جامعة الجيلالي بونعامة
خميس مليانة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

القياس: إحصاء 3 — المستوى: السنة الثانية شعبة علوم إقتصادية

السلسلة رقم (04):
تقاريب بعض التوزيعات الإحتمالية

التمرين الأول: توضح الخبرة الماضية أن 1% من مصابيح الكهرباء المنتجة في أحد المصانع هي مصابيح غير صالحة في عينة من 100 مصباح.

1- أحسب إحتمال وجود أكثر من مصباح غير صالح؟

2- أحسب إحتمال وجود مصباح واحد غير صالح؟

3- أحسب إحتمال وجود ما بين 3 و 5 مصابيح غير صالحة (بما في ذلك 5).

4- أحسب التوقع الرياضي، التباين والإنحراف المعياري.

التمرين الثاني: يفيد آخر تعداد عام للسكان بالجزائر أن 30% من الأسر تملك على الأقل جهاز إعلام آلي، للتأكد من ذلك أجريت دراسة على عينة من 1000 أسرة.

1) عرف المتغير العشوائي في هذه المسألة؟.

2) ما هو إحتمال أن يكون عدد الأسر من بين 1000 التي تملك جهاز إعلام آلي، يقوق 400، يقل عن 500 أسرة.

التمرين 03 : أظهرت كبيرا المراقبة في أحد محطات البنزين، بأن هناك متوسط 20 سيارة في الساعة الواحدة تدخل المحطة لتزود بالوقود.

المطلوب: أوجد قيم الإحتمالات التالية:

1- إحتمال أن تتزود 18 سيارة بالضبط في الساعة الواحدة.

2- إحتمال أن تتزود 26 سيارة على الأكثر في الساعة الواحدة.

3- إحتمال أن تتزود 18 سيارة على الأقل في الساعة الواحدة.

4- إحتمال أن تتزود ما بين 18 و 26 سيارة في الساعة الواحدة

حل السلسلة رقم (04)
تقارب التوزيعات الاحتمالية

حل التمرين الأول:

$p = 0,01$ ، $n = 100$

① - حساب احتمال وجود آلة من مصباح غير صالح:

لدينا من معطيات التمرين أن هناك حدثين معاكسين (صالح ؛ غير صالح) حيث (الفشل (مصباح صالح) = 0) و (النجاح (مصباح غير صالح) = 1).

والتجربة مكررة 100 مرة، هذا يعني أن قانون الاحتمال المناسب هو قانون ثنائي الحدين، لكن بما أن الاحتمال صغير جدا ($p < 0,05$) و n كبيرة ($n \geq 30$) حيث $np = 0,01 \times 100 = 1$ وهي أقل من 5، فإنه يفضل تقريبه بقانون بواسون حيث:

$$\lambda = np = 100 \times 0,01 = 1$$

وعليه:

$$p(x > 1) = 1 - p(x < 1)$$

$$= 1 - p(x = 0)$$

$$= 1 - \left[\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\right] = 1 - \left[\frac{1^0 e^{-1}}{0!}\right]$$

$$= 1 - 0,368$$

$$= 0,632$$

ج- حساب إحتمال وجود مصباح واحد غير صالح :

$$P(X=1) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!} = \frac{1^{1} e^{-1}}{1!} = 0,368$$

ج) حساب إحتمال وجود مابين 0 و 3 مصابيح غير صالحة (طابق ذلك):

$$P(0 \leq X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \frac{1^{0} e^{-1}}{0!} + \frac{1^{1} e^{-1}}{1!} + \frac{1^{2} e^{-1}}{2!} + \frac{1^{3} e^{-1}}{3!}$$

$$= 0,368 + 0,368 + 0,184 + 0,061$$

$$= 0,981$$

د) حساب $E(x)$ ، $V(x)$ ، $\sigma(x)$:

$$E(x) = \lambda = 1 \quad ; \quad V(x) = \lambda = 1 \quad ; \quad \sigma(x) = \sqrt{Vx} = \sqrt{\lambda} = 1$$

حل التمرين رقم (02) :

$$p = 0,3 \quad , \quad n = 1000$$

① تعريف المتغير العشوائي : هو عدد الأسر التي تملك على الأقل جهاز إعلام آلي :

② - حساب إحتمال أن يكون عدد الأسر من بين 1000 التي تملك جهاز إعلام آلي يفوق 400 .

