المحور الثاني: **قوانين التوزيع الاحتمالي في حالة المتغير العشوائي المستمر**:

2-1- **قانون التوزيع الطبيعي**: **The Normal D or Gaussian D**

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية كون معظم الظواهر تتبع هذا القانون أو تؤول إليه إذا توفرت شروط معينة. يوجد هذا التوزيع تحت صيغتين مختلفتين:

1.1.2 التوزيع الطبيعي العام: $\boldsymbol{N(\mu,\sigma)}$

إذا كان (X) متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $(\boldsymbol{\mu})$ وانحراف معياري $(\boldsymbol{\sigma})$ فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي(X) تعطى بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

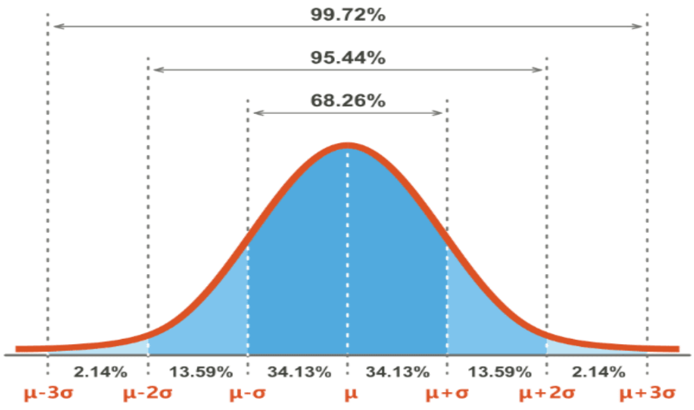
حيث:

- μ: يمثل التوقع الرياضي لـx
- σ^2: تباين المتغير العشوائي لـx
- e : ثابت $e = 2{,}718$
- π: ثابت $(\pi = 3.1416)$

بتفحص هذا القانون يتضح أنه يحتوي على معلمتين مجهولتين هما μ و σ، لذلك يقال عن التوزيع الطبيعي أنه معرف بهاتين المعلمتين، و المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي يرمز له بالرمز:

$$X \sim N(\mu,\sigma)$$

منحنى قانون التوزيع الطبيعي:



خواصه:

✓ منحنى التوزيع الطبيعي ناقوسي الشكل (الجرس)؛

- ✓ مهما كانت قيمة X فإن $f(x) \geq 0$ وهذا لأن المنحنى دوما فوق محور السينات (المحور الأفقي)؛
- ✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (أي أن مجموع المساحة الكلية تحت المنحنى دوما يساوي 1)؛
- ✓ منحناه متناظر حول المحور العمودي الذي يشمل(μ) على المحور الأفقي أي أن هذا العمود يقسم المساحة الكلية إلى قسمين متساويين بحيث : $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = \frac{1}{2}$؛
- ✓ في التوزيع الطبيعي دوما نجد النسب التالية:
  - المساحة المحصورة في المجال $\mu \mp \sigma = 68.26\%$ من المساحة الكلية؛
  - المساحة المحصورة في المجال $\mu \mp 2\sigma = 95.44\%$ من المساحة الكلية؛
  - المساحة المحصورة في المجال $\mu \mp 3\sigma = 99.72\%$ من المساحة الكلية؛

كيفية حساب الاحتمال في التوزيع الطبيعي:

ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياريσ :

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

احتمال ان يقع المتغير العشوائي X ضمن مجال معين [a, b] يعبر عنه بـ $P(a \leq X \leq b)$ حيث:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

2-1-2 قانون التوزيع الطبيعي المعياري:

ونظرا لصعوبة حساب التكامل لإيجاد الاحتمال عندما يكون المتغير العشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي، لجأ علماء الإحصاء إلى تحويل التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي)، وهو توزيع طبيعي وسطه الحسابي يساوي 0 وانحرافه المعياري يساوي 1. في هذه الحالة نستبدل المتغير العشوائي الطبيعي X بمتغير عشوائي طبيعي معياري Z حيث:

$$Z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

Z: متغير عشوائي مركزي (variable aléatoire centrée réduite)، دالة كثافته الاحتمالية $f(z)$ معرفة كما يلي:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

حساب الاحتمال بالنسبة للتوزيع الطبيعي المعياري:

يتم حساب احتمال المتغير العشوائي Z ضمن مجال معين و ليكن $[z1, z2]$ كما يلي:

$$P(z1 \leq Z \leq z2) = \int_{z1}^{z2} f(z)dz = \int_{z1}^{z2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

