(+\infty)$
- $e^{\frac{iE}{\hbar}t}$ représente une particule créée dans le futur $(+\infty)$ et qui voyage vers le passé $(-\infty)$.
- A représente la probabilité pour que la particule soit créée dans le futur $(+\infty)$ et qui voyage vers le passé $(-\infty)$.
- B représente la probabilité pour que la particule soit créée dans le passé $(-\infty)$ et qui voyage vers le futur $(+\infty)$.

Donc, la solution physique est donnée par

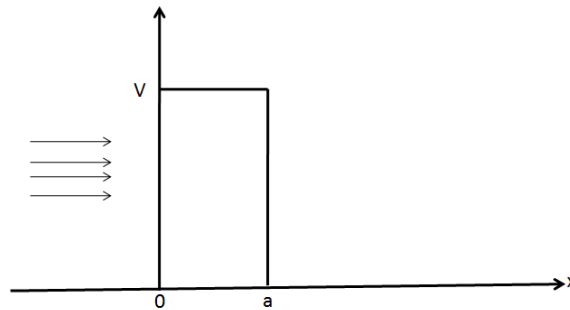
$$f(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \quad (2.54)$$

Où la probabilité B pour que la particule est créée dans le passé et elle voyage vers le futur est égale à 1. Donc la probabilité A pour que la particule est créée dans le futur et elle voyage vers le passé est égale à 0. La solution Finale est donnée par

$$\phi(\vec{r}, t) = f(t) \cdot \psi(\vec{r}) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \left(C e^{\frac{i\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} + D e^{-\frac{i\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} \right) \quad (2.55)$$

Exercice 6 :

Des particules de spin 0, de charge q et de masse m sont incidentes de $(+\infty)$ vers $(-\infty)$ sur une barrière de potentiel de hauteur V et de largeur a . Sachant que l'énergie de ces particules est donnée par $E = qV/2$, tel que $qV > 2mc^2$,



1. Calculer les coefficients de transmission T et de réflexion R .
2. Calculer la densité de courant J_x dans chaque région.

Indication: travailler à une dimension.