التوزيع الأصلي هو توزيع بينوميال لأن التجربة تحوي على حادثتين معاكستين (تملك أو لا تملك) ، التجربة متكررة n مرة حيث ($n = 1000$) ولكن بما أن :

$0,3 \leq p \leq 0,7$ و n كبيرة جدا فإنه يمكن تقريبه إلى التوزيع الطبيعي حيث،

$$\mu = np = 1000 \times 0,3 = 300$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \times 0,3 \times 0,7} = 14,49$$

وعليه،

$$P(X > 400) = P(X > 400 + 95)$$

$$= P(X > 400,5)$$

$$= P\left(Z > \frac{400,5 - 300}{14,49}\right)$$

$$= 1 - P(Z < 6,93)$$

$$= 1 - 1 = 0$$

لحساب احتمال أن يكون عدد الأسر من بين 1000 الأقل حظا أعلاه آجي يقل عن 500.

$$P(X < 500) = P(X < 500 - 0,5)$$

$$= P(X < 499,5)$$

$$= P\left(Z < \frac{499,5 - 300}{14,49}\right)$$

$$= P(Z < 13,77)$$

$$= 1$$

حل التمرين رقم (03) : لدينا،

من معطيات التمرين لدينا متوسط الحدث يرتبط بوحدة زمنية تتمثل في عدد السيارات التي تتزود بالوقود في الساعة، مما يعني أن قانون الاحتمال المناسب هو قانون بواسون بـ $\lambda = 20$ لكن بما أن هذا المتوسط كبير جدا (> 15)، فإنه يفضل تقريبه بالتوزيع الطبيعي العياري. حيث:

$$M = \lambda = 20 \quad , \quad \sigma = \sqrt{20} = 4,472$$

① - حساب احتمال أن تتزود 15 سيارة بالضبط في ساعة واحدة:

$$P(X=15) = P(15-0,5 \leq X \leq 15+0,5)$$

$$= P(14,5 \leq X \leq 15,5)$$

$$= P\left(\frac{14,5-20}{4,472} \leq Z \leq \frac{15,5-20}{4,472}\right)$$

$$= P(-1,23 \leq Z \leq -1,01)$$

$$= \Phi(-1,01) - \Phi(-1,23)$$

$$= 0,156 - 0,109$$

$$= 0,047$$

② حساب احتمال أن تتزود 26 سيارة على الأكثر في الساعة الواحدة

$$P(X \leq 26) = P(X \leq 26,5) = P\left(Z \leq \frac{26,5-20}{4,472}\right)$$

$$P(X \leq 26) = \Phi(1,45)$$

$$= 0,926$$

③ - حساب احتمال أن تتزود 18 سيارة على الأقل في ساعة واحدة

$$P(X \geq 18) = 1 - P(X < 18)$$

$$= 1 - P(X < 17,5)$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{17,5 - 20}{4,472}\right)$$

$$= 1 - P(Z < -0,56)$$

$$= 1 - \Phi(-0,56)$$

$$= 1 - 0,288$$

$$= 0,712$$

④ - حساب احتمال أن تتزود ما بين 18 و 26 سيارة في ساعة الواحدة :

$$P(18 \leq X \leq 26) = P(17,5 \leq X \leq 26,5)$$

$$= P\left(\frac{17,5 - 20}{4,472} \leq Z \leq \frac{26,5 - 20}{4,472}\right)$$

$$= P(-0,56 \leq Z \leq 1,45)$$

$$= \Phi(1,45) - \Phi(-0,56)$$

$$P(18 \leq x \leq 26) = 0,926471 - 0,287740$$
$$= 0,639$$