هذا الاحتمال ما هو الا المساحة الواقعة تحت المنحنى و محصورة بين المستقيمين العموديين z1 و z2. و هذا الاحتمال نجده بحساب قيمتين z1 و z2 و باستعمال الجداول الاحصائية الخاصة بالتوزيع الطبيعي المعياري.

$$P(z1 \leq Z \leq z2) = P(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x_2 - \mu}{\sigma})$$

مثال1: اخذت درجات الحرارة خلال شهر ماي لولاية ما، فوجد انها تاخذ شكل توزيع طبيعي بتوقع مقداره 20° و انحراف معياري مقداره 3,33°. اوجد احتمال ان تقع درجات الحرارة بين 21,11 و 26,66 .

الحل: نعتبر المتغير العشوائي في هذه الحالة على أنه درجة الحرارة و يرمز له بـ X و الذي يتبع توزيع الطبيعي:

$$X \sim N(20,\ \ 3{,}33)$$

و قمنا باستنتاج متغير عشوائي Z و الذي يتبع توزيع الطبيعي المعياري : $Z \sim N(0{,}1)$ من اجل حساب الاحتمال المطلوب.

$$\begin{aligned} P(z1 \leq Z \leq z2) &= P\left(\frac{x1 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x2 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{21{,}11 - 20}{3{,}33} \leq Z \leq \frac{26{,}66 - 20}{3{,}33}\right) \\ &= P(0{,}33 \leq Z \leq 2) \end{aligned}$$

باستعمال الجداول الاحصائية لقانون التوزيع الطبيعي المعياري نجد قيمة الاحتمال المقابلة لكل قيمة zi فنحصل على:

$$P(0{,}33 \leq Z \leq 2) = P(2) - P(0.33) = 0{,}97725 - 0{,}6293 = 0{,}3479$$

مثال 2: إذا كان $z \sim N(0{,}1)$ فأوجد:

1. $P(Z < 1.50)$
2. $P(Z < 0.98)$
3. $P(Z > 0.98)$
4. $P(-1.33 < Z < 2.42)$

الحل:

1. **إيجاد** $P(Z < 1.50)$

نلاحظ علامة الاحتمال أصغر من، أي أن المساحة المطلوبة يسار القيمة كما هو موضح بالرسم، وبالتالي نستخدم الجدول مباشرة كما هو مبين، وتكون $P(Z < 1.50) = 0.9332$

Z	0.00
.	.
.	.
1.5	0.9332
.	.
.	.

2. إيجاد $P(Z < 0.98)$

بنفس الطريقة السابقة، فإن $P(Z < 0.98) = 0.8365$

3. إيجاد $P(Z > 0.98)$

لاحظ لأن علامة الاحتمال أكبر من، أي أن المساحة المطلوبة تكون على يمين القيمة، والجدول يعطينا المساحات على يسار القيمة وبالتالي:

$$P(Z > 0.98) = 1 - P(Z < 0.98) = 1 - 0.8365 = 0.1635$$

4. إيجاد $P(-1.33 < Z < 2.42)$

$$P(-1.33 < Z < 2.42) = P(Z < 2.42) - P(Z < -1.33) = 0.9922 - 0.0918 = 0.9004$$

بعض العلاقات الهامة:

$$P(Z = z) = 0$$
$$P(Z \geq 0) = P(Z \leq 0) = \varphi(0) = 0.5$$
$$P(Z > -\infty) = P(Z < +\infty) = \varphi(\mp\infty) = 1$$
$$P(a < Z < b) = \varphi(b) - \varphi(a)$$
$$P(Z > -a) = 1 - P(Z < -a) = P(Z < a) = \varphi(a)$$
$$P(Z \leq -b) = \varphi(-b) = 1 - P(Z < b) = 1 - \varphi(b)$$
$$P(-a < Z < -b) = \varphi(a) - \varphi(b)$$
$$P(-a < Z < 0) = \varphi(a) - 0.5 \quad et \; P(0 < Z < b) = \varphi(b) - 0.5$$
$$P(-a < Z < b) = \varphi(b) + \varphi(a) - 1$$

2.2 التوزيع الأسي: Exponential Distribution

عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في المسائل المتعلقة بقياس الزمن، مثل مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة...

للتوزيع الأسي علاقة بتوزيع بواسون، فإذا كان وقوع أحداث ما يتبع هذا التوزيع، فإن المدة بين وقوع حدثين تتبع التوزيع الأسي، كمثال على ذلك، إذا كان وصول الزبائن إلى أحد شبابيك خدمة ما يتبع توزيع بواسون فإن المدة الفاصلة بين وصول كل زبونين إلى الشباك تخضع للتوزيع الأسي.

