جامعة الجيلالي بونعامة خميس مليانة

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

المقياس: احصاء 2.

المستوى: السنة الثانية سداسي

السلسلة رقم (04): العلوم الاقتصادية.

أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

(التوزيع الطبيعي - توزيع قاما - توزيع بيتا).

التمرين الأول:

إذا كان $X \sim N(3, 16)$ أوجد:

11 $P(4 \leq X \leq 8)$

12 $P(-2 \leq X \leq 1)$

13 $P(0 \leq X \leq 5)$

التمرين الثاني:

إذا كان المتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $Z \sim N(0,1)$ فاحسب:

$P(Z = 3,11)$

$P(1 < Z < 2,31)$

$P(-2,75 \leq Z \leq -0,15)$

$P(Z \leq 1,72)$

$P(Z > 1,07)$

$P(-1,91 \leq Z \leq 9,45)$

$P(Z < 0,5)$

$P(Z = 1,9)$

$P(Z < -0,54)$

$P(Z \geq 0,29)$

$P(Z < 0)$

$P(Z < -2)$

$P(Z \leq -3,01)$

$P(Z > 2)$

$P(Z > 4)$

$P(0 \leq Z \leq 1,25)$

$P(Z = 0)$

التمرين الثالث:

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 18 وانحراف معياري 5 أوجد قيمة k حيث يكون:

11 $P(X < k) = 0,2578$

12 $P(X > k) = 0,2578$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا المتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد السنوات التي يتضيطها الطالب بالجامعة للحصول على شهادته الليسانس، فإذا علمت بأن قيمة المعلمتين (α) و (n) تتبع توزيع قاما بمقدار يعادل 2 أي:

$n = \alpha = 2$

فالمطلوب الإجابة على الآتي:

1- أحسب ثم قارن الحالات التالية
$\Sigma_n, \Sigma_3, \Sigma_2, \Sigma_{1/2}$

2- أوجد دالة التوزيع الإحتمالي ثم بين أنها دالة كثافة إحتمالية.

3- أوجد تابع التوزيع الإحتمالي لهذا التوزيع

4- ما إحتمال أن يبقى الطالب 5 سنوات على الأكثر في الجامعة للحصول على شهادة الليسانس.

5- ما إحتمال أن يكون عدد السنوات التي يقضيها الطالب بالجامعة للحصول على شهادة الليسانس ما بين 3 و 5 سنوات

6- أحسب $E(x)$، $\sigma(x)$، $V(x)$.

التمرين الخامس: ليكن المتغير العشوائي (x) الذي يعبر عن نسبة الإنتاج التالف في مصنع الأحذية، فإذا علمت بأن قيمة المعلمتين (m) و (n) لتتبع توزيع بيتا حيث:

$m = 3, n = 2$

فأجب على ما يلي:

1- أحسب القيم $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_5$

2- أوجد دالة التوزيع الإحتمالي؟ وبين أنها دالة كثافة إحتمالية.

3- أوجد $F(x)$.

4- ما إحتمال أن تكون نسبة الإنتاج التالف لا تتجاوز 25%.

5- إحتمال أن تكون نسبة الإنتاج التالف 10% على الأقل.

6- أحسب $E(x)$، $V(x)$، $\sigma(x)$.

حل السلسلة رقم (02)

حل التمرين الأول:

1) حساب $P(4 \leq x \leq 8)$

$\mu = 3$, $\sigma^2 = 16$, $\sigma = 4$

$$P(4 \leq x \leq 8) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{4-3}{4} \leq Z \leq \frac{8-3}{4}\right)$$

$$= P(0,25 \leq Z \leq 1,25)$$

$$= \Phi(1,25) - \Phi(0,25)$$

$$= 0,8943 - 0,5987$$

$$= 0,2956$$

2) $P(-2 \leq x \leq 1)$:

$$P(-2 \leq x \leq 1) = P\left(\frac{-2-3}{4} \leq Z \leq \frac{1-3}{4}\right)$$

$$= P(-1,25 \leq Z \leq -0,5)$$

$$= \Phi(-0,5) - \Phi(-1,25)$$

$$= 0,3085 - 0,1056$$

$$= 0,2029$$

3) $P(0 \leq x \leq 5)$:

$$P(0 \leq x \leq 5) = P\left(\frac{0-3}{4} \leq Z \leq \frac{5-3}{4}\right)$$

$$= P(-0,75 \leq Z \leq 0,5)$$

$$= \Phi(0,5) - \Phi(-0,75)$$

$$= 0,6915 - 0,2266$$

$$= 0,4649$$

حل التمرين الثاني:

