المحور الثالث: تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية.

1. التقريب بين قانون فوق الهندسي وقانون ثنائي الحدين:

يمكن تقريب قانون فوق الهندسي إلى قانون ثنائي الحدين عندما يكون حجم العينة صغيرا جدا بالنسبة لحجم المجتمع، فيكون السحب بالارجاع أو بعدم الارجاع لا يؤثر أي تعطي نفس النتائج. و $\frac{n}{N} \leq 5\%$.

مثال: يتشكل مجلس الأساتذة من 40 عضوا، 24 رجل و 16 امرأة، نريد اختيار عشوائيا شخصين منهم للمشاركة في ندوة وطنية حول البرامج، ليكن X عدد الرجال من بين الشخصين الذين تم اختيارهم.

1. ما هو القانون الاحتمالي الأصلي للمتغير العشوائي X مع التعليل؟
2. ماهو القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه مع التعليل؟
3. قبل وبعد التقريب، أحسب احتمال أن يكون عدد الرجال يساوي:
   - ✓ على الأكثر رجل واحد؟
   - ✓ على الأقل رجلين؟
4. أحسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري (قبل وبعد التقريب)؟
5. قارن النتائج؟

الحل:

1. **القانون الاحتمالي الأصلي للمتغير العشوائي X مع التعليل:**

بما أن التجربة لها نتيجتان متنافيتان ألا وهما: الحصول على امرأة (حالة فشل: x=0) والحصول على رجل (حالة نجاح: x=1)، ولقد تم سحب شخصين ($n > 1$)، وبما أنه لم يشر لنا أن السحب تم بدون ارجاع أو مع الارجاع، فنحن أمام سحب بدون ارجاع، ومنه نستنتج أن X يتبع قانون فوق الهندسي.

أي: $N_2 = 16 , N_1 = 24 \ , \ P = \frac{24}{40} = 0.6 \ \ , X \sim H(40; 2; 0.6)$

2. **القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه مع التعليل:** هو قانون ثنائي الحدين، لأن شروط التقريب محققة، حيث حجم العينة صغير جدا مقارنة بحجم المجتمع أي: $(\frac{n}{N} = \frac{2}{40} \leq 0.05)$.

3. **حساب الاحتمالات قبل وبعد التقريب:**

- **حساب الاحتمالات قبل التقريب (باستخدام قانون فوق الهندسي):**

3.1 حساب احتمال أن يكون عدد الرجال يساوي على الأكثر رجل واحد:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{C_{24}^{0} C_{16}^{2-0}}{C_{40}^{2}} + \frac{C_{24}^{1} C_{16}^{2-1}}{C_{40}^{2}} = 0.154 + 0.492 = 0.646$$

3.2 حساب احتمال أن يكون عدد الرجال يساوي على الأقل رجلين:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - 0.646 = 0.354$$

- حساب الاحتمالات بعد التقريب (باستخدام قانون ثنائي الحدين):

3.1 حساب احتمال أن يكون عدد الرجال يساوي على الأكثر رجل واحد:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = C_2^0(0.6)^0(0.4)^{2-0} + C_2^1(0.6)^1(0.4)^{2-1} = 0.16 + 0.48 = 0.64$$

3.2 حساب احتمال أن يكون عدد الرجال يساوي على الأقل رجلين:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - 0.64 = 0.36$$

4. حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري (قبل وبعد التقريب):

- **حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري قبل التقريب (قانون فوق الهندسي):**

$$E(X) = np = 2 \times 0.6 = 1.2, \quad V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 2 \times 0.6 \times 0.4 \times \left(\frac{40-2}{40-1}\right)$$
$$= 0.47, \sigma(X) = \sqrt{0.47} = 0.6855 \text{ رجل}$$

- **حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري بعد التقريب (قانون ثنائي الحدين):**

$$E(X) = np = 2 \times 0.6 = 1.2, \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq} = \sqrt{2 \times 0.6 \times 0.4} = 0.6928$$

5. مقارنة النتائج:

X	E(X)	$\sigma(X)$
$H \sim (40; 2; 0.6)$	1.2	0.6855
$B \sim (2; 0.6)$	1.2	0.6928

نلاحظ أن النتائج جد متقاربة فيما يتعلق بحساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري، بالإضافة إلى حساب الاحتمالات قبل وبعد التقريب.

2. التقريب بين قانون ثنائي الحدين وقانون بواسون:

يمكن تقريب توزيع ثنائي الحدين الى توزيع بواسون اذا كان عدد المحاولات لا يقل عن 50 ($n \geq 50$) و $n.p < 5$ أي (p تكون قريبة من الصفر($p \leq 0.05$) و q=(1-p) قريبة من 1، و هذا الحدث يكون نادر الوقوع.