نقول عن المتغير العشوائي المستمر X أنه يخضع للتوزيع الأسي ذي المعلمة α ، ونكتب $X \sim e(\alpha)$ ، إذا كان قانون احتماله معرف كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \ldots \quad \ldots x \geq 0 \\ 0 & \ldots\ldots \quad x < 0 \end{cases} \; / \; \alpha > 0$$

كما يتم التعبير عن تابع التوزيع الأسي كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \alpha e^{-\alpha x}\, dx = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}; & x \geq 0 \\ 0\ ; & x < 0 \end{cases}$$

التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع هي:

$$E(x) = \frac{1}{\alpha} \quad , \quad V(x) = \sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2} \ , \quad \sigma = \sqrt{V(x)}$$

مثال: إذا علمت أن الفترة الزمنية اللازمة لإنهاء خدمة العميل في بنك التنمية المحلية تتبع التوزيع الأسي بمتوسط 5 دقائق، فأوجد مايلي:

1. دالة كثافة الاحتمال التي تعبر عن الفترة الزمنية اللازمة لإنهاء خدمة العميل؟
2. احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من 4 دقائق؟
3. احتمال أن يتم إنهاء خدمة العميل ما بين دقيقتين وأربع دقائق؟
4. أحسب التباين والانحراف المعياري؟

الحل:

نعرف المتغير العشوائي (X) بالفترة الزمنية اللازمة لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة

1. **كتابة دالة كثافة الاحتمال التي تعبر عن الفترة الزمنية اللازمة لإنهاء خدمة العميل:**

لدينا من المعطيات بأن متوسط إنهاء الخدمة في البنك هو 5 دقائق، أي أن:

$$E(x) = \frac{1}{\alpha} = 5 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} = 0.2$$

ومنه تصبح قيمة α هي 0.2

وبناء عليه فإن دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن تأخذ الصيغة التالية :

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

بتعويض القيم نحصل على الدالة التالية:

$$f(x) = 0.2e^{-0.2x}\ ; x \geq 0$$

2. **حساب احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من 4 دقائق(4 دقائق على الأكثر)**: يتم التعبير عن هذا الاحتمال بالصيغة التالية:

$$P(x \leq 4) = \int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 0.2e^{-0.2x}\, dx = [1 - e^{-0.2x}]_0^4 = 0.551$$

3. **حساب احتمال أن يتم إنهاء خدمة العميل ما بين دقيقتين وأربع دقائق:**

$$P(2 \leq x \leq 4) = \int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 0.2e^{-0.2x}\, dx = [1 - e^{-0.2x}]_2^4 = \left[1 - e^{(-0.2)(4)}\right] - \left[1 - e^{(-0.2)(2)}\right] = 0.670 - 0.449 = 0.221$$

4. **حساب التباين والانحراف المعياري:**

$$V(x) = \sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{(0.2)^2} = 25\ minute \ , \quad \sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{25} = 5minute$$

3.2 توزيع غاما: Gamma Distribution

يعد هذا التوزيع الأساس النظري لتوليد بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة، كالتوزيع الأسي مثلا، من جانب آخر يعد التوزيع المناسب للتوزيعات التي تعتمد على عنصر الزمن، مثل الفترة الزمنية لبقاء إنسان على قيد الحياة مصاب بمرض عضال، والفترة الزمنية المستغرقة لفحص مريض في احدى العيادات الطبية، والفترة الزمنية بين وصول باخرتين متتاليتين لأحد أرصفة الميناء.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن (X)، يتوزع وفق توزيع غاما، فإن دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} \alpha^n . x^{n-1} . e^{-\alpha x} \ \dots \dots X \geq 0 \\ 0 \qquad \qquad \qquad \dots \dots \ X < 0 \end{cases} \quad /n > 0, \alpha > 0$$

حيث أن:

n, α : تمثل معلمات توزيع غاما

$\Gamma(n)$: تمثل دالة غاما، وتأخذ الشكل التالي:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} . e^{-x} dx$$

وفيما يلي بعض الحالات الخاصة لدالة غاما:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$
$$\Gamma(n) = (n-1)!$$
$$\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال: أحسب ما يلي:

1. $\Gamma(4.5)$
2. $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{2}}} dx$

الحل:

1. $\Gamma(4.5) = 3.5\Gamma(3.5)$

$$\Gamma(3.5) = 2.5\Gamma(2.5)$$

$$\Gamma(2.5) = 1.5\Gamma(1.5)$$
$$\Gamma(1.5) = 0.5\Gamma(0.5)$$
$$\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$$