$P(Z = 1,9) = 0$

$P(Z < -0,54) = 0,2946$

$P(Z \geq 0,29) = 1 - P(Z < 0,29)$

$= 1 - 0,6141 = 0,3859$

$P(Z < 0) = 0,5$

$P(Z < -2) = 0,0228$

$P(Z < -3,01) = 0,0013$

$P(Z = 3,11) = 0$

$P(1 < Z < 2,37) = \Phi(2,37) - \Phi(1)$

$= 0,9896 - 0,8493$

$= 0,1403$

$P(-2,15 \leq Z \leq -0,15) = \Phi(-0,15) - \Phi(-2,15)$

$= 0,4404 - 0,0030$

$= 0,4374$

$P(Z \leq 1,72) = 0,9573$

$P(Z > 1,07) = 1 - P(Z < 1,07)$

$= 1 - 0,8577 = 0,1423$

$P(-1,91 \leq Z \leq 0,45) = \Phi(0,45) - \Phi(-1,91)$

$= 0,6736 - 0,0281$

$= 0,6455.$

$P(Z < 0,5) = 0,6915$

$P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$

$= 1 - 0,9772 = 0,0228$

$P(Z > 4) = 0$

$P(0 \leq Z < 1,25) = \Phi(1,25) - \Phi(0)$

$= 0,8944 - 0,5$

$= 0,3944$

$P(Z = 0) = 0$

حل التمرين الثالث:

$P(X < k) = 0,2578$

$\Rightarrow P\left(Z < \frac{k-18}{5}\right) = 0,2578$

$\Rightarrow \frac{k-18}{5} = -0,65$

$\Rightarrow k = 14,75$

$P(X > k) = 0,2578$

$\Rightarrow P\left(Z > \frac{k-18}{5}\right) = 0,2578$

$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{k-18}{5}\right) = 0,2578$

$\Rightarrow P\left(Z < \frac{k-18}{5}\right) = 1 - 0,2578$

$\Rightarrow P\left(Z < \frac{k-18}{5}\right) = 0,7422$

$\Rightarrow \frac{k-18}{5} = 0,65$

$\Rightarrow k = 21,25$

حل التمرين الرابع:

نجد نفس حل التمرين في المحاضرة (التوزيع غاما).

تمرين 1: ليكن المتغير العشوائي (x) الذي يعبر عن نسبة الإنتاج التالف في مصنع الأحذية، وإذا علمت بأن قيمة العشير (n) تتبع توزيع بيتا حيث: $m=3$, $n=2$ وحسب المطلوب:

1/ أحسب القيم (Γ_1)، (Γ_2)، (Γ_3)، (Γ_5).

2/ أوجد دالة التوزيع الاحتمالي وبين أولا دالة كثافة الاحتمالية

3/ الوحيد $F(x)$ تابع التوزيع الاحتمالي

4/ ما احتمال أن تكون نسبة الإنتاج التالف لا تتجاوز 25%.

5/ " " " " " 10% على الأقل.

6/ أحسب $E(x)$ ، $V(x)$ ، σ_x

حل التمرين الأول:

الحل:

$$X \sim B(3,2)$$

m $\quad$ n

$\Gamma_1 = 1$

$\Gamma_2 = 1$

$\Gamma_3 = 2$

$\Gamma_5 = 24$

0,0025

2/ كتابة دالة التوزيع الاحتمالي:

$$f(x) = \frac{\Gamma_{m+n}}{\Gamma_m \cdot \Gamma_n} x^{m-1} (1-x)^{n-1}$$

$$f(x) = \frac{\Gamma_{3+2}}{\Gamma_3 * \Gamma_2} x^{3-1} (1-x)^{2-1} \Rightarrow f(x) = 12 x^2 (1-x)$$

- إثبات أن دالة التوزيع الاحتمالي لهذا التوزيع تمثل دالة كثافة احتمالية

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 (12x^2(1-x))\,dx = \int_0^1 (12x^2 - 12x^3)\,dx$$

$$\Rightarrow \left[4x^3 - 3x^4\right]_0^1 = (4-3) - 0$$

$$= 1$$

- إيجاد دالة تابع التوزيع الاحتمالي :

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

$$= \frac{\Gamma m+n}{\Gamma m \Gamma n} \int_0^x (x^{m-1})(1-x)^{n-1}\,dx$$

$$= \left[4x^3 - 3x^4\right]_0^x$$

- حساب احتمال أن تكون سنة إنتاج السيارة تتجاوز 25%:

$$P(x \leq 0{,}25) = \left[4x^3 - 3x^4\right]_0^{0,25} = \left[4(0{,}25)^3 - 3(0{,}25)^4\right] - 0$$

$$= 0{,}0512$$

- حساب احتمال أن تكون سنة إنتاج السيارة تتجاوز 10% على الأقل

$$P(x \geq 0{,}1) = 1 - P(x \leq 0{,}1) = 1 - \left[4x^3 - 3x^4\right]_0^{0,1}$$

$$= 1 - (4(0{,}1)^3 - 3(0{,}1)^4)$$

$$= 1 - (0{,}004 - 0{,}0003)$$

$$= 0{,}9963.$$

G(x) , V(x) , E(x) ολμβ

$$E(x) = \frac{m}{m+n} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$V(x) = \frac{m.n}{(m+n)^2(m+n+1)} = \frac{(3)(2)}{(3+2)^2(3+2+1)} = \frac{6}{(5)^2(6)} = \frac{6}{150} = 0,04$$

$$G(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0,04} = 0,2$$