مثال: شخص يصيب الهدف باحتمال 0,09. ما هو احتمال أن يصيب الهدف 5 مرات عند 50 طلقة؟
بما ان $n.p = 50.0{,}09 = 4{,}5 < 5$ هذا يعني بأننا لا نستطيع استعمال توزيع ثنائي الحدين لايجاد هذا الاحتمال ولهذا سنقوم بتقريب توزيع ثنائي الحدين الى توزيع بواسون كما يلي:

$$P(X = 5) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{4{,}5^5 e^{-4{,}5}}{5!}$$

3. التقريب بين قانون ثنائي الحدين و القانون الطبيعي:

تجدر الإشارة أن عند تقريب قانون احتمالي منفصل إلى قانون احتمالي متصل فإنه ينبغي القيام بتصحيح الاستمرارية وذلك عند تقريب قانون ثنائي الحدين أو قانون بواسون إلى القانون الطبيعي، لأن الانتقال من متغير عشوائي متقطع إلى متغير عشوائي مستمر، أين يتم تحويل كل قيمة للمتغير العشوائي a إلى مجال، وتتم عملية التحويل بحيث نزيل

التقطع والانفصال بين القيم وذلك بإضافة 0.5 وإنقاص 0.5 لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي المتقطع، وعموما يتم استبدال هذه القيمة بالمجال$[a + 0.5, a - 0.5]$حسب حالة الاحتمال كالآتي:

P(X = a) = P(a - 0.5 ≤ X ≤ a + 0.5)

P(X < a) = P(X < a - 0.5)

P(X ≤ a) = P(X < a + 0.5)

P(X > a) = P(X > a + 0.5)

P(X ≥ a) = P(X ≥ a - 0.5)

P(a < X< b) = P(a + 0.5 < X < b - 0.5)

P(a ≤ X ≤ b) = P(a - 0.5 ≤ X ≤ b + 0.5)

P(a < X ≤ b) = P(a + 0.5 < X ≤ b + 0.5)

P(a ≤ X< b) = P(a - 0.5 ≤ X< b - 0.5)

لا يمكن تقريب قانون ثنائي الحدين إلى القانون الطبيعي إلا إذا تحققت مجموعة من الشروط في التجربة العشوائية التي تتبع قانون ثنائي الحدين ألا وهي: عندما تكون قيمة P غير ضعيفة ، وقيمة n كبيرة جدا، أي لما يكون: $n \geq 30$ و $0.3 \leq p \leq 0.7$، ومنه الشروط التطبيقية المتعلقة بالتقريب من قانون ثنائي الحدين إلى القانون الطبيعي هي: $np > 5$ أو $nq > 5$. فتصبح قيمة z كالتالي:

$$z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

مثال: تشير نتائج الامتحانات للسنوات الماضية للسنة الثانية علوم اقتصادية بإحدى الجامعات أن نسبة الطلبة الراسبين في مقياس الإحصاء 3 هي 30 %، للتأكد من ذلك نختار عينة عشوائية حجمها 60 طالب حيث تتكون هذه العينة من طلبة دفعة السنة الحالية، ليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد الطلبة السنة الثانية الراسبين في مقياس الإحصاء 3 والتابعين إداريا لقسم العلوم الاقتصادية في هذه الجامعة.

1. ما هو القانون الاحتمالي الأصلي للمتغير العشوائي X مع التعليل؟
2. أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري؟
3. ما هو القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه مع التعليل؟
4. أحسب الاحتمالات التالية:

$$\mathrm{p(X = 28), p(X \le 22), \quad p(16 \le X < 18), p(X < 24), p(X > 12), p(20 \le X \le 25),}$$
$$\mathrm{p(X \ge 14), p(26 < X \le 38), p(10 < X < 40)}$$

الحل:

1. القانون الاحتمالي الأصلي للمتغير العشوائي X مع التعليل:

بما أن التجربة لها نتيجتان متنافيتان ألا وهما: الحصول على طالب ناجح (حالة فشل: $X = 0$) والحصول على طالب(حالة نجاح: $X = 1$)، ولقد تم سحب 60 طالب ($n > 1$)، وبما أنه لم يشر لنا أن السحب تم بدون إرجاع أو مع الارجاع، فنحن في حالة سحب مع إرجاع لأن حجم العينة معلوم وحجم المجتمع مجهول، ومنه نستنتج أن القانون الأصلي لـ X هو قانون ثنائي الحدين، أي: $X \sim B(60; 0.3)$

2. حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري

$E(X) = np = 60 \times 0.3 = 18$ طالب; $\quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq} = \sqrt{60 \times 0.3 \times 0.7} = 3.55$

3. القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه مع التعليل: هو القانون الطبيعي، بما أن قيمة p غير صغيرة أي: $(0.3 \le p \le 0.7)$ ، و n كبيرة جدا أي: $(n \ge 30)$، ضف إلى ذلك $np = 60 \times 0.3 = 18 > 5$، إذن شروط التقريب محققة.