وعليه:

$$\Gamma(4.5) = (3.5)(2.5)(1.5)(0.5)\left(\sqrt{\pi}\right) = 11.36$$

2. $$\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{6-1} e^{-x} dx = \Gamma(6) = 5! = 120$$

3. $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_0^{+\infty} x^{\left(\frac{-1}{2}\right)} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 1.77$$

وغالبا ما يعبر عن توزيع غاما، اختصارا بالاصطلاح التالي:

$$x \sim G(n, \alpha)$$

ويمكن إيجاد تابع توزيع غاما كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x x^{n-1} . e^{-x} dx$$

إن التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري لتوزيع غاما، تكتب على النحو التالي:

$$E(x) = \frac{n}{\alpha} \quad ; \quad V(x) = \frac{n}{\alpha^2} \quad ; \sigma = \sqrt{V(x)} = \frac{\sqrt{n}}{\alpha}$$

حالة خاصة: إذا كان $n = 1$ فإن توزيع غاما يصبح التوزيع الأسي.

مثال: ليكن لدينا المتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد السنوات التي يقضيها الطالب بالجامعة للحصول على شهادة ليسانس، فإذا علمت بأن قيمة المعلمتين (α) و(n) تتبع توزيع غاما بمقدار يعادل 2، أي أن: $[n = \alpha = 2]$ ، فالمطلوب الإجابة على الآتي:

1. أحسب قيم غاما للحالات التالية: $\Gamma_{\frac{1}{2}}$, $\Gamma 2$, $\Gamma 3$, Γn؟
2. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي؟ بين أنها دالة كثافة احتمالية؟
3. أوجد تابع التوزيع الاحتمالي لهذا التوزيع؟
4. ما احتمال أن يبقى الطالب 5 سنوات على الأكثر في الجامعة للحصول على شهادة الليسانس؟
5. ما احتمال أن يكون عدد السنوات التي يقضيها الطالب بالجامعة للحصول على شهادة الليسانس ما بين 3 و 5 سنوات؟
6. أحسب عدد السنوات المتوقع أن يقضيها الطالب للحصول على شهادة الليسانس، وما مقدار التباين والانحراف المعياري المقابل لها؟

الحل:

1. **حساب قيمة قاما للحالات التالية:**

$$\left(\Gamma_{\frac{1}{2}}\right) = \pi = 3.14$$
$$(\Gamma_2) = 1! = 1$$
$$(\Gamma_3) = 2! = 2$$
$$(\Gamma_n = (n-1)! = (n-1)(n-2) \times \dots \dots \times (3)(2)(1)$$

2. **1 إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} \alpha^n . x^{n-1} . e^{-\alpha x} \dots \dots X \geq 0 \\ 0 \qquad \dots \dots \; X < 0 \end{cases} \quad /n > 0, \alpha > 0$$

وبما أن قيمة المعلمتين متساويتين وتعادل 2، فإن الدالة تأخذ الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(2)} 2^2 . x^{2-1} . e^{-2x} \dots \dots X \geq 0 \\ 0 \qquad \dots \dots \; X < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \quad 4x . e^{-2x} \dots \dots X \geq 0 \\ 0 \qquad \dots \dots \; X < 0 \end{cases} \quad /n > 0, \alpha > 0$$

2. **2 إثبات أنها دالة كثافة احتمالية:** نقول عن دالة أنها دالة كثافة احتمالية إذا تحقق الشرط التالي:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} (4x . e^{-2x})dx = 1$$

$$\int_0^{+\infty} (4x . e^{-2x})dx = \left[4x\left(\frac{-1}{2} e^{-2x}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 4\left(\frac{-1}{2} e^{-2x}\right)dx$$

حيث:

$$\int_0^{+\infty} u(x)\, \grave{v}(x)dx = [u(x)v(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \grave{u}(x)v(x)\, dx$$

$$\int_0^{+\infty} (4x . e^{-2x})dx = 0 - [e^{-2x}]_0^{+\infty} = 1$$

ومنه فإن الدالة $f(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية.

3. **إيجاد دالة تابع التوزيع الاحتمالي:**

$$F(x) = \int_0^x f(x)\, dx = \int_0^x (4x . e^{-2x})dx = \left[4x\left(\frac{-1}{2} e^{-2x}\right)\right]_0^x - [(e^{-2x})]_0^x$$
$$= \left[e^{-2x}\big((-2x) - 1\big)\right]_0^x$$
$$= [-e^{-2x}(2x+1)]_0^x$$

4. **احتمال أن يبقى الطالب 5 سنوات على الأكثر في الجامعة للحصول على شهادة الليسانس:**

$$P(x \leq 5) = F(5) = [-e^{-2x}(2x+1)]_0^5 = (-0.0005) - (-1) = 0.9995$$

5. **احتمال أن يكون عدد السنوات التي يقضيها الطالب بالجامعة للحصول على شهادة الليسانس ما بين 3 و 5 سنوات:**

$$P(3 \leq x \leq 5) = F(5) - F(3) = [-e^{-2x}(2x+1)]_3^5 = (-0.0005) - (-0.0173) = 0.0168$$

6. **حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري:**

$$E(x) = \frac{n}{\alpha} = 1 \; ; \; V(x) = \frac{n}{\alpha^2} = \frac{1}{2} \quad ; \; \sigma = \sqrt{V(x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$$

4.2 توزيع بيتا: Beta Distribution

نقول عن المتغير العشوائي (X) أنه يتوزع وفق توزيع بيتا ذي المعلمتين الموجبتين تماما n,m، ونكتب: $x \sim \beta(m,n)$، إذا كانت دالة كثافته معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma m \Gamma n} x^{m-1}(1-x)^{n-1} \ldots\ldots 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad o/w \end{cases} /n,m > 0$$

التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري لتوزيع بيتا، تكتب على النحو التالي:

$$E(x) = \frac{m}{m+n} \quad ; \quad V(x) = \frac{m.n}{(m+n)^2(m+n+1)} \; ; \; \sigma = \frac{1}{m+n}\sqrt{\frac{m.n}{m+n+1}}$$

5.2 توزيع كاي – مربع: χ^2 *Distribution*

نقول عن المتغير العشوائي (X) أنه يتوزع وفق توزيع كاي –مربع، ذي المعلمة الموجبة v ونكتب: $x \sim \chi^2(v)$ ، إذا كانت دالة كثافته معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2)^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)} x^{\frac{v}{2}-1} \ldots\ldots x \geq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad o/w \end{cases} /v > 0$$

التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري لتوزيع كاي –مربع ، تكتب على النحو التالي:

$$E(x) = v \quad ; \quad V(x) = 2v \; ; \; \sigma = \sqrt{2v}$$

خصائص توزيع χ^2:

- إذا كان $v = 2$ فإن توزيع χ^2 يصبح التوزيع الأسي، أين $\alpha = \frac{1}{2}$.
- إذا وضعنا $x = 2y$ و $\frac{v}{2} = n$، فإن توزيع χ^2 يصبح توزيع "Γ".

6.2 توزيع ستودنت:

إذا كان T متغير غشوائي خاضع لتوزيع ستودنت فإن دالة كثافته تعرف كما يلي:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{v+1}{2}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{v\pi}}\Gamma\left(\dfrac{v}{2}\right)}\left[1+\dfrac{t^2}{v}\right]^{\frac{-(v+1)}{2}} & \forall t \in \left]-\infty, +\infty\right[\end{cases}$$

حيث v درجة الحرية تساوي حجم العينة ناقص 1 أي $v = N - 1$

التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري لتوزيع كاي –مربع ، تكتب على النحو التالي:

$$E(t) = 0 \;\; ; \;\; V(t) = \frac{v}{v-2} \;\; , v > 2$$

خصائص توزيع ستودنت:

- منحنى T متناظر حول محور التراتيب حيث:

$P(T \leq 0) = P(T \geq 0) = 0.5$ ومنه $P(T \leq t) = 1 - P(T \leq -t)$

طرفا منحنى T يمتدان إلى مالا نهاية في الاتجاهين دون أن يتقاطعا مع المحور الأفقي.

7.2 توزيع فيشر:

نقول عن المتغير العشوائي (F) أنه يخضع لتوزيع فيشر، إذا كانت دالة كثافته معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{v_2}{2}\right)}(v_1)^{\frac{v_1}{2}}(v_2)^{\frac{v_2}{2}}(x)^{\frac{v_1}{2}-1}(v_1+v_2x)^{-\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)} & ; \;\; x \geq 0 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

حيث v_1 و v_2 درجتا الحرية لتوزيع F.

التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري لتوزيع F، تكتب على النحو التالي:

$$E(x) = \frac{v_2}{v_2 - 2} \;\; ; \;\; V(t) = \frac{2{v_2}^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 4)(v_2 - 2)^2} \;\; ; \; v_2 > 4$$