4. حساب الاحتمالات التالية:

عند الانتقال من قانون ثنائي الحدين إلى القانون الطبيعي، ينبغي علينا حساب معالمه بالطريقة التالية:

$$X \sim N(18; 3.55);\ \sigma(X) = 3.55;\ \mu = 18$$

كما أنه عند تقريب قانون احتمالي منفصل إلى قانون احتمالي متصل فإنه ينبغي القيام بتصحيح الاستمرارية.

$$\begin{aligned}
\mathrm{p(X = 28)} &= \mathrm{p(28 - 0.5 \le X \le 28 + 0.5) = p(27.5 \le X \le 28.5)} \\
&= \mathrm{p}\left(\frac{27.5 - 18}{3.55} \le Z \le \frac{28.5 - 18}{3.55}\right) \\
&= \mathrm{p(2.67 \le Z \le 2.96) = Q(2.96) - Q(2.67)} \\
&= 0.9985 - 0.9962 = 0.0023
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{p(X \le 22)} &= \mathrm{p(X < 22 + 0.5) = p(X \le 22.5) = p}\left(\mathrm{Z} \le \frac{22.5 - 18}{3.55}\right) \\
&= \mathrm{p(Z \le 1.27) = Q(1.27)} = 0.8980
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{p(16 \le X < 18)} &= \mathrm{p(16 - 0.5 \le X < 18 - 0.5)} \\
&= \mathrm{p(15.5 \le X \le 17.5)} \\
&= \mathrm{p}\left(\frac{15.5 - 18}{3.55} \le Z \le \frac{17.5 - 18}{3.55}\right) \\
&= p(-0.70 \le Z \le -0.14) = Q(-0.14) - Q(-0.70) \\
&= 0.4443 - 0.2420 = 0.2023
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{p(X < 24)} &= \mathrm{p(X < 24 - 0.5) = p(X \le 23.5) = p}\left(\mathrm{Z} \le \frac{23.5 - 18}{3.5}\right) \\
&= \mathrm{p(Z \le 1.55) = Q(1.55)} = 0.9394
\end{aligned}$$

$$p(X > 12) = p(X > 12 + 0.5) = p(X > 12.5) = p\left(Z > \frac{12.5 - 18}{3.55}\right)$$
$$= p(Z > -1.55) = 1 - p(Z \leq -1.55) = 1 - Q(-1.55)$$
$$= 1 - 0.0606 = 0.9394$$
$$p(20 \leq X \leq 25) = p(20 - 0.5 \leq X < 25 + 0.5)$$
$$= p(19.5 \leq X \leq 25.5) = p\left(\frac{19.5 - 18}{3.55} \leq Z \frac{25.5 - 18}{3.55}\right)$$
$$= p(0.42 \leq Z \leq 2.11) = Q(2.11) - Q(0.42)$$
$$= 0.9826 - 0.6628 = 0.3198$$
$$p(X \geq 14) = p(X \geq 14 - 0.5) = p(X \geq 13.5) = p\left(Z \geq \frac{13.5 - 18}{3.55}\right)$$
$$= p(Z \geq -1.27) = 1 - p(Z \leq -1.27) = 1 - 0.1020$$
$$= 0.898$$
$$p(26 < X \leq 38) = p(26 + 0.5 \leq X < 38 + 0.5)$$
$$= p(26.5 \leq X \leq 38.5)$$
$$= p\left(\frac{26.5 - 18}{3.55} \leq Z \leq \frac{38.5 - 18}{3.55}\right)$$
$$= p(2.39 \leq Z \leq 5.77) = Q(+\infty) - Q(2.39$$
$$= 1 - 0.9916 = 0.0084$$
$$p(10 < X < 40) = p(10 + 0.5 \leq X \leq 40 - 0.5)$$
$$= p(10.5 \leq X \leq 39.5)$$
$$= p\left(\frac{10.5 - 18}{-3.55} \leq Z \leq \frac{39.5 - 18}{3.55}\right)$$
$$= p(-2.11 \leq Z \leq 6.06) = Q(+\infty) - Q(-2.11)$$
$$= 1 - 0.0174 = 0.9826$$

4. **التقريب بين قانون بواسون و القانون الطبيعي**:

و بنا ان هناك علاقة بين توزيع ثنائي الحدين و توزيع الطبيعي فانه يمكن أن نبين ان التوزيع بواسون يقترب من التوزيع الطبيعي ذي المتغير المعياري التالي: $z = \frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$

حيث: λ تكون كبيرة جدا و تؤول الى مالانهاية.

مثال: مصنع من مصانع الانتاج ينتج أقلاما سليمة من العيوب و اخرى بها عيوب. فإذا علمت أن 20% من هذه الاقلام غير جيدة و أشتريت منها صدفة *100* قلم. ما هو احتمال الحصول على10 أقلام غير جيدة.

الحل:

احتمال الحصول على قلم فاسد هو $p=0,2$

معدل الاقلام فاسدة في100 قلم هو $\lambda=n.\ p=100.\ 0,2=20$

بما ان $\lambda > 5$ نقوم بتقريب قانون بواسون الى قانون التوزيع الطبيعي حيث:

$$z = \frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{10 - 20}{\sqrt{20}} - 2,24$$

$$P(X = 10) = P(-2,24 \leq Z \leq 0) = 0,